流体力学 _第二版　李玉柱　习题解答

第一章　绪论

1—1　解：

$$\upsilon=\frac{\mu}{\rho}=\frac{1.875\times10^{-5}}{1.165}=1.61\times10^{-5}m^2/s$$

1—2　解：$\mu=\rho\upsilon=992.2\times0.661\times10^{-6}=0.656\times10^{-3}Pa\cdot s$

1—3　解：设油层速度呈直线分布

$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}=0.1\times\frac{1}{0.005}=20Pa$$

1-4　解：木板沿斜面匀速下滑，作用在木板上的重力 G 在斜面的分力与阻力平衡，即

$$T=G\sin30^{0n}=5\times9.81\times0.5=24.53N$$

由 $T=\mu A\frac{dV}{dy}$　　$\mu=\frac{T}{A}\frac{dy}{dV}=\frac{24.53\times0.001}{0.4\times0.6\times0.9}=0.114N\cdot s/m^2$

1-5　解：上下盘中流速分布近似为直线分布，即

$$\frac{dV}{dy}=\frac{V}{\delta}$$

在半径 r 处且切向速度为 $\mu=\omega r$

切应力为

$$\tau=\mu\frac{dV}{dy}=\mu\frac{V}{y}=\mu\frac{\omega r}{\delta}$$

$$\frac{\pi\mu\omega}{32\delta}d^4$$

转动上盘所需力矩为 M=$\int dM=\int\tau dA_1$

$$=\int_0^{d/2}\tau(2\pi rdr)r$$

$$=\int_0^{d/2}\mu\frac{\omega r}{\delta}2\pi r^2dr$$

$$=\frac{\pi\mu\omega}{32\delta}d^4$$

1-6 解：由力的平衡条件　$G=\tau A$

而 $\tau=\mu\frac{dV}{dr}$

$$dV=0.046m/s$$

$$dr=\left(0.15-0.1492\right)/2=0.00025$$

$$G = \mu A \frac{dV}{dr}$$

$$\mu = \frac{G}{dV}\frac{dr}{A} = \frac{9 \times 0.00025}{0.046 \times 0.15 \times \pi \times 0.1495} = 0.694 Pa \cdot s$$

1-7 解：油层与轴承接触处 V=0，与轴接触处速度等于轴的转速，即

$$V = \frac{\pi dn}{60} = \frac{\pi \times 0.36 \times 200}{60} = 3.77 m/s$$

$$T = \tau A = \mu \frac{V}{\delta} \pi dl = \frac{0.73 \times 3.77 \times \pi \times 0.36 \times 1}{2.3 \times 10^{-4}} = 1.353 \times 10^4 N$$

克服轴承摩擦所消耗的功率为 $N = M\omega = TV = 1.353 \times 10^4 \times 3.77 = 51 kW$

1-8 解: $\alpha = \frac{dV}{V} / dT$

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT = 0.00045 \times 50 = 0.0225$$

$$dV = 0.0225V = 0.0225 \times 10 = 0.225 m^3$$

或，由 $\frac{dV}{V} = \alpha dT$ 积分得

$$\ln V - \ln V_0 = \alpha \left(t - t_0 \right)$$

$$V = V_0 e^{\alpha (t - t_0)} = 10 e^{0.00045 \times 50} = 10.23 m^3$$

$$\frac{10.5}{d} = 1.05$$

1-9 解:法一： 5atm $\beta = 0.538 \times 10^{-9}$

10atm $\beta = 0.536 \times 10^{-9}$

$$\beta = 0.537 \times 10^{-9}$$

$$\beta = \frac{d\rho}{\rho} \Big/ dp$$

$\frac{d\rho}{\rho} = \beta d\rho$ =0.537 x 10^{-9} x (10-5) x98.07 x 10^3 = 0.026%

法二：$\frac{d\rho}{\rho} = \beta d\rho$,积分得

$$\ln\rho-\ln\rho_0=\beta\left(p-p_0\right)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=e^{\beta\left(p-p_0\right)}=e^{0.537\times10^{-9}\times(10-5)\times98.07\times10^3}=1.00026$$

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=0.026\%$$

1-10 解：水在玻璃管中上升高度

h = $\frac{29.8}{d}=2.98mm$

水银在玻璃管中下降的高度

H = **错误！未找到引用源。** $\frac{10.5}{d}=1.05$ mm

第二章流体静力学

2-1 解：已知液体所受质量力的 x 向分量为 –a ,z 向分量为-g。 液体平衡方程为

$$dp=\rho(-adx-gdz)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

考虑等压方面 dP=0, 由式（1）得

$$-adx-gdz=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

积分该式，得等压面方程

$$-ax-gz=C$$

由边界条件确定积分常数 C。建立坐标如图，选取位于左侧自由面管轴处得点（x,z）= (0,h),将坐标值代入上式，得 C=-gh，通过该点的等压面方程为

$$-ax-gz=-gh\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

由该式可解出加速度

$$a=\frac{h-z}{x}g$$

位于右侧自由面管轴处的点位于该等压面上，（x,z）=(L-0) 满足等压面方程（3）将 $x=L=30cm$，$h-z=5-0=5$代入上式，得

$$a=\frac{5}{30}\times9.8m/s^2$$

2-2 解：设 P_{abs0} 表示液面的绝对压强。A 点的绝对压强可写成

$$p_{abs0}+g\rho h=p_a+g\rho z+p$$

解得

$$p_{abs0}=p_a+g\rho(z-h)+p$$

$$=\left\{0.98\times10^5+9.8\times1000\times\left(0.5-1.5\right)+4.9\times10^3\right\}Pa$$
$$=93.1\times10^3\,pa=93.1kPa$$

液面的相对压强

$$p_0=p_{abs0}-p_a=\left\{93.1\times10^3-9.8\times10^4\right\}Pa=-4900Pa$$

2-3 解：（1）A 、B 两点的相对压强为

$$p_A=p_B=\frac{F}{A}=\frac{F}{\pi d^2/4}=\frac{F}{\pi d^2}=\frac{4\times4\times10^3}{\pi\times1^3}\,pa$$

$$=5.09\times10^3\,pa$$

A’ 、B’两点的相对压强为

$$P'_A=P'_B=P_A+g\rho h=\left\{5.09\times10^3+9.8\times1000\times2\right\}pa=2.47\times10^4\,pa$$

(2)容器底面的总压力为

$$F'=P_{A'}A'=P_{A'}\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)=2.47\times10^4\times\frac{1}{4}\times\pi\times2^2N=7.76\times10^4N$$

2-4 解：由题意得 $p_0+g\rho h=p_a$ 故

$$h=\frac{p_a-p_0}{g\rho}=\frac{9.8\times10000-85\times1000}{9.8\times1000}m=1.33m$$

2-5 解：设真空计内液面压强为 P_0，A 点绝对压强为 P_{absA},

$$p_{absA}=p_0+g\rho z,\ p_a=p_0+g\rho h$$

消去该两式的 P_0，得

$$p_{absA}=p_a-g\rho h+g\rho z=p_a+g\rho(z-h)$$

$$=\left[9.8\times10^4+9.8\times1000\times\left(1-2\right)\right]Pa=8.82\times10^4Pa$$

A 点的相对压强

$$p_A=p_{absA}-p_a=\left(8.82\times10^4-9.8\times10^4\right)Pa=-9800Pa$$

A 点的真空度

$$h_{vA}=\frac{-p_A}{g\rho}=\frac{9800}{9.8\times1000}m=1.0m$$

2-6 解：设压力表 G 的读数 为 P_G。容器底压强可写成

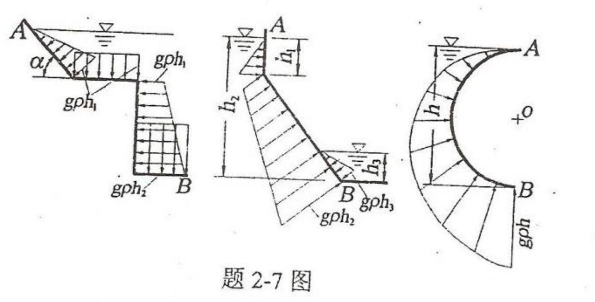
$$p_G+g\rho_0\left(7.62-3.66\right)+g\rho_G\left(3.66-\quad\right)1$$

$$=g\rho_G(9.14-1.52)$$

解出 P_G,得

$$p_G = g\rho_G(9.14-3.66) - g\rho_0(7.62-3.66)$$
$$=(9.8\times1250\times5.48-9.8\times834\times3.96)Pa$$
$$=(67130-32366)Pa=34764Pa$$

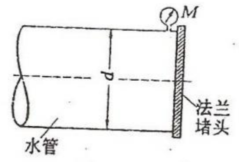
2-7 解：压强分布图如图所示



题 2-7 图

2-8 解：压力表处得相对压强为

$$p=10at=100mH_2O=9.8\times10^5N$$



题 2-8 图

由于 d=1m<<100m,可认为法兰堵头的平均压强近似等于 P。故静

水总压力

$$P=p\frac{\pi d^2}{4}=9.8\times10^5\times\frac{\pi}{4}\times1^2N=7.70\times10^5N$$

其作用点通过堵头圆心。

注释：根据精确计算，可得总压力为 7.74 x 10^5N,作用点在圆心以下 0.62mm 处，

故上述近似方法满足设计要求。

2-9 解：(1)闸门形心处得压强为

$$p_C=g\rho\left(h+\frac{a}{2}\right)=9.8\times1000\times\left(1+\frac{3}{2}\right)Pa=24500Pa$$

故作用在闸门上的静水总压力

$$P=p_cA=p_c(ba)=24500\times2\times3N=1.47\times10^5N$$

(2)设压力中心的位置在 D 点，则 D 点在水下的深度为

$$y_D = y_c + \frac{J_C}{y_c A} = \left(h + \frac{a}{2}\right) + \frac{ba^3/12}{bh\left(h + a/2\right)} = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{2\times 3^3/12}{2\times 3\times\left(1+3/2\right)}\right]m = 2.8m$$

2-10 解：(1)设闸门宽度为 b。当 H=1m 时，闸门的压力中心

D 在水下的深度

$$y_D = y_c + \frac{J_C}{y_c A} = H + \frac{h}{2} + \frac{bh^3/12}{bh\left(H + h/2\right)} = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{2\times 3^3/12}{2\times 3\times\left(1+3/2\right)}\right]m = 2.8m$$

可知，D 点位于距闸门底

$$H + h - y_D = \left(3+1-2.8\right)m = 1.2m$$

(2)当静水压作用点位于门轴上方时，闸门才能在静水压的逆时针力矩作用下自动打开。若门轴置于 C 处，压力中心 D 位于门轴下面，显然闸门不可能自动打开。

2-11 图示一容器，上部为油，下部为水。已知 h_1=1m，h_2=2m，油的密度 ρ_0=800kg/m^3 。求作用于容器侧壁 AB 单位宽度上的作用力及其作用位置。

解（1）设油、水对容器壁 AB 的作用力分别为 P_1 和 P_2 ，水的密度 ρ，容器侧壁宽度 b=1m。有

$$P_1 = g\rho_0 hc_1 A_1 = g\rho_0 \frac{h_1}{2}\frac{bh_1}{\sin 60^0}$$

$$= 9.8\times 800\times\frac{1}{2}\times\frac{1\times 1}{\sin 60^o}N = 4.5\times 10^3 N$$

$$P_2 = p_{c2}A_2 = \frac{1}{2}(g\rho_0 h_1 + g\rho_0 h_1 + g\rho h_2)\frac{bh_2}{\sin 60^o}$$

$$= (g\rho_0 h_1 + \frac{1}{2}g\rho h_2)\frac{bh_2}{\sin 60^o}$$

$$= (9.8\times 800\times 1 + \frac{1}{2}\times 9.8\times 1000\times 2)\frac{1\times 2}{\sin 60^o}N = \times 40^3.7N$$

故容器壁 AB 单位宽度上的作用力为

$$P = P_1 + P_2 = (4.53\times 10^3 + 40.74\times 10^3)N = 45.27\times 10^3 N$$

（2）对 B 点取矩，有

$$M_B = P_1\left(\frac{h_2}{\sin 60^o} + \frac{h_1/3}{\sin 60^o}\right) + P_{21}\frac{h_2/2}{\sin 60^o} + P_{22}\frac{h_2/3}{\sin 60^o}$$

