奥赛园地

教练平台

【例】 若 α 为锐角，且 $\cos\alpha=0.6$，则(　　).

A. $0°<\alpha<30°$　　B. $30°<\alpha<45°$

C. $45°<\alpha<60°$　　D. $60°<\alpha<90°$

【分析】 因为 $0.5<0.6<1$，并且在 $0°$ 到 $90°$ 范围内，一个角的余弦随角的增大而减小，又 $\cos60°=0.5$，$\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$，所以 $45°<\alpha<60°$.

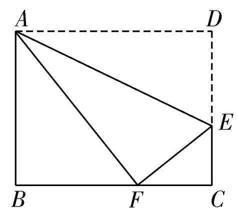
【解答】 C.

【说明】 解答本题需要从两个角度考虑，一是特殊的三角函数值；二是三角函数的变化规律.

挑战自我

初赛题

1. 如图，沿 AE 折叠矩形纸片 $ABCD$，使点 D 落在边 BC 的点 F 处，已知 $AB=8$，$BC=10$，则 $\tan\angle EFC$ 的值为(　　).



(第 1 题)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

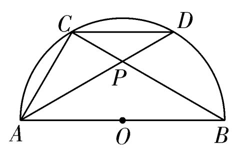
C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AB=4$，$BC=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，则 $\angle B$ 的度数为(　　).

A. $30°$　　B. $90°$

C. $30°$或$60°$　　D. $30°$或$90°$

3. 如图，AB 是半圆的直径，弦 AD、BC 相交于点 P，已知 $\angle DPB=60°$，点 D 是弧 BC 的中点，则 $\tan\angle DAC$ 等于(　　).



(第 3 题)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 和 $\angle B$ 均为锐角，$AC=6$，$BC=3\sqrt{3}$，且 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos B$ 的值为________.

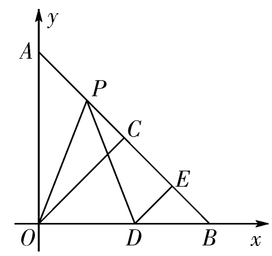
5. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2(m>0)$ 与 x 轴交于点 A、B，若点 A、B 到原点的距离分别为 OA、OB，且满足 $\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，则 m 的值等于________.

6. 如图，在 $\triangle ABO$ 中，$\angle AOB=90°$，$OA=OB=10$，分别以边 OA、OB 所在的直线为坐标轴建立平面直角坐标系，点 P 自点 A 出发沿线段 AB 匀速运动至点 B 停止，同时点 D 自原点 O 出发沿 x 轴正方向匀速运动，在点 P、D 运动的过程中，始终满足 $PO=PD$，过点 O、D 向 AB 作垂线，垂足分别为 C、E，设 OD 的长为 x.

(1)求 AP 的长；(用含 x 的代数式表示)

(2)在点 P、D 运动的过程中，线段 PC 与 BE 是否相等？若相等，请给予证明；若不相等，请说明理由；

(3)设以点 P、O、D、E 为顶点的四边形的面积为 y，请直接写出 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围.

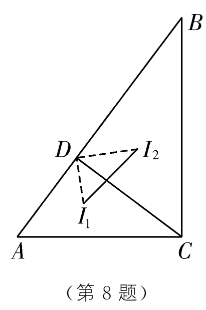


(第 6 题)

复赛题

7. 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴正方向交于 A、B 两点，与 y 轴正方向交于点 C. 已知 $AB=\sqrt{3}AC$，$\angle CAO=30°$，则 $c=$________.

8. 设 CD 是直角三角形 ABC 的斜边 AB 上的高，I_1、I_2 分别是 $\triangle ADC$、$\triangle BDC$ 的内心，$AC=3$，$BC=4$，求 I_1I_2.



(第 8 题)

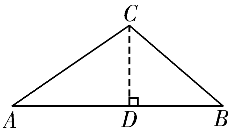
奥 赛 园 地

1. A　2. D

3. D　提示：设$\angle DAC=\angle DAB=x^{\circ}$，$\angle ABC=y^{\circ}$，则有 $x+y=60$，$2x+y=90$，解得 $x=30$.

所以 $\tan\angle DAC=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　提示：如图，在$\triangle ABC$中作高CD.



（第 4 题）

$\because$　$AC=6,\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$　$CD=AC\cdot\sin A=2\sqrt{3}$,

$DB=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$.

$\therefore$　$\cos B=\frac{DB}{BC}=\frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

5. 2　提示：设方程 $x^2+mx-\frac{3}{4}m^2=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则有

$x_1+x_2=-m<0,x_1x_2=-\frac{3}{4}m^2<0$.

所以 $x_1<0,x_2>0$.

由$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，可知 $OA>OB$.

又 $m>0$，

所以抛物线的对称轴在 y 轴的左侧，于是 $OA=|x_1|=-x_1,OB=x_2$.

所以$\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{2}{3},\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}$,

故$\frac{-m}{-\frac{3}{4}m^2}=\frac{2}{3}$.

解得 $m=2$.

6. (1)作 $PG\perp x$ 轴于点 G，$PF\perp y$ 轴于点 F.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APF$ 中，$\angle PAF=45°$,

$PF=AP\cdot\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}AP$.

而 $OG=PF$，即$\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}AP,AP=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

(2)结论：$PC=BE$.

当 $0\leqslant x\leqslant10$ 时，$PC=AC-AP=5\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$DB=10-x$.

又$\angle EBD=45°$,

所以 $EB=(10-x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

所以 $PC=BE$.

(3)当 $0\leqslant x\leqslant10$ 时，$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x+25$;

当 $10<x<20$ 时，$y=\frac{5}{2}x$.

7. $\frac{1}{9}$　提示：由题意知，点 C 的坐标为$(0,c)$，$OC=c$. 设 A、B 两点的坐标分别为$(x_1,0)$，$(x_2,0)$，则 x_1,x_2 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根.

由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-b,x_1x_2=c$.

又$\angle CAO=30°$，则 $AC=2c,AB=\sqrt{3}AC=2\sqrt{3}c$.

于是 $x_1=OA=AC\cos30°=\sqrt{3}c,x_2=OB=OA+AB=3\sqrt{3}c$.

由 $x_1x_2=9c^2=c$，得 $c=\frac{1}{9}$.

8. 作 $I_1E\perp AB$ 于点 E，$I_2F\perp AB$ 于点 F.

在直角三角形 ABC 中，$AC=3,BC=4,AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

又 $CD\perp AB$，

由射影定理可得 $AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{9}{5}$,

故 $BD=AB-AD=\frac{16}{5}$,

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\frac{12}{5}$.

因为 I_1E 为直角三角形 ACD 的内切圆的半径，所以 $I_1E=\frac{1}{2}(AD+CD-AC)=\frac{3}{5}$.

连接 DI_1、DI_2，则 DI_1、DI_2 分别是$\angle ADC$和$\angle BDC$的平分线.

所以$\angle I_1DC=\angle I_1DA=\angle I_2DC=\angle I_2DB=45°$，故$\angle I_1DI_2=90°$.

所以 $I_1D\perp I_2D$，$DI_1=\frac{I_1E}{\sin\angle ADI_1}=\frac{\frac{3}{5}}{\sin45°}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

同理,可求得 $I_2F=\frac{4}{5}$, $DI_2=\frac{4\sqrt{2}}{5}$. 所以

$I_1I_2=\sqrt{DI_1^2+DI_2^2}=\sqrt{2}$.