其中

$$P_{21} = g\rho_0 h_1\frac{bh_2}{\sin 60^o} = 18.1\times 10^3 N, P_{22} = g\rho\frac{h_2}{2}\frac{bh_2}{\sin 60^o} = 22.6\times 10^3 N$$

故作用力矩

$$M_B = \frac{1}{\sin 60^o}[4.53\times10^3\times(2+1/3)+18.1\times10^3\times(2/2)+22.6\times10^3\times(2/3)]N\cdot m$$

$$=\frac{10.570+18.1+15.067}{\sin 60^o}\times10^3 N\cdot m = 50.50\times10^3 N\cdot m$$

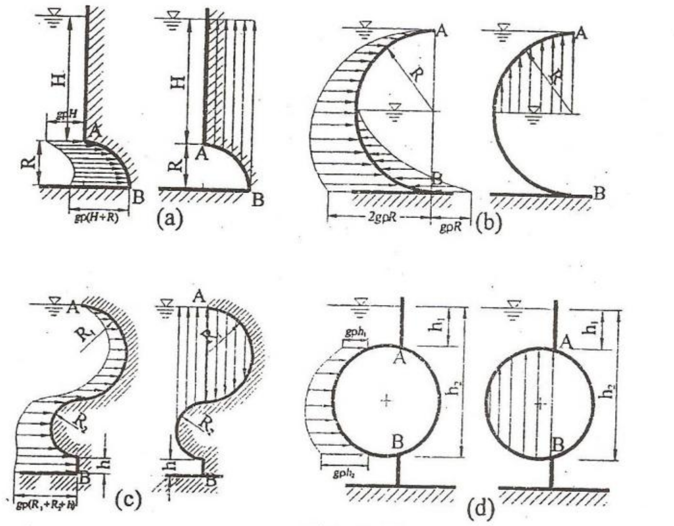
设总压力作用点到 B 点的距离为 x，有 $px = M_B$。得

$$x=\frac{M_B}{P}=\frac{50.50\times10^3}{45.27\times10^3}m=1.12m$$

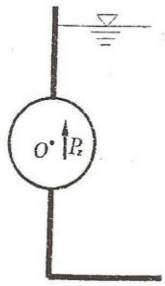
2-12 绘制图中 AB 曲面上的水平方向压力棱柱及铅垂方向的压力体图。

答 压力棱柱如图所示，但也可绘制曲面 AB 的水平投影面的压力棱柱代之；

各压力体如图所示。



题 2-12 图



题 2-13

2-13 图示一圆柱，转轴 O 的摩擦力可忽略不计，其右半部在静水作用下受到浮力 P_z，则圆柱在该浮力作用下能否形成转动力矩？为什么？

答 圆柱表面任一点上压强方向指向圆心 O，不能形成转动力矩。

2-14 一扇形闸门如图所示，圆心角 $\alpha = 45^o$，半径 r=4.24m，闸门所挡水深 H=3m。求闸门每米宽所承受的静水压力及其方向。

解 水平推力（宽度 b=1m）

$$P_x = g\rho h_C A_x = g\rho\frac{H}{2}(bH)$$

$$=\left[9.8\times1000\times\frac{3}{2}\times(1\times3)\right]N = 44.1\times10^3 N$$

铅直向下的垂向作用力（设压力体 abca 的体积为$\vec{V}$ ）

$$P_z = g\rho\vec{V} = g\rho b[H\frac{r + r(1-\cos\alpha)}{2} - \frac{\pi\alpha}{360}r^2]$$

$$= [9.8\times1000\times1\times(3\times\frac{4.24 + 4.24\times(1-\cos 45^o)}{2} - \frac{45\pi}{360}\times4.24^2)]N$$

$$= \left[9800\times\left(8.223 - 7.060\right)\right]N = 11.40\times10^3 N$$

总作用力以及作用力与水平向的夹角

$$P = \sqrt{P_x^{\ 2} + P_z^{\ 2}} = \sqrt{44.1^2 + 11.40^2}\times10^3 N = 45.55\times10^3 N$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{P_x}{P_z} = \tan^{-1}\frac{11.40}{44.1} = 14.49^o$$

作用力通过圆心 O 。

2-15 一圆柱形滚动闸门如图所示，直径 D=1.2m，重量 G=500 kN，宽 B=16m，滚动斜面与水平面成 70^o 角。试求（1）圆柱形闸门上的静水总压力 P 及其作用方向；（2）闸门启动时，拉动闸门所需之拉力 T。

解 (1)水平分力（向右）

$$\mathrm{p}_x = g\rho h_c A = g\rho\frac{D}{2}\left(BD\right) = \left(9.8\times1000\times\frac{1.2^2}{2}\right)N = 112.90\times10^3 N$$

垂直分力（向上）

$$p_x = g\rho\overline{V} = g\rho B\frac{\pi D^2}{4}\frac{1}{2} = \left(9.8\times1000\times16\times\frac{\pi\times1.2^2}{8}\right)N = 88.67\times10^3 N$$

总压力与水平面夹角（作用线过圆心 O）

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_z^2} = \sqrt{112.9^2 + 88.67^2}\times10^3 N = 143.56\times10^3 N$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{p_z}{p_x} = \tan^{-1}\frac{88.67}{112.90} = 38.15^o$$

（2）启门拉力T_0 。对图中 a 点取矩，有平衡方程

$$TD + P\cdot\frac{D}{2}\sin\left(90^o + \theta - 70^o\right) = G\cdot\frac{D}{2}\sin 70^o$$

得

$$T=\frac{1}{2}(G\sin 70^o-p\sin 58.15^o)=\frac{1}{2}\times\left(500\times10^3\sin 70^o-143.56\times10^3\sin 58.15^o\right)N$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(4.698-1.219\right)\times10^5N=1.74\times10^5N$$

2-16 解：设吸水管内液面压强为 p_0.作用于圆球垂直向上的力为（$\overline{V_1}$ 为压力体体积）

$$\mathrm{p}_{x1}=g\rho\overline{V_1}=g\rho\left[\frac{\pi d^2}{4}\frac{p_a-p_0}{g\rho}+\frac{3}{4}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3\right]$$

作用于圆球垂直向下的力为（$\overline{V_2}$ 为压力体体积）

$$p_{x2}=g\rho\overline{V_2}=g\rho\frac{\pi d^2}{4}\left(H_1-H_2\right)$$

圆球自重为 $G=\frac{3\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^3g\rho_0$. 球阀被吸起的条件为

$$p_{x1}\geq p_{x2}+G$$

将各项代入，得

$$g\rho\left[\frac{\pi d^2}{4}\frac{p_a-p_0}{g\rho}+\frac{3\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^3\right]\geq g\rho\frac{\pi d^2}{4}\left(H_1-H_2\right)+\frac{3\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^3g\rho_0$$

故

$$\frac{p_a-p_0}{g\rho}\geq\left(H_1-H_2\right)+\frac{4}{\pi d^2}\left[\frac{4\pi}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3\frac{\rho_0-\rho}{\rho}\right]$$ =

$$H-H_2+\frac{2}{3}\frac{D^3}{d^2}\frac{\rho_0-\rho}{\rho}=\left(4-2+\frac{2}{3}\frac{0.15^3}{0.1^2}\frac{8510-1000}{1000}\right)mH_2o=3.69mH_2o$$

当液面真空度 $h_0=\frac{p_a-p_0}{g\rho}\geq3.69mH_2o$ 时才能将阀门吸起。

2-17 解：长度为 ΔL 的管段上，静水压力为 $p\left(D\Delta L\right)$,管壁拉力为 $\sigma\left(2\delta\Delta L\right)$。写出静水压力与管壁拉力的平衡方程

$$pD\Delta L=2\sigma\delta\Delta L$$

解得

$$\delta=\frac{pD}{2\sigma}$$

2-18 解： 设比重计在水中体积排量为 $\overline{V}$ 。在被测液体中读数为 Δh 时，体积排量为 $\overline{V_F}=\overline{V}-A\Delta h$ 。在两种

液体中比重计受到的重力不变，依据浮力公式（2-33），有

$$\rho_F \overline{V_F} = \rho \overline{V} \quad 或 \quad \rho_F\left(\overline{V} - A\Delta h\right) = \rho \overline{V}$$

将 $\Upsilon = \rho_F / \rho$ 代入，得

$$\gamma\left(\overline{V} - A\Delta h\right) = \overline{V}$$

解得

$$\Delta h = \frac{\gamma\overline{V} - \overline{V}}{\gamma A} = \frac{\overline{V}}{A}\frac{\gamma - 1}{\gamma}$$ 得证。

2-19 解：依据浮力公式（2-33），提升球体的力等于露出水面部分的体积 $\overline{V}$ 与密度的乘积。球体最高点比水面高 H。依据球缺体积公式，露出部分的体积为

$$\overline{V} = \pi H^2\left(\frac{d}{2} - \frac{H}{3}\right)$$

提升 dH 所作的功为

$$dw = \rho\overline{V}dH = \rho\pi H^2\left(\frac{d}{2} - \frac{H}{3}\right)dH$$

由 H=0 积分到 H=d,得到

$$W = \int dW = \rho\pi\int_0^d H^2\left(\frac{d}{2} - \frac{H}{3}\right)dH = \frac{1}{12}\rho\pi\left(2dH^3 - H^4\right)_{H=0}^{H=d} = \frac{1}{12}\pi g\rho d^4$$

2-20 解：半圆柱体最低点的淹没深度 h=0.9m,柱体半径 r_0=1.5m,长度 L=10m，取水的密度**错误！未找到引用源。**=1000kg/m^3.淹没部分弓形的圆心角为

$$\theta = \cos^{-1}\frac{r_0 - h}{r_0} = \cos^{-1}\frac{1.5 - 0.9}{1.5} = 66.42^0 = 1.159 rad$$

依据公式（2-33），浮力 F=**错误！未找到引用源。**$\overline{V}$，其中，体积排量

$$\overline{V} = L[\theta r_0^2 - r_0(r_0 - h)\sin\theta]$$

$$= 10 \times \left\{1.159 \times 1.5^2 - 1.5 \times (1.5 - 0.9)\sin 66.42\right\} m = 17.835 m^3$$

设半圆柱体的密度为错误！未找到引用源。B。有

$$\rho_B\left(\frac{1}{2}\pi r_0 L\right) = \rho\overline{V}$$

由此解得木质材料的密度

$$\rho_B = \frac{2\rho\overline{V}}{\pi r_0^2 L} = \frac{2 \times 1000 \times 17.835}{\pi \times r_0^2 L} = kg/m^3 = 504.63 kg/m^3$$

2-21 解（1）沉箱的混凝土体积 $\overline{V}=\left(5\times3\times6-4.4\times2.4\times5.7\right)m^3=29.808m^3$

沉箱重量 $G=g\rho\overline{V}=\left(9.8\times2400\times29.808\right)N=701\times0^{3}$

沉箱水平截面面积 $A=5\times3m^2=15m^2$

设吃水深度为 h 取水的密度 $\rho=1000kg/m^3$。浮力 F 等于重量 G。有

$$h=\frac{F}{g\rho A}=\frac{G}{g\rho A}=\frac{701.084\times10^3}{9.8\times1000\times15}m=4.796\text{m}$$

浮心 D 距底面为 $h/2=2.385m$.设重心 C 距底面为 h'。有

$$h'\overline{V}=\left(5\times3\times6\right)\times\frac{6}{2}-\left(4.4\times2.4\times5.7\right)\times\left(\frac{6-0.3}{2}+0.3\right)=80.394$$

$$h'=\left(80.369/29.808\right)m=2.697m$$

重心 C 位于浮心之上，偏心距

$$e=h'-h/2=\left(2.697-4.769/2\right)m=0.312m$$

沉箱绕长度方向的对称轴 y 倾斜时稳定性最差。浮面面积 A=15m^2.浮面关于 y 轴的惯性矩和体积排量为

$$I_0=\frac{1}{12}\times5\times3^3m^4=11.25m^4,\overline{V}=Ah=71.535m^3$$

定倾半径 $R_0=I_0/\overline{V}=\left(11.25/71.535\right)m=0.157m$

可见，$R_0<e$，定倾中心低于重心，沉箱是不稳定的。

(2)沉箱的混凝土体积 $V=\left(5\times3\times6-4.4\times2.4\times5.6\right)m^3=30.864m^3$

沉箱的重量 $G=g\rho_c\overline{V}=9.8\times2400\times30.684N=725\times921^{3}$

沉箱水平截面面积 $A=5\times3m^2=15m^2$

设吃水深度为 h,取水的密度 ρ =1000kg/m^3.浮力 F 等于重量 G。有

$$h=\frac{F}{g\rho A}=\frac{G}{g\rho A}=\frac{725.921\times10^3}{9.8\times1000\times15}m=4.938m$$

浮心 D 距底面为 $h/2=\left(4.938/2\right)m=2.469m$ 。设重心 C 距底面为 h’。有

$$h'\overline{V}=\left(5\times3\times6\right)\times\frac{6}{2}-\left(4.4\times2.4\times5.6\right)\times\left(\frac{6-0.4}{2}+0.4\right)=80.765$$

$$h'=\left(80.765\times30.864\right)m=2.617m$$

重心 C 位于浮心之上，偏心距

$$e = h' - h/2 = (2.617 - 4.938/2)m = 0.148m$$

沉箱绕长度方向的对称轴 y 轴倾斜时稳定性最差。浮面面积 $A=15m^2$。浮面关于 y 轴的惯性矩和体积排量为

$$I_0 = \frac{1}{12} \times 5 \times 3^3 m^4 = 11.25m^4, \overline{V_B} = Ah = 60.885m$$

定倾半径

$$R_0 = I_0 / \overline{V_B} = (11.25/60.885)m = 0.152m$$

可见，R_0 >e,定倾中心高于重心，沉箱是稳定的。

第三章 流体运动学

3-1 解：质点的运动速度

$$u = \frac{4-3}{10} = \frac{1}{10}, v = \frac{4-2}{10}, w = \frac{4-1}{10} = \frac{3}{10}$$

质点的轨迹方程

$$x = x_0 + ut = 3 + \frac{t}{10}, y = y_0 + vt = 2 + \frac{t}{5}, z = z_0 + wt = 1 + \frac{3t}{10}$$

3-2 解：

$$a_z = 0$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(0.01 \times \frac{5}{2} t^{3/2}\right) = 0.01 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} t^{1/2} = 0.0375t^{1/2}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(0.01 \times \frac{5}{2} t^{3/2}\right) = 0.01 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} t^{1/2} = 0.0375t^{1/2}$$

由 $x = 1 + 0.01\sqrt{t^5}$ 和 $x_A = 10$,得

$$t = \left[\frac{x_A - 1}{0.01}\right]^{\frac{2}{5}} = \left[\frac{10-1}{0.01}\right]^{\frac{2}{5}} = 15.19$$

故

$$a_x = 0.0375 \times 15.19^{1/2} = 0146, a_y = a_x = 0.146, a_z = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{0.146^2 + 0.146^2 + 0} = 0.206$$

3-3 解：当 t=1s 时，点 A（1,2）处的流速

$$u = xt + 2y = (1 \times 1 + 2 \times 2)m/s = 5m/s$$

$$v = xt^2 - yt = (1 \times 1^2 - 2 \times 1)m/s = -1m/s$$

流速偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial t}=x=1m/s^2,\frac{\partial u}{\partial x}=t=1s^{-1},\frac{\partial u}{\partial y}=2s^{-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=t^2=1m/s^2,\frac{\partial v}{\partial x}=t^2=1s^{-1},\frac{\partial v}{\partial y}=-t=-1s^{-1}$$

点 A(1,2)处的加速度分量

$$a_x=\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\left[1+5\times 1+(-1)\times 2\right]m/s^2=3m/s^2$$

$$a_y=\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\left[1+5\times 1+(-1)\times(-1)\right]m/s^2$$

3-4 解：(1)迹线微分方程为

$$\frac{dx}{u}=dt,\frac{dy}{u}=dt$$

将 u,t 代入，得

$$dx=(1-y)dt$$
$$dy=tdt$$

利用初始条件 y(t=0)=0,积分该式，得

$$y=\frac{1}{2}t^2$$

将该式代入到式（a）,得 $dx=(1-t^2/2)dt$.利用初始条件 x(t=0)=0,积分得

$$x=t-\frac{1}{6}t^3$$

联立（c）和（d）两式消去 t,得过（0,0）点的迹线方程

$$\frac{2}{9}y^3-\frac{4}{3}y^2+2y-x^2=0$$

(2)流线微分方程为$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$.将 u,v 代入，得

$$\frac{dx}{1-y}=\frac{dy}{t}\text{或}(1-y)dy=tdx$$

将 t 视为参数，积分得

$$y-\frac{1}{2}y^2=xt+C$$

据条件 x(t=1)=0 和 y(t=1)=0,得 C=0.故流线方程为

$$y-\frac{1}{2}y^2=xt$$

3-5 答：

$$(1)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0+0+0,\text{满足}$$

$$(2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=k-k+0=0,\text{满足}$$

$$(3)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0\text{，满足}$$

$$(4)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0+0+0=0\text{，满足}$$

$$(5)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0+0+0=0\text{，满足}$$

(6)满足

$$(7)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=-\frac{k}{r^2}+\frac{k}{r^2}+0=0\text{，满足}$$

$$(8)\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=0+0+0=0\text{，满足}$$

$$(9)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=4\text{，不满足}$$

$$(10)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=4y,\text{仅在}y=0\text{处满足，其他处不满足}$$

3-6 解：

$$V=\frac{1}{\pi r_0^2}\iint_A udA=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}u_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]rdrd$$

$$=\frac{2\pi u_{\max}}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left[r-\frac{r^3}{r_0^2}\right]dr=\frac{2u_{\max}}{r_0^2}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4r_0^2}\right]_0^{r_0}=\frac{1}{2}u_{\max}$$

3-7 证：设微元体 abcd 中心的速度为 u_r ,u_θ 。单位时间内通过微元体各界面的流体体积分别为

$$ad\text{面}\left(u_r-\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{dr}{2}\right)rd\theta,bc\text{面}\left(u_r+\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{dr}{2}\right)(r+dr)d\theta$$

$$ab\text{面}\left(u_\theta-\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{2}\right)dr,cd\text{面}\left(u_\theta+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{2}\right)dr$$

根据质量守恒定律，有

$$\left(u_r-\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{dr}{2}\right)rd\theta-\left(u_r+\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{dr}{2}\right)(r+dr)d\theta+\left(u_\theta-\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{2}\right)dr-\left(u_\theta+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{d\theta}{2}\right)dr=0$$

略去高阶无穷小项（dr）^{2}和 $drd\theta$,且化简，得

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}=0$$

3-8 解：送风口流量

$$Q=0.2\times0.2\times5m^3/s=0.2m^3/s$$

断面 1-1 处的流量和断面平均流速

$$Q_1 = 3Q = 3\times 0.2m^3/s = 0.6m^3/s$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{0.6}{0.5\times 0.5}m/s$$

断面 2-2 处的流量和断面平均流速

$$Q_2 = 2Q = 2\times 0.2m^3/s = 0.4m^3/s, V_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{0.4}{0.5\times 0.5}m/s = 1.6m/s$$

断面 3-3 处的流量和断面平均流速

$$Q_3 = Q = 0.5m^3/s, V = \frac{Q_3}{A} = \frac{0.2}{0.5\times 0.5}m/s = 0.8m/s$$

3-9 解：分叉前干管的质量流量为 $Q_{m0}=\frac{\pi d_0^2}{4}v_0\rho_0$。设分叉后叉管的质量流量分别为 Q_{m1} 和 Q_{m2},则有

$$Q_{m0} = Q_{m1} + Q_{m2}, Q_{m1} = Q_{m2}$$

故

$$Q_{m1} = Q_{m2} = \frac{Q_{m0}}{2} = \frac{\pi d_0^2}{8}V_0\rho_0 = \frac{\pi d_1^2}{4}V_1\rho_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}V_2\rho$$

解得

$$V_1 = \frac{d_0^2 v_0\rho_0}{2d_1^2\rho_1} = \frac{50\times 25\times 2.62}{2\times 45\times 2.24}m/s = 18.05m/s$$

$$V_2 = \frac{d_0^2 v_0\rho_0}{2d_2^2\rho_2} = \frac{50\times 25\times 2.62}{2\times 40\times 2.3}m/s = 22.25m/s$$

3-10 解：

$$(1)\text{线变形速率}\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{角变形速率}\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(-k+k) = 0$$

$$(2)\text{线变形速率}\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{角变形速率}\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(3)线变形速率$\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

角变形速率$\varepsilon_{\mathrm{xy}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{2}(2+2)=2$

3-11 解：线变形速率

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=2xy=2\times1\times2=4,\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=-2\times1\times2=-4$$

角变形速率

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(2x-y^2+x^2+2y\right)=\frac{1}{2}\left(2\times1-2^2+1^2+2\times2\right)=\frac{3}{2}$$

涡量

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\left(2x-y^2\right)-\left(x^2+2y\right)=2\times1-2^2-1^2-2\times2=-7$$

3-12 解：

$$(1)\begin{cases}\Omega_x=\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}=0-0=0\\ \Omega_y=\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}=0-0=0,\text{无旋流}\\ \Omega_z=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=k-k=0\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\Omega_x=\Omega_y=0\\ \Omega_z=0-0=0\end{cases},\text{无旋流}$$

$$(3)\begin{cases}\Omega_x=\Omega_y=0\\ \Omega_z=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0\end{cases},\text{无旋流}$$

$$(4)\begin{cases}\Omega_x=\Omega_y=0\\ \Omega_z=0-\alpha=-\alpha\end{cases},\text{有旋流}$$

$$(5)\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0,\text{无旋流}$$

$$(6)\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0,\text{无旋流}$$

$$(7)\begin{cases}u=\dfrac{-kx}{x^2+y^2}\\ v=\dfrac{ky}{x^2+y^2}\end{cases}\text{得}\begin{cases}\Omega_x=\Omega_y=0\\ \Omega_z=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2xyk}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\dfrac{-2xyk}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0\end{cases},\text{无旋流}$$

$$(8)\begin{cases} u=\dfrac{-ky}{x^2+y^2} \\ v=\dfrac{kx}{x^2+y^2} \end{cases} 得 \begin{cases} \Omega_x=\Omega_y=0 \\ \Omega_z=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{k\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\dfrac{k\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0, 无旋流 \end{cases}$$

（9）和（10）不满足连续方程，不代表流场

3-13 解：任意半径 r 的圆周是一条封闭流线，该流线上

线速度 $u_\theta=\omega_0 r$,速度环量

$$\Gamma=2\pi r u_\theta=2\pi\omega_0 r^2$$

(2)半径 r+dr 的圆周封闭流线的速度环量为

$$\Gamma+d\Gamma=2\pi\omega_0(r+dr)^2$$

得

$$d\Gamma=(\Gamma+d\Gamma)-\Gamma=2\pi\omega_0(r+dr)^2-2\pi\omega_0 r^2=4\pi\omega_0 rdr+2\pi\omega_0 dr^2$$

忽略高阶项 $2\pi\omega_0 dr^2$，得 $d\Gamma\approx 4\pi\omega 0rdr$

$$d\Gamma\approx 4\pi\omega_0 rdr$$

（3）设涡量为Ω_z，它在半径 r 和 r+dr 两条圆周封闭流线之间的圆环域上的积分为 $d\Gamma$。因为Ω_z在圆环域上可看作均匀分布，得

$$\Omega_z dA=d\Gamma$$

将圆环域的面积 $dA=2\pi rdr$ 代入该式，得

$$\Omega_z 2\pi rdr=d\Gamma=4\pi\omega_0 rdr$$

可解出$\Omega_z=2\omega_0+\omega_0 dr/r$。忽略无穷小量$\omega_0 dr/r$，最后的涡量

$$\Omega_z=2\omega_0$$

3-14 解：由 u_r 和 $u_\theta=Cr$,得

$$u=-Cy, v=Cx, \frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial u}{\partial y}=-C, \frac{\partial v}{\partial x}=C, \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

依据式（3-5a）和（3-5b）,有

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -y.0 + Cx(-C) = -C_2 x$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -Cy.C + Cx.0 = -C^2 y$$

可见，$a_r=-C^2(x^2+y^2)^{1/2}=-u^2_\theta/r, a_\theta=0$。显然，$a_r$ 代表向心加速度。

（2）由 $u_r=0$ 和 $u_\theta=C/r$,得

$$u = -\frac{Cy}{r^2}, v = \frac{Cx}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2Cxy}{r^4}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C(y^2 - x^2)}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{C(x^2 - y^2)}{r^4}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2Cxy}{r^4}$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Cx}{r^2}\frac{2Cxy}{r^4} + \frac{Cx}{r^2}\frac{C(y^2 - x^2)}{r^4} = -\frac{C^2 x}{r^4}$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{Cy}{r^2}\frac{C(x^2 - y^2)}{r^4} + \frac{Cx}{r^2}\frac{2Cxy}{r^4} = \frac{C^2 y}{r^4}$$

可见，$a_r=-C^2(x^2+y^2)^{1/2}=-u_\theta^2/r, a_\theta=0$。显然，$a_r$ 代表向心加速度。

3-15 解：当矩形 abcd 绕过 O 点的 z 向轴逆时针旋转$\pi/4$时，在亥姆霍兹分解式（3-36）中，只有转动，没有平移，也没有变形。故有

$$u_d = u - \omega_z dy, v_d = v + \omega_z dx$$

其中，称ω_z是 z 向角速率。据题意，$\omega_z=\pi/4$rad/s.

（2）因为矩形 abdc 的各边边长都保持不变，故没有线变性；ab 边和 ac 边绕过 O 点的 Z 轴转动，表明没有平移运动；对角线倾角不变，表明没有旋转运动。根据亥姆霍兹分解式（3-36），有

$$u_d = u + \varepsilon_{xy} dy, v_d = v + \varepsilon_{yx} dx$$

其中，角变形速率

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\pi}{8} rad/s$$

3-16 解：（1）由已知流速 $u=\pi y$ 和 $v=0$，得$\frac{\partial v}{\partial x}=0, \frac{\partial u}{\partial y}=\pi$。依据式(3-33),角变形速率

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

依据式（3-32），得角速率

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0-\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

（2）t=0 时刻的矩形，在时段 dt 内对角线顺时针转动的角度为

$$\theta_1 = -\omega_z dt = \frac{\pi}{2}dt$$

在 t=0.125 和 t=0.25 时刻，转角为$\theta_1=\pi/16$和$\theta_1=\pi/8$.因为$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=0$，故没有线变形。矩形各边相对于对角线所转动的角度为

$$\theta_2 = \varepsilon_{xy}dt = \frac{\pi}{2}dt$$

在 t=0.125 和 t=0.25 时刻，$\theta_2=\varepsilon_{xy}\,dt=\pi/16$和$\theta=\pi/8$。因为对角线顺时针转动了$\pi/16$，$\pi/8$，故矩形沿 y 向的两条边得顺时针角为$\pi/8$，$\pi/4$，而与 x 轴平行的两条边转角为 0.

依据 u=πy 知，当$\Delta y=1$时流速 u 之差值为π，在 dt=0.125 和 dt=0.25 时段，位移差值为$\pi/8$，$\pi/4$.这验证了与 y 轴平行的两条边的顺时针转角。

第四章

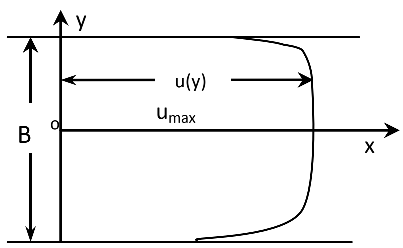
4-1 社固定平行平板间液体的断面流速分布为 $\dfrac{u}{u_{\max}} = \left(\dfrac{B/2-y}{B/2}\right)^{1/7}, y \geq 0$ 总流的动能修正系数为何值？

解 将下面两式

$$V = \frac{1}{A}\int_A u dA = \frac{1}{B}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} u_{max}\left[\frac{\frac{B}{2}-y}{\frac{B}{2}}\right]^{\frac{1}{7}} dy = \frac{7}{8}u_{max}$$

$$\int_A u^3 dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{-\frac{B}{2}} U^3_{\max}\left[\frac{\frac{B}{2}-y}{\frac{B}{2}}\right]^{\frac{3}{7}} dy = Bu^3_{\max}$$

代入到动能修正系数的算式



$$\alpha = \frac{1}{AV^3}\int_{\Delta} u^3 dA$$

得 $$A = \frac{\left(\frac{7}{10}\right)Bu_{max}^3}{B\left[\left(\frac{7}{8}\right)u_{max}\right]^3} = 1.045$$

4-2 如图示一股流自狭长的缝中水平射出，其厚度 $\delta_0 = 0.03m$，平均流速 $V_0 = 8m/s$，假设此射流受中立作用而向下弯曲，但其水平分速保持不变。试求（1）在倾斜角 $\theta = 45^0$ 处的平均流速 V；（2）该处的水股厚度 δ。

解 ⑴ 在 θ = 45 ° 处，水平分速为 V_0，故射流平均流速为

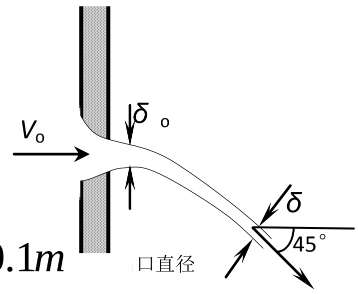
$$V = \frac{V_o}{\cos 45°} = \frac{8}{\cos 45°}\ \mathrm{m/s} = 11.31\ \mathrm{m/s}$$

⑵由连续性条件，在 $\vartheta = 45^o$ 处的单宽流量与喷口处相等，

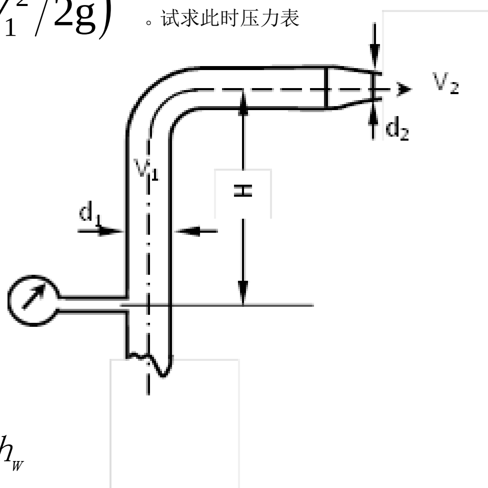
即 $V\delta = V_o\delta_o$

故

$$\delta = \frac{V_o}{V}\delta_o = \frac{8}{11.31}\times 0.33m = 0.021m$$



4-3 如图所示管路，出口接一管嘴，水流射入大气的速度 $V_2 = 20m/s$，管径 $d_1 = 0.1m$ 口直径 $d_2 = 0.05\mathrm{m}$，压力表断面至出口断面高差 H=5m，两断面间的水头损失为 $0.5\left(V_1^2/2\mathrm{g}\right)$。试求此时压力表的读数。



解 由总流连续性条件 $\frac{\pi}{4}d_1^2V_2^2 = \frac{\pi}{4}d_2^2V_2^2$，得

$$V_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 V_2 = \left(\frac{0.05}{0.1}\right)^2 \times 20\mathrm{m/s} = 5\mathrm{m/s}$$

根据总流伯诺里方程

$$\frac{p_1}{g\rho} + z_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{g\rho} + z_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_w$$

取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$，已知 $z_1 = z_2 = H\ h_w = 0.5\frac{\upsilon_1^2}{2g}$，$p_2 = 0$，得

$$\frac{p_1}{g\rho} = H + \frac{V_2^2}{2g} - 0.5\frac{V_1^2}{2g} = \left(5 + \frac{20^2}{2\times 9.8} - 0.5\times\frac{5^2}{0\times 9.8}\right)\mathrm{mH_2O}$$

$$= 24.77mH_2O = 2.48at$$

即压力表读数为 2048 个大气压。

4-4 水轮机的圆锥形尾水管如图示。一直 A-A 断面的直径 $d_A = 0.6m$ ，流速 $V_A = 6\,m/s$，B-B 断面的直接 $d_B = 0.9m$ ，由 A 到 B 水头损失 $h_w = 0.15\left(V_A^2/2g\right)$。求（1）当 z=5m 时 A-A 断面处的真空度（2）当 A-A 断面处的允许真空度为 5m 水柱高度时，A-A 断面的最高位置 $Z_{\max}$

解：⑴ 由水流连续性知

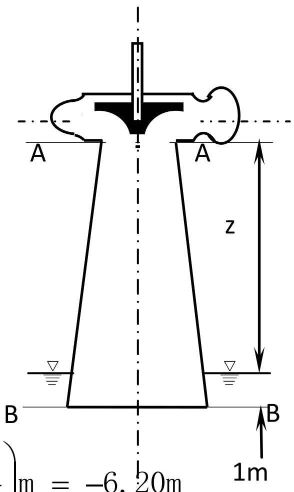
$$V_B = \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2 V_A = \left(\frac{0.6}{0.9}\right)^2 \times 6m/s = 2.66m/s$$

取水面为基准面, $Z_B + \dfrac{p_B}{g\rho} = 0$，且取 $\alpha_B \approx 1.0$，得断面 B-B 的总能头

$$H_{0B} = Z_B + \frac{p_B}{g\rho} + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} = \left(0 + \frac{2.667^2}{2\times 9.8}\right)M = 0.363$$

断面 A-A 与 B-B 之间能量方程可写成

$$Z + \frac{p_A}{g\rho} + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} == H_{0B} + h_w$$



其中，由 A 到 B 水头损失

$$h_w = 0.15\frac{V_a^2}{2g} = 0.15 \times \frac{6^2}{2\times 9.8} = 0.267m/s$$

当 z=5m 时（取 $\alpha_A \approx 1.0$），有

$$\frac{p_A}{g\rho} = H_{0B} + h_w - z - \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} = \left(0.363 + 0.276 - 5 - \frac{6^2}{2\times 9.8}\right)m = -6.20m$$

故 A-A 断面的真空度为 $h_{vA} = -\dfrac{p_A}{g\rho} = 6.20m$

⑵将 $\dfrac{p_A}{g\rho} = -5m$ 和 $z=z_{\max}$ 代入式（a），得 A-A 断面的最高位置

$$z_{\max} = H_{0B} + h_w - \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} - \frac{p_A}{g\rho} = \left[0.363 + 0.276 - \frac{6^2}{2\times 9.8}\right]m = 3.80$$

4-5 水箱中的水从一扩散短管流到大气中，如图示。若直径 $d_1 = 100mm$ 该处绝对压强 $p_{abs1} = 0.5at$,而直径

$d_2 = 150mm$ 求作用水头 H (水头损失可以忽略不计)

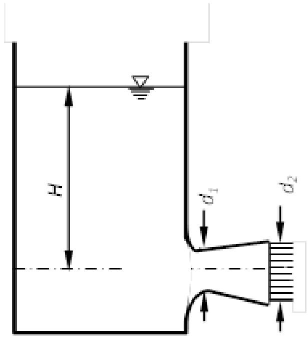
解： 基准面 0-0，断面 1-1、2-2、3-3 如图示。在 1-1 与 2-2 断面之间用伯诺里方程（取**错误！未找到引用源。**）

$$z_1 = \frac{p_{abs1}}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_{abs2}}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g}$$

已知 $z_1 = z_2, \frac{p_{abs1}}{g\rho} = 5m, \frac{p_{abs2}}{g\rho} = 10m$

由水流连续性，得

$$V_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 V^2 = \left(\frac{150}{100}\right)^2 V_2 = 2.25V_2$$



代入到伯诺里方程，

$$5 + \frac{(2.25V_2)^2}{2g} = 10 + \frac{V_2^2}{2g} \text{或} 4.063\frac{V_2^2}{2g} = 5$$

解出流速水头

$$\frac{V_2^2}{2g} = 1.23m$$

列出断面 3-3、2-2 之间的伯诺里方程

$$\frac{p_a}{2g} + H = z_2 + \frac{p_{abs2}}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g}$$

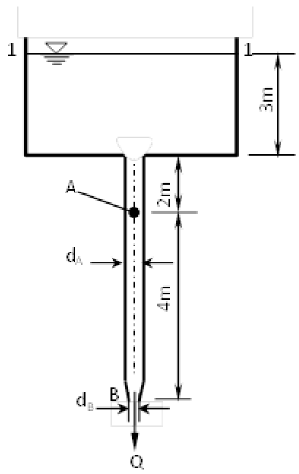
将 $p_{abs2} = p_a \text{和} z_2 = 0$ 代入得出作用水头

$$H = \frac{V_2^2}{2g} = 1.23m$$

4-6 一大水箱中的水通过一铅垂管与收缩管嘴流入大气中，如图。直管直径 d_A =100mm，管嘴出口直径 d_B =500mm，若不计水头损失，求直管中 A 点的相对压强 p_A。

解： 断面 1-1 位于水面上，断面 A 和断面 B 分别通过 A、B 点。列出断面 1-1 与 B 之间的伯诺里方程

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{g\rho} + + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g}$$



利用已知条件

$$Z_1 - Z_B = (4 + 2 + 3)m = 9m$$

$$p_1 = 0, p_B = 0, V_1 = 0$$

且取 $\alpha_1 \approx \alpha_B \approx 1.0$，得断面 B 的流速水头

$$\frac{V_B^2}{2g} = z_1 - z_B = 9m$$

由连续性，算出断面 A 的流速和水头

$$V_A = \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2 V_B = \left(\frac{50}{100}\right)^2 \times V_B = \frac{V_B}{4}, \frac{V_A^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{V_B}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\frac{V_B^2}{2g} = \frac{9}{16} m$$

写断面 1-1 与 A 之间的伯诺里方程

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{p_A}{g\rho} + z_A + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g}$$

将下列数据代入该式

$$z_1 - z_A = 2 + 3 = 5m, p_1 = 0, v_a = 0$$

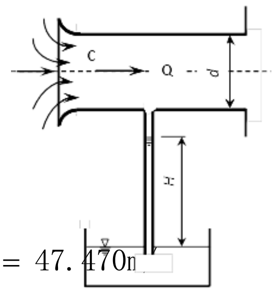
且取 $\alpha_1 \approx \alpha_A \approx 1.0$，得

$$\frac{p_A}{g\rho} = z_1 - z_A - \frac{V_A^2}{2g} = \left(5 - \frac{9}{16}\right)\mathrm{m} = 4.44\mathrm{m}\ ,\ \mathrm{p_A 1.11 H_2O}$$

4-7 离心式通风机用集流器 C 从大气中吸入空气，如图示。在直径 d=200mm 的圆截面管道部分接一根玻璃管，管的下端插入水槽中。若玻璃管中的的水面升高 H=150mm，求每秒钟所吸取的空气量 Q。空气的密度 ρ_a =1.29kg/ m^3 。

解： 设圆截面管道的断面平均流速 为 V，压强为 p.由于距离集流器 C 较远处大气流速 为零以，若不计损失，假定集流器中空气密度与外部大气的密度相同，管道断面与远处大气之间的不可压气体的能量方程可写成

$$\frac{p_\alpha}{g\rho_\alpha} = \frac{p}{g\rho_\alpha} + \frac{\alpha V^2}{2g}$$



玻璃管液面压强为 p，若ρ 为水的密度，有静压强关系

$$p_\alpha - p = \rho g H$$

故从能量方程中可解得

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho_\alpha}(p_\alpha - p)} = \sqrt{2g\frac{\rho}{\rho_\alpha}H} = \sqrt{2 \times 9.8 \times \frac{1000}{1.29} \times 150 \times 10^3}\mathrm{m/s} = 47.470\mathrm{m}$$

由此得

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}V = 47.740 \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4}\mathrm{m^3/s} = 1.50\mathrm{m^3/s}$$

4-8 水平管路的过水流量 Q=2.5L/s，如图示。管路收缩段由直径 d_1 =50mm 收缩成 d_2 =25mm。相对压强 p_1 =0.1at，两段面间

水头损失可忽略不计。问收缩断面上的水管能将容器内的水吸出多大的高度 h？

解：在 1 与 2 两断面之间应用伯诺里方程

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

取 $\alpha_1 \approx \alpha_B \approx 1.0$，已 $z_1 = z_2$，$p_1 = 0.1\text{at}$ 知可解出

$$V_1 = \frac{Q}{\pi d_1^2 / 4} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{\pi \times (50 \times 10^{-3})^2 / 4} \text{m/s} = 1.273\text{m/s}$$

$$V_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{50}{25}\right)^2 \times V_1 = 4 \times 1.273\text{m/s} = 2.093\text{m/s}$$

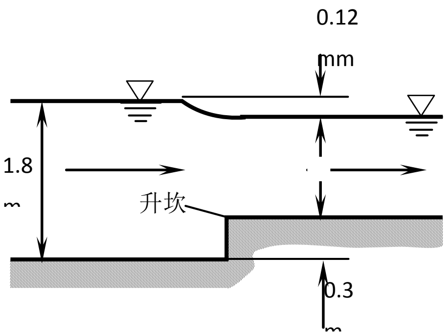
故

$$\frac{p_2}{g\rho} = \frac{p_1}{g\rho}_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} = \left(0.1 \times 10 + \frac{1.273^2}{2 \times 9.8} - \frac{5.093^2}{2 \times 9.8}\right)\text{m} = -0.241\text{m}$$

依据吸水管的静压强关 $p_\alpha - p_2 = g\rho h$ 系，得出高度

$$h = \frac{p_\alpha}{g\rho} - \frac{p_2}{g\rho} = 0 - (-0.241) = 0.24(\text{m})$$

4-9 图示矩形断面渠道，宽度 B=2.7m。河床某处有一高度 0.3m 的铅直升坎，升坎上、下游段均为平底。若升坎前的水深为 1.8m，过升坎后水面降低 0.12m，水头损失 h_w 为尾渠（即图中出口段）流速水头的一半，试求渠道所通过的流量 Q。



解： 取断面 1-1 和 2-2 如图。依据连续性方程

$V_1 A_1 = V_2 A_2$，得

$$1.0BV_1 = (1.8 - 0.3 - 0.12)BV_2$$

或

$$1.8V_1 = 1.38V_2$$

写出两断面之间的能量方程

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + + \frac{V_2^2}{2g} + 0.5\frac{V_2^2}{2g}$$

若基准面 o-o 取在图示升坎前来流的水面上，有

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} = 0, z_2 + \frac{p_2}{g\rho} = -0.12m$$

代入到能量方程，得

$$\frac{V_1^2}{2g} = -0.12 + 1.5\frac{V_2^2}{2g}$$

联立求解（a）、（b）两方程，得

$$V_1 = 1.231 \text{ m/s}, \ V_2 = 1.606 \text{m/s}$$

故渠道能过的流量

$$Q = A_1 V_1 = 1.8 \times 2.7 \times 1.231 = 5.98 \text{m}^3/\text{s}$$

4-10 图示抽水机功率为 $P = 14.7KW$，效率为 $\eta = 75\%$，将密度 $\rho_0 = 900\,kg/m^3$ 的油从油库送入密闭油箱。已知管道直径 $d = 150mm$，油的流量 $Q = 0.14\,m^3/s$，抽水机进口 B 处真空表指示为-3m 水柱高，假定自抽水机至油箱的水头损失为 $h = 2.3m$ 油柱高，问此时油箱内 A 点的压强为多少？

解： 选取面 A 位于油液面上，断面 B 位于抽水机进口。写出两面之间有能量输入的能量方程

$$z_B + \frac{p_B}{g\rho_0} + \frac{V_B^2}{2g} + H_m = z_A + \frac{p_A}{g\rho_0} + + \frac{V_A^2}{2g} + h_{wB-A}$$

其中，**错误！未找到引用源。**为单位重量油体通过抽水机后增加的能理。由水泵轴功率计算公式

$$P = \frac{g\rho Q H_m}{\eta}$$

得

$$H_m = \frac{\eta P}{g\rho Q} = \frac{0.75 \times 14.7 \times 10^3}{9.8 \times 900 \times 0.14} = 8.929\text{m 油柱}$$

由连续性，得

$$V_B = \frac{Q}{\pi d^2/4} = \frac{0.14}{\pi \times 0.15^2/4}\text{m/s} = 7.922\text{m/s}$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = \frac{7.922^2}{2 \times 9.8}\text{m 油柱} = 3.202\text{m 油柱}$$

由能量方程可解出

$$\frac{p_A}{g\rho_0} = (z_B + \frac{p_B}{g\rho_0} + \frac{V_B^2}{2g} + H_m - (z_A + \frac{V_A^2}{2g} + h_{wB-A})$$

$$= \left[\left(0 + \frac{-3}{0.9}3.02 + 8.929\right) - (5 + 0 + 2.3)\right]\text{m油柱} = 1.498\text{ m油柱}$$

油箱 A 压强

$$p_A = 1.498 \times 9.8 \times 900\text{Pa} = 13.21 \times 10^3\ \text{Pa}$$

4-11 如图所示虹吸管由河道 A 向渠道 B 引水，已知管径 $d = 100mm$，虹吸管断面中心点 2 高出河道水位 $z = 2m$，点 1 至点 2 的水头损失为 $h_{w1-2} = 10\left(V^2/2g\right)$，点 2 至点 3 水头损失 $h_{w2-3} = 2\left(V^2/2g\right)$，V 表示管道的断面平均流速，若点 2 的真空度限制在 $h_{v=}7m$ 以内，试问（1）虹吸管的最大流量有无限制？如有，应为多大？（2）出水口到河道水面高差 h 有无限制？如有，应为多大？

解：⑴ 取面 1 位于河道 A 的自同面上，断面 2 过点 2.写出两断面间能量方程

$$z_1 = z_2 + \frac{p^2}{g\rho_0} + \frac{V^2}{2g} + 10\frac{V^2}{2g}$$

将 $z_1 - z_2 = z = 2m$ 代入，得

$$\frac{p_2}{g\rho} = -2 - 11\frac{V^2}{2g}$$

当 $h_\upsilon - \frac{p_2}{g\rho} \le 7m$时，$\frac{p_2}{g\rho} \ge -7m$。因此有

$$-2 - 11\frac{p_2}{g\rho} \ge -7(\text{m})$$

求解后，得

$$V \le \sqrt{\frac{5}{11} \times 2 \times 9.8} = 2.985\text{m/s}$$

$$Q = V\frac{\pi}{4}d^2 \le 2.985 \times \frac{\pi}{4} \times 0.1^2\text{m}^3/\text{s} = 0.0234\text{m}^3/\text{s}$$

即应当将最大流量限制在 23.4 L/s 以内

⑵ 断面 3 位于虹吸管的出口。写出面 1 与 3 之间的能量方程

$$z_1 = z_3 + \frac{V^2}{2g} + (10 + 2)\frac{V^2}{2g}, z_1 - z_3 = h$$

解得

$$h = 13\frac{V}{2g} \le 13 \times \frac{2.98^2}{2 \times 9.8} = 5.98\text{m}$$

故应限制 h 不应大于 5.89m

4-12 图示分流叉管，断面 1-1 处得过流断面积

$A_1 = 0.1m^2$,高程 $z_1 = 75m$ 流速$V_1 = 3m/s$,压强$p_1 = 98kPa$;
断面2-2处$A_2 = 0.05m^2, z_2 = 72m$；断面3-3处$A_3 = 0.08m^2, z_3 = 60m$
压强$p_3 = 196kPa$，；断面1-1至2-2和3-3的水头损失分别为$h_{w1-2} = 3m$和
$h_{w1\text{-}3} = 5m$.试求（1）断面2-2和3-3处的流速V_2和V_3;(2)断面2-2处的压强p_2

解： 取 1-1 和 2-2 断面，有

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

代入各项数据，得

$$75 + \frac{98 \times 10^3}{9800} + \frac{3^2}{2 \times 9.8} = 72 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + 3$$

由此解出

$$\frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g} = \left(75 + \frac{98 \times 10^3}{9800} + \frac{3^2}{2 \times 9.8} - 72 - 3\right)\text{m} = 10.459\text{m}$$

(1)取 1-1 和 3-3 断面，有

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{g\rho} + \frac{V_3^2}{2g} + h_{w1-3}$$

代入各项数据，得

$$75 + \frac{98 \times 10^3}{9800} + \frac{3^2}{2 \times 9.8} = 60 + \frac{196 \times 10^3}{9800} + \frac{V_3^2}{2g} + 5$$

解之得 V_3＝3m/s。由$V_1 A_1 = V_2 A_2 + V_3 A_3$，有

$$3 \times 0.1 = 0.05V_2 + 0.08 \times 3$$

解得

$$V_2 = 1.2 \text{ m/s}$$

(1) 将其代入到式（a），得

$$\frac{p_2}{2g} = \left(10.459 - \frac{1.2^2}{2g}\right)\text{m} = 10.39\text{m}$$

故

$$P_2 = 9800 \times 10.39\text{Pa} = 1.018 \times 10^5 \text{ Pa}$$

4-13 定性绘制图示管道的总水头线和测管水头线。

答 总水头线 H_0 和测管水头线 H_p 如图示。

4-14 试证明均匀流的任意流束在两断面之间的水头损失等于两断面的测管水头差。

证 在均匀流中断央 1-1 和 2-2 之间取任意流束，用 z′、p′、V′ 表示流束断面的高程、压强和流速，h'_w 表示两断面之间流束的能量损失。写出该流束的能量方程

$$z'_1 + \frac{p'_1}{g\rho} + \frac{\alpha'_1 V'^2_1}{2g} = z'_2 + \frac{p'_2}{g\rho} + \frac{\alpha'_2 V'^2_2}{2g} + h'_w$$

设 z、p 表示总流断面的高程、压强。依据均匀流任一断面上测管水头等值，有

$$z'_1 + \frac{p'_1}{g\rho} = z_1 + \frac{p_1}{g\rho},\ z'_2 + \frac{p'_2}{g\rho} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho}$$

依据均匀流的任意两面都满足

$$\frac{\alpha'_1 V'^2_1}{2g} = \frac{\alpha'_2 V'^2_2}{2g}$$

得

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + h'w$$

或

$$h'w = \left(z_1 + \frac{p_1}{g\rho}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{g\rho}\right) = H_{p1} - H_{p2} = \Delta H_{p1-2}$$

4-15 当海拔高程 z 的变幅较大时，大气可近似成理想气体，状态方程为 $p_a(z) = \rho_a RT$，其中 R 为气体常数。试推求 $\rho_a(z)$和$p_a(z)$ 随 z 变化的函数关系。

解：设 p_{ao}、T_0 分别表示 z=0 处的大气压强和温度，**错误！未找到引用源。**分别表示高程 z 处的大气压强和温度。将状态方程该写成 $\rho_\alpha(z) = p_\alpha(z)/RT(z)$，利用温度随 z 变化的线性关系 $T(z) = T_0 - \beta z$，得

$$\rho_\alpha(z) = p_\alpha(z)/RT(T_0 - \beta z)$$

大气的压强足静压强分布规律，可依据式（2-11）写出

$$dp_\alpha(z) = -gp_\alpha(z)\,dz$$

将式（a）代入，得

$$dp_\alpha(z) = -gp_\alpha(z)/RT(T_0 - \beta z)\,dz$$

或改写成

$$\frac{dp_\alpha}{p_\alpha} = -\frac{g}{R(T_0 - \beta z)}dz$$

利用边界条件 $p_\alpha(z=0)=p_{\alpha 0}$ 积分上式，得

$$\ln\frac{p_\alpha}{p_{\alpha 0}} = \frac{g}{\beta R}\ln\left(1-\frac{\beta z}{T_0}\right)$$

故 $p_\alpha(z)$ 随 z 变化的函数关系为

$$p_\alpha(z) = p_{\alpha 0}\left(1-\frac{\beta z}{T_0}\right)^{g/\beta R}$$

将该式代入式（a），令 $\rho_{\alpha 0}=\rho_\alpha(0)=p_{\alpha 0}/RT_0$ 表示 z=0 处大气密度，得函数 $\rho_\alpha(z)$，即

$$\rho_\alpha(z) = \frac{p_{\alpha 0}}{R(T_0 - \beta z)}\left(1-\frac{\beta z}{T_0}\right)^{g/\beta R} = \rho_{\alpha 0}\left(1-\frac{\beta z}{T_0}\right)^{g/\beta R}$$

4-16　锅炉排烟风道如图所示。已知烟气密度为 $\rho_s = 0.8kg/m^3$，空气密度为 $\rho_a = 1.2\,kg/m^3$，烟囱高 $H = 30m$，烟囱出口烟气的流速为 $10\,m/s$（1）若自锅炉至烟囱出口的压强损失为 $p_w = 200Pa$，求风机的全压。（2）若不安装风机，而是完全依靠烟囱的抽吸作用排烟，压强损失应减小到多大？

解　（1）烟气密度与空气密度的差别较大，应考虑大气对烟气的浮力作用。取锅炉进风口断面 1-1，烟囱出口断面 2-2.依据式（4-42），取 $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1.0$，有

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_s V_1^2 + p_q = p_2 + \frac{1}{2}\rho_s V_2^2 + p_w + g(\rho_s - \rho_a)H$$

其中，风机全压 p_q 是输入的能量。断面 1-1 和 2-2 的相对压强均为当地大气压强，即 $p_1 = p_2 = 0$。忽略断面 1-1 的动压 $\rho_s V_1^2/2$，可解出风机全压

$$p_q = \frac{1}{2}\rho_s V_2^2 + p_w - g(\rho_a - \rho_s)H$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 0.8 \times 10^2 + 200 + 9.8 \times (0.8 - 1.2) \times 30\right)Pa = 122.4Pa$$

（2）当不安装风机时 $P_q = 0$，有

$$0 = \frac{1}{2}\rho_s V_2^2 + p_w - g(\rho_a - \rho_s)H$$

由此得

$$p_w = g(\rho_a - \rho_s)H - \frac{1}{2}\rho_s V_2^2$$

$$= \left[9.8 \times (1.2 - 0.8) \times 30 - \frac{1}{2} \times 0.8 \times 10^2\right]Pa = 77.6Pa$$

这表明，压强损失应减小到 77.6Pa 以下

4-17 管道泄水针阀全开，位置如图所示。已知管道直径 $d_1 = 350mm$，出口直径 $d_2 = 150mm$，流速 $V_2 = 30\ m/s$，测得针阀拉杆受力 F=490N，若不计能量损失，试求连接管道出口段的螺栓所受到的水平作用力。

解 管道流量

$$Q = \frac{\pi}{4} d_2^2 V_2 = \frac{\pi}{4} 0.15^2 \times 30\ m^3/s = 0.530\ m^3/s$$

管道内断面平均流速为

$$V_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 V_2 = \left(\frac{150}{350}\right)^2 \times 30\ m/s = 5.510\ m/s$$

根据能量方程 $\frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$，得

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{1}{2} \times 1000 \times \left(30^2 - 5.51^2\right)Pa = 4.35 \times 10^5 Pa$$

设螺栓作用力为 R。出口段水体的动量方程为

$$p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 - F + R = \rho Q(V_2 - V_1)$$

$$R = \rho Q(V_2 - V_1) - p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 + F$$

$$= \left[1000 \times 0.53 \times (30 - 5.51) - 4.35 \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 0.35^2 + 490\right]\text{N} = -28.38 \times 10^3\text{N}$$

R 为负表示作用力向左，即拉力。

4-18 嵌入支座内的一段输水管，其直径由$d_1 = 1.5m$,变化到$d_2 = 1m$，如图示。当支座前的压强$p_1 = 4at$（相对压强），流量为$Q = 1.8\ m^3/s$时，试确定渐变段支座所受的轴向力 R（不计水头损失）。

解 取图示 1-1 和 2-2 断面，由能量方程

$$\frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g}$$

其中，流速

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 1.8}{\pi \times 1.5^2}\ m/s = 1.019\ m/s\ ,V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 1.8}{\pi \times 1^2}\ m/s = 2.292\ m/s$$

解得

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) = \left[4 \times 9.8 \times 10^4 + \frac{1000}{2} \times \left(1.019^2 - 2.292^2\right)\right]Pa$$

$$= 3.899 \times 10^5 Pa$$

设 R_1 为管道渐变段对水流的作用力，方向向右为正，则断面 1-1 和 2-2 之间的水体动量方程为

$$p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 - p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 + R_1 = \rho Q(V_2 - V_1)$$

解得

$$R_1 = -p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 + p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 + \rho Q(V_2 - V_1)$$

$$= -4 \times 9.8 \times 10^4 \times \frac{\pi}{4} \times 1.5^2 + 3.899 \times 10^5 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 + 1000 \times (2.292 - 1.019)$$

$$= (-6.927 + 3.062 + 0.0127) \times 10^5$$

$$= -3.852 \times 10^5 (\mathrm{N})$$

$R_1 < 0$ 表示方向向左，即支座作用水流的力方向向左。

$$R = -R_1 = 3.85 \times 10^5 (\mathrm{N})$$

$R > 0$ 表示支座所受轴向力的方向向右。

4-19 斜冲击射流的水平面俯视图如图所示，水自喷嘴射向一与其交角成 60^0 的光滑平板上（不计摩擦阻力）。若喷嘴出口直径 $\mathrm{d} = 25\mathrm{mm}$，喷射流量 $Q = 33.4\ L/s$，试求射流沿平板向两侧的分流流量 Q_1 和 Q_2 以及射流对平板的作用力 F。假定水头损失可忽略不计，喷嘴轴线沿水平方向。

解喷嘴出口断面 0-0 的平均流速

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{33.4 \times 10^{-3} \times 4}{\pi \times 0.025^2} m/s = 68.042\ m/s$$

由能量方程和水头损失不计的条件知，单面 1-1 和 2-2-处的流速 $V_1 = V_2 = V = 68.042\ m/s$

由连续性有 $Q = Q_1 + Q_2$

为了方便求解，建立图示坐标系，x 轴沿平板法向，y 轴沿平板切向。控制体取为喷嘴出口 0-0 断面、断面 1-1 和 2-2 之间的水体。因不计摩擦力，平板作用力的 y 向分量为零，故依据方程（4-48b）可写出总流的 y 向动量方程

$$\rho\left[(Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2) - QV \cos 60^0\right] = 0$$

其中，流出动量 $\rho(Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2)$ 中因为 V_2 沿 y 反向，前面加负号。联解（a）和（b）两式，得

$$Q_1 = \frac{V \cos 60^0 + V_2}{V_1 + V_2} Q = \frac{\cos 60^0 + 1}{2} Q = \frac{3}{4} Q = \frac{3}{4} \times 33.4 = 25.05 L/s$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = 33.4 - 25.05 = 8.35 L/s$$

在 X 向上，控制体的流入动量为 $\rho QV \sin 60^0$，流出动量为零。设平板对射流的作用力为 F'，假定作用力矢量当沿 x

正向时取正。依据方程（4-48a)，写出总流的 x 向动量方程

$$0-\rho QV\sin 60^0 = F' \quad \text{由此得}$$

$$F' = -\rho QV\sin 60^0$$

$$= -1000\times 33.4\times 10^{-3}\times 68.042\times \sin 60^0\,\mathrm{N} = -1968.1\mathrm{N}$$

负值表示该作用力沿 x 轴反向。射流对平板的作用力

$$F = -F' = 1968.1\mathrm{N}$$

它的作用方向沿 x 正向。

4-20 一平板垂直于自由水射流的轴线放置（如图示)，截去射流流量的一部分 Q_1，并引起剩余部分 Q_2 偏转一角度 θ。已知射流流量 $Q = 36\,L/s$，射流流速 $V = 30m/s$，且 $Q_1 = 12L/s$，试求射流对平板的作用力 R 以及射流偏转角 θ（不计摩擦力和重力）

解　建立图示坐标系。控制体取为断面 0-0、断面 1-1 和 2-2 之间的水体。作用力矢量当沿坐标轴正向时取正值。依据方程（4-48)，写出总流的 x 向、y 向动量方程为

$$\rho\left(Q_2V_2\cos\theta - QV\right) = R$$
$$\rho\left(Q_2V_2\sin\theta - Q_1V_1\right) = 0$$

其中，R 表示平板对射流的作用力。因为忽略摩擦，故平板对射流作用力的 y 向分量为零。由水流连续性，有

$$Q_2 = Q - Q_1 = (26-12)L/s = 24L/s$$

由能量方程有 $V_1 = V_2 = V = 30m/s$　由式（b）中可解出射流偏转角

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\rho Q_1V_1}{\rho Q_2V_2}\right) = \sin^{-1}\frac{Q_1}{Q_2} = \sin^{-1}\left(\frac{12}{24}\right) = 30^0$$

由式（a)，得

$$R = \rho\left(Q_2V_2\cos\theta - QV\right)$$
$$= 1000\times\left(0.024\times 30\times\cos 30^0 - 0.036\times 30\right)\mathrm{N}$$
$$= -456.5\mathrm{N}$$

负号表明，平板对射流的作用力方向向左（沿 x 反向)。射流对平板的作用力为-R，其大小为 456.5N，方向向右（沿 x 正向)。

4-21 水流通过图示圆截面收缩弯管。若已知弯管直径 $d_A = 250mm$，$d_B = 200mm$，流量 $Q = 0.12m^3/s$。断面 A-A 的相对压强 $P_A = 1.8at$，管道中心线均在同一水平面上。求固定此弯管所需的力 F_X与F_y（可不计水头损失)。

解　先计算断面 A、B 的面积和流速：

$$A_A = \frac{\pi}{4} d_A^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.25^2 m^2 = 0.0491 m^2$$

$$A_B = \frac{\pi}{4} d_B^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.2^2 m^2 = 0.0314 m^2$$

$$V_A = \frac{Q}{A_a} = \frac{0.12}{0.0491} m/s = 2.444 m/s$$

$$V_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.12}{0.0314} m/s = 3.822 m/s$$

由能量方程$\frac{p_A}{g\rho} + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{g\rho} + \frac{V_B^2}{2g}$ ， 得

$$p_B = p_A + \frac{\rho}{2}\left(V_A^2 - V_B^2\right)$$
$$= \left[1.8 \times 98000 + \frac{1000}{2} \times \left(2.444^2 - 3.822^2\right)\right] Pa = 1.721 \times 10^5 Pa$$

作用力矢量当沿坐标轴 正向时取正值。依据方程（4-48），写出总流的 x 向动量方程

$$\rho Q\left(V_B \cos 60^0 - V_A\right) = F_x + p_A A_A - p_B A_B \cos 60^0$$

因为断面 B 的压力沿 x 轴反向，故前面加负号。解该式，得

$$F_x = -p_A A_A + p_B A_B \cos 60^0 = \rho Q\left(V_B \cos 60^0 - V_A\right)$$
$$= \{-1.8 \times 98000 \times 0.0491 + 1.721 \times 10^5 \times 0.0314 \times \cos 60^0$$
$$+ 1000 \times 0.12 \times \left(3.822 \cos 60^0 - 2.444\right) \} N$$
$$= \left(-8661.24 + 2701.97 - 63.96\right) N = -6023.23 N$$

负号表示管壁对水流的作用力实际方向沿 x 反向。故，固定弯管所需要的力大小为 6023.23N，方向向左。

类似地，总流的 y 向动量方程可写成

$$\rho Q\left(-V_B \sin 60^0 - 0\right) = F_y + p_B A_B \sin 60^0$$

其中，因为断面 B 的压力沿 y 反向，故前面取负号。解得

$$F_y = -\rho Q V_B \sin 60^0 - p_B A_B \sin 60^0$$
$$= -\left(1000 \times 0.12 \times 3.822 \times \sin 60^0 - 1.721 \times 10^5 \times 0.0314 \times \sin 60^0\right) N$$
$$= \left(-397.19 - 4779.95\right) N = -5077.14 N$$

$F_y < 0$表示该分量的实际方向沿 y 反向。故，固定弯管的力大小为 4382.2N，方向向下。

4-22 试求出题 4-5 图中所示短管出流的容器支座受到的水平作用力。

解 习题 4-5 中已解出：$\frac{V_2^2}{2g} = 1.23 m$， $V_2 = 4.91 m/s$

选取短管出口断面上游的所有水体为控制体，取 x 轴方向沿着短管出流方向，设容器壁对水体的作用力为 F，当沿坐标轴正向时

取正值。依据动量方程（4-48a）, 有

$$\rho Q\left(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1\right) = F$$

其中 直径 $d_2 = 150mm$, 流量 $Q = \dfrac{\pi d_2^2}{4} V_2 = 0.0868m^3 / s$

$V_1 = 0$, $V_2 = 4.91m / s$

$\rho = 1000kg / m^3, \beta = 1.0,$ 得

$$F = \rho Q V_2 = (1000 \times 0.0868 \times 4.91)\mathrm{N} = 426.2\mathrm{N}$$

F>0.表明容器壁对水体的作用力沿 x 正向。容器支座受到的水平推力大小为 426.2N,方向向左（这就是射流的后座力）。

4-23 浅水中有一艘喷水船以水泵作为动力装置向右方航行，如图示。若水泵的流量 $Q = 80L/s$，船前吸水的相对速度 $w_1 = 0.5m/s$，船尾出水的相对速度 $w_2 = 12m/s$。试求喷水船的推进力 R。

解 选取控制体位于喷水船水管进口与出口之间， x 方向向右，沿坐标轴正向的作用力分量取正值。依据动量方程（4-48a），写出 x 向动量方程

$$\rho Q\left[(-w_2) - (-w_1)\right] = -R$$

其中，-R 是船体对水体的作用力，而喷水传推进力 R 沿着 x 正向。解出

$$R = \rho Q\left(w_2 - w_1\right)$$

$$= 1000 \times 80 \times 10^{-3} \times (12 - 0.5) = 920N$$

4-24 图示一水平放置的具有对称臂的洒水器，臂悬半径 R=0.25m，喷嘴直径 d=10mm,喷嘴倾角α =45 若总流量 Q=0.56L/s 求（1）不计摩擦时的最大旋转角速度ω；（2）ω =5rad/s 时为克服摩擦应施加多大的扭矩 M 以及所作功率 P。

解 （1）喷嘴的喷射流速

$$v = \frac{Q}{2(\pi d^2 / 4)} = \frac{2Q}{\pi d^2} = \frac{2 \times 0.56 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.012} m / s = 3.565m / s$$

选取随旋臂一起转动的坐标系如图示，控制体为断面 1-2 之间的右侧弯头段。总流的 y 向动量方程为

$$F = \rho \frac{Q}{2}\left(V \sin\alpha - \omega R\right)$$

其中，F 为弯头对水流的作用力，左侧弯头的作用力为-F。当 F=0 时，有

$$\omega = \frac{V \sin\alpha}{R} = \frac{2.565 \sin 45^0}{0.25} rad / s = 10.08rad / s$$

（2）两个弯头的作用力形成力偶，其扭矩 $M = (2F)R$。当 ω 一定时, 扭矩

$$M = 2FR = \rho Q(V\sin\alpha - \omega Q)R$$
$$= \left[1000 \times 0.56 \times 10^{-3} \times (3.565\sin 45^0 - 5) \times 0.25\right] \mathrm{N} \bullet m$$

功率

$$P = \mathrm{M}\omega = 0.712 \times 5\ W = 3.56W$$

4-25 图示一水射流垂直冲击平板 ab，在点 c 处形成滞点。已知射流流量 $Q = 5\,L/s$,，喷口直径 $d = 10mm$。若不计黏性影响，喷口断面流速均匀，试求滞点 c 处的压强。

解　喷口断面平均流速 $V_1 = \dfrac{Q}{\pi d^2/4} = \dfrac{4\times5\times10^{-3}}{\pi\times0.01^2}m/s = 63.662m/s$

取 1 点位于喷口中心，喷口断面流速分布均匀，1 点流速 $U_1 = V_1$ 。1、c 两点在同一直线上，写出该流线的伯努力方程

$$\frac{p_1}{g\rho} + z_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_c}{g\rho} + z_c + \frac{U_c^2}{2g}$$

将 $p_1 = 0$, $z_1 = z_c$, $U_c = 0$, $U_1 = V_1$ 带入上式，得

$$\frac{p_c}{g\rho} = \frac{U_1^2}{2g} = \frac{63.662^2}{2\times9.8}m = 206.78m$$

滞点c处的压强 p_c 为 $206.78m$ 水柱高。。

4-26 已知圆柱绕流的流速分量为 $u_r = U_\infty\left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$， $u_\theta = -U_\infty\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$，其中 a 为圆柱的半径，极坐标 (r,θ) 的原点位于圆柱中心上。（1）求流函数 ψ，并画出流谱 ；（2）若无穷远出来流的压强为 p_∞，求 $r = a$ 处即圆柱表面上的压强分布。

解（1）依据流函数定义式（4-68），有

$$d_\psi = u_r r d_\theta = u_\theta d_r$$

利用给定的 u_θ 表达式，得

$$\frac{\partial_\psi}{\partial_r} = -u_\theta = U_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

积分该式, 有

$$\psi(r,\theta) = \int \frac{\partial_\psi}{\partial_r} d_r + C(\theta) = \int U_\infty\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta d_r + C(\theta)$$

$$= U_\infty \sin\theta\left(r-\frac{a^2}{r^2}\right) + C(\theta)$$

其中，$C(\theta)$是依赖θ的常数。因为圆柱表面$r = a$是流线，该流线上$\psi =$常数，该常数可以任取。现取

$r = a$ 上$\psi = 0$，利用上式可确定$C(\theta) = 0$,故流函数为

$$\psi = U_\infty r\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

流谱如图所示。

（2）曲线 bscde是一条$\psi = 0$ 的流线。在不计重力的条件下，该流线上成立伯努利方程

$$\frac{p_\infty}{g\rho} + \frac{U_\infty^2}{2g} = \frac{p}{g\rho} + \frac{U^2}{2g}$$

在圆柱表面上 $r = a$，带入给定的流速表达式，得

$$u_r = 0\ , \quad u_\theta = 2U_\infty \sin\theta, \quad U = u_\theta = 2U_\infty \sin\theta$$

将 U 代入式（a），得圆柱表面的压强

$$\frac{p}{g\rho} = \frac{p_\infty}{g\rho} + \frac{U_\infty^2 - U^2}{2g} = \frac{p_\infty}{g\rho} + \frac{U_\infty^2}{2g}\left(1-4\sin^2\theta\right)$$

4-27 已知两平行板间的流速场 $u = C\left[(h/2)^2 - y^2\right]$，$v = 0$，其中，$C = 250(sm)^{-1}$，$h = 0.2m$.当取$y = -h/2$时$\psi = 0$。求（1）流函数$\psi$；（2）单宽流量$q$

解（1）由流函数的定义式（4-58），有

$u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y},v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$。由此得

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=C\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2-y^2\right]\quad,\quad\frac{\partial_\psi}{\partial_x}=0$$

积分$\partial\psi/\partial y$得

$$\psi=C\left(\frac{h}{2}\right)^2y-\frac{C}{3}y^3+C_1$$

其中，依据$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0$知，积分常数不依赖$x$。下壁面是一条流线，选取该流线上$\psi=0$。

将$\psi(y=-h/2)=0$代入上式，得

$$0=C\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(-\frac{h}{2}\right)-\frac{c}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3+C_1$$

可解出$C_1=\dfrac{ch^3}{12}$，故流函数为

$$\psi=\frac{1}{4}ch^2y-\frac{1}{3}cy^3+\frac{1}{12}ch^3$$

$$=\frac{1}{4}\times250\times0.2^2y-\frac{1}{3}\times250y^3+\frac{1}{12}\times250\times0.2^3=\frac{5}{2}y-\frac{250}{3}y^3+\frac{1}{6}$$

(2)单宽流量

$$q=\psi\left(y=\frac{h}{2}\right)=\left[\frac{5}{2}\times\frac{0.2}{2}-\frac{250}{3}\left(\frac{0.2}{2}\right)^3+\frac{1}{6}\right]m^3/sm=0.333\ m^3/sm$$

4-28　设有一上端开口、盛有液体的治理圆筒如图所示，绕其中心铅直轴作等速运动，角速度为ω。圆筒内的液体也随作等速运动，液体质点间无相对运动，速度分布为$u=-\omega y,v=\omega x,w=0$。试用欧拉方程求解动压力$p$的分布规律及自由液面的形状。

解　作用在液体上的单位质量力

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=-g$$

流体质点的加速度为

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial(-\omega y)}{\partial t}+0+0+0$$

$$=-\omega\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega v=-\omega^2x$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial(\omega x)}{\partial t} + 0 + 0 + 0$$

$$= \omega\frac{\partial x}{\partial t} = \omega u = -\omega^2 y$$

$$a_z = 0$$

根据欧拉运动方程，有

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = a_x \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = a_y \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = a_z \end{cases} \text{即} \begin{cases} 0 - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\omega^2 x \\ 0 - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\omega^2 y \\ -g - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \end{cases}$$

故压强全导数

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\omega^2 xdx + \rho\omega^2 ydy + g\rho dz$$

积分得$p = \rho\left(\dfrac{\omega^2 x^2}{2} + \dfrac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C$

$(x, y) = (0.0)$处$z = z_0$。由于该处$p = 0$，故

$0 = \rho(-gz_0) + C$或$C = g\rho z$

设自由面上因此，压强分布为$p = \rho\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2} - gz + gz_0\right)$

将$p = 0$代入上式，得到自由面方程

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + g(z - z_0) = 0$$

4-29　图示一平面孔口流动（即狭长缝隙流动），因孔口尺寸较小，孔口附近的流场可以用平面点汇表示，点汇位于孔口中心。已知孔口的作用水头 H=5m，单宽出流流量$q = 20\ L/sm$，求图中 a 点的流速大小、方向和压强。

解　小孔口流动相当于强度 2q 的平面点汇流动。根据平面点汇流动的流速公式，有

$$u_r = \frac{2q}{2\pi r} \quad ,u_\theta = 0$$

在a点，$r_a = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}m$，该处的流速的大小为

$$u_{ra} = \frac{2q}{2\pi r_a} = \frac{2 \times 20 \times 10^{-3}}{2\pi \times \sqrt{5}} m/s = 0.0028\ m/s$$

流速方向沿着 a 点与孔口中心连线的方向。

在过 a 点连线上，自由面与 a 点之间的伯努利方程为

$z_a + \frac{p}{g\rho} + \frac{u_{ra}^2}{2g} = z_0$ 其中 z_0 表示自由面高程，p 表示 a 点的压强。将 $z_0 - z_a = H + 1$ 代入上式，得

$$\frac{p}{g\rho} = H + 1 - \frac{u_{ra}^2}{2g} = \left(5 + 1 - \frac{0.0018^2}{2g}\right)m \approx 6m$$

故 a 点压强为 6m 水柱高。

4-30 完全自水流井汲水时产生的渗流场可以用平面点汇流动求解。图示自流井位于铅直不透水墙附近，渗流场为图示两个点汇的叠加，两者以不透水墙为对称面。求汲水流量 $Q = 1\ m^3/s$ 时，流动的势函数 φ，以及沿壁面上的流速分布。

解　该渗流场相当于（-2，0）点上强度 Q 的点汇和　（+2，0）点上强度 Q 的点汇的叠加。对于 x=a 处的点汇诱导的流场，有

流函数$\psi_1 = \frac{-Q\theta_1}{2\pi}$；势函数$\varphi_1 = \frac{-Q}{2\pi}\ln r_1$

对于在 x=-a 处的点汇诱导的流场，有

流函数 $\psi_2 = \frac{-Q\theta_2}{2\pi}$；势函数$\varphi_2 = \frac{-Q}{2\pi}\ln r_2$

根据势流叠加原理，两个点汇叠加诱导的流场中任一点 P（x，y）处的流函数、势函数分别为

$$\psi=\psi_1+\psi_2=-\frac{Q}{2\pi}\left[\theta_1+\theta_2\right]$$

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=-\frac{Q}{2\pi}\left[\ln r_1+\ln r_2\right]=-\frac{Q}{2\pi}\ln\left(r_1r_2\right)$$

当$Q=1\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$时，有$\varphi=-\frac{1}{2\pi}\ln\left(r_1r_2\right)$。在$x=0$壁面上，有

$$\theta_1=\tan^{-1}\frac{y}{x-a},\ \theta_2=\tan^{-1}\frac{y}{x+a}$$

壁面上流函数值为

$$\psi=-\frac{Q}{2\pi}\left[\tan^{-1}\frac{y}{x-a}+\tan^{-1}\frac{y}{x+a}\right]$$

根据对称性，在$x=0$壁面上，有

$$u=0,\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{-y}{a^2+y^2}+\frac{-y}{a^2+y^2}\right]=\frac{-Qy}{\pi\left(a^2+y^2\right)}$$

当$Q=1$、$a=2$时，有

$$v=\frac{-y}{\pi\left(2^2+y^2\right)}=\frac{-y}{\pi\left(4+y^2\right)}$$

4-31　图示一盛水圆桶底中心有一小孔口，孔口出流时桶内水体的运动可以由兰金涡近似，其流速分布如图所示：中心部分$\left(r\le r_0\right)$为有旋流动$u(r)=\omega r$，外部$\left(r>r_0\right)$为有势流动$u(r)=u_0r_0/r$，其中$u_0=u\left(r=r_0\right)$。设孔口尺寸很小，r_0也很小，圆桶壁面上的流速$u_R=u(r=R)\approx0$，流动是恒定的。（1）求速度环量Γ的径向分布；（2）求水面的形状

解（1）速度环量$\Gamma=\int_0^{2\pi}u\cdot rd\theta$。对中心部分$\left(r\le r_0\right)$的流速分布式$u(r)=\omega r$

积分，得$\Gamma=\int_0^{2\pi}\omega r^2d\theta=2\pi\omega r^2$

对外部$\left(r\ge r_0\right)$的流速分布式$u(r)=u_0r_0/r$积分，得

$$\Gamma=\int_0^{2\pi}\frac{r_0}{r}u_0rd\theta=2\pi r_0u_0$$

（2）在外部$\left(r\ge r_0\right)$，依据无旋流动的伯诺里方程，对任意点均有

$$z+\frac{p}{g\rho}+\frac{u^2}{2g}=C_1=\text{常数}$$

自由面上$p=0$，代入上式，得自由面方程

$$z+\frac{u^2}{2g}=C_1$$

利用桶壁条件$u_R=u(r=R)\approx 0$和$z=H$，得常数$C_1=H$ 故自由面方程可写成

$$z+\frac{1}{2g}\left(\frac{r_0u_0}{r}\right)^2=H,\ r\geq r_0 \qquad \text{(a)}$$

在中心部分$(r\leq r_0)$的有旋流动是一个柱状强迫涡， 其

流 速 分 布 $u(r)=\omega r$ 与 习 题 4-28 直 立 圆 桶 绕 中 心 铅 直 轴 等 速 运 动 的 流 速 分 布 为 速 度 分 布 为 $u=-\omega y$和$\nu=\omega x$ 完 全 相 同 。 由 习 题 4-28 知 ， 自 由 面 方 程 可 写 成

$$\frac{1}{2g}(\omega r)^2+g(z-z_0)=0,\ r<r_0 \qquad \text{(b)}$$

为了确定 r=0 处自由面高程Z_0，将$r=r_0$ 代入（a)、(b）两式，消去 z，得$Z_0=H$。故式（b）可改成

$$\frac{1}{2g}(\omega r)^2+g(z-z_0)=0,\ r<r_0$$

式（a）和（c）就是要求解的自由水面方程。

4-32 偶极子是等强度源和汇的组合，如图 a 所示：点源位于$X_+=(-\delta/2,0)$点源强度为 Q>0;点汇位于$X_-=(+\delta/2,0)$，强度为-Q<0。点源与电汇叠加后,当偶极子强度$M=\delta Q$ 为有限值、而取$\delta\to 0$时，就得到式（4-75）中偶极子的势函数和流函数。试利用偶极子与均匀平行流叠加的方法（图 b)，导出圆柱绕流的流速分布（可参见习题 4-26)。

解 先推到偶极子的势函数。根据叠加原理，图（a）位于$X=X_+$的点源和位于$X=X_-$的点汇诱导的流速势可写成

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{Q}{2\pi}\ln r_1-\frac{Q}{2\pi}\ln r_2=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

其中，从点源 $\left(-\delta/2,0\right)$ 和点汇 $\left(+\delta/2,0\right)$ 到 P（x，y）的失径分别为

$$r_1=\sqrt{\left(x+\delta/2\right)^2+y^2}\ ,r_2=\sqrt{\left(x-\delta/2\right)^2+y^2}$$

故，流速势可写成

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\left(x+\delta/2\right)^2+y^2}}{\sqrt{\left(x-\delta/2\right)^2+y^2}}=\frac{Q}{4\pi}\ln\frac{\left(x+\delta/2\right)^2+y^2}{\left(x-\delta/2\right)^2+y^2}$$

$$=\frac{Q\delta}{4\pi}\frac{\ln\left[\left(x+\delta/2\right)^2+y^2\right]-\ln\left[\left(x-\delta/2\right)^2+y^2\right]}{\delta}$$

令 $M=\delta Q$。取极限 $\delta\to 0$，得偶极子的流速势

$$\varphi_M=\lim_{\delta\to 0}\varphi=\frac{M}{4\pi}\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{Mx}{x^2+y^2}$$

再推导均匀平行流场与偶极子叠加，均匀平行流场的速度势为 $\varphi_0=U_\infty x$，依据叠加原理，它与偶极子叠加后诱导的流速势可写成

$$\varphi\left(x,y\right)=\varphi_M+\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\frac{Mx}{x^2+y^2}+U_\infty x=U_\infty\left[\frac{M/\left(2\pi U_\infty\right)}{x^2+y^2}+1\right]x$$

仿照式（4-77），令 $a^2=\dfrac{M}{2\pi U^2}$，代入上式，得圆柱绕流的流速势

$$\varphi\left(x,y\right)=\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)U_\infty x=\left(\frac{a^2}{r}+r\right)U_\infty\cos\theta$$

依据式（4-66）得圆柱绕流的的各速度分量

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\left(-\frac{a^2}{r^2}+1\right)U_\infty\cos\theta,u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{r^2}+r\right)\left(-\sin\theta\right)$$

证毕。

4-33 在圆柱绕流流场上再叠加上一个位于原点的顺时针点涡，得到有环量的圆柱绕流，如图示。（1）当 $\Gamma=4\pi aU_\infty$ 时，圆柱表面上的两个滞留点重合。求过滞留点的两条流线方程；（2）采用圆柱表面压强积分的方法，试推导出升力公式；（3）$\Gamma>4\pi aU_\infty$，试确定滞留点位置。

解 由式（4-79）写出有环量的圆柱绕流的流函数

$$\psi(x,y)=U_{\infty}(r-\frac{a^2}{r})\sin\theta+\frac{-I}{2\pi}\ln r \qquad (a)$$

依据式（4-66），得各速度分量

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=U_{\infty}(1-\frac{a^2}{r^2})\cos\theta$$

$$u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-U_{\infty}(1+\frac{a^2}{r^2})\sin\theta-\frac{I}{2\pi r}$$

（1） 求当 I=4π a U_∞ 时过滞留点的流线方程。将 $u_\theta=0$、$r=a$代入式（c）得滞留点满足的方程

$$-2U_{\infty}\sin\theta-\frac{I}{2\pi a}=0\text{或}\sin\theta=-\frac{I}{4\pi aU_{\infty}}$$

满足该式的θ值有两个，它们是下表面上的两个滞留点

$$\theta_1=-\sin^{-1}\frac{I}{4\pi aU_{\infty}}\text{和}\theta_2=-\pi+\sin^{-1}\frac{I}{4\pi aU_{\infty}}$$

当$I\to 4\pi aU_{\infty}$时，有$\theta\to-\frac{\pi}{2}$，$\theta_2\to-\frac{\pi}{2}$，即两个滞留点重合到一起。

为了得出通过滞留点的两条流线的ϕ值，将$\sin=-1$和$I=4\pi aU_{\infty}$代入式（a），得

ψ（x，y）$=-2U_{\infty}(1+a\ln a)$

利用流函数表达式（a）和同一流线上“ψ（x，y）= 常数”的性质，得流线方程

$$U_{\infty}(r-\frac{a^2}{r})\sin\theta+\frac{-I}{2\pi}\ln r=-2U_{\infty}(1+a\ln a)$$

因为$\sin\theta=\sin(-\pi+\theta)$，故上式代表两条流线。

（2）推到升力公式。在圆柱面上，有 r=a。代入带式（b）（c）得

$$u_r=0,u_\theta=-2U_{\infty}\sin\theta-\frac{I}{2\pi a}$$

根据伯诺里方程$\frac{p_\infty}{g\rho}+\frac{U^2}{2g}=\frac{p}{g\rho}+\frac{{u_\theta}^2}{2g}$

圆柱面上的压强为

$$p=p_{\infty}+1/2\rho U_{\infty}^2-\rho/2(2U_{\infty}\sin\theta+\frac{I}{2\pi a})^2$$

积分该式，得圆柱受到的流畅作用力

$$P=\int_0^{2\pi}(-p)\,ad\theta\bullet n,\quad n=i\cos\theta+j\sin\theta$$

其y向量分量就是圆柱受到的升力

$$P_y\int_0^{2\pi}(-p)\,ad\theta=\rho/2\int_2^{2\pi}(2U_{\infty}\sin\theta+\frac{I}{2\pi a})\,ad\theta=\rho U_{\infty}I$$

确定$I>4\pi aU_\infty$时滞留点的位置。将$u_\theta=0$代入到式（c），得

$$-U_\infty(1+\frac{a^2}{r^2})\sin\theta-\frac{I}{2\pi r}=0$$

若将柱面条件$r=a$代入上式，得

$$I=-4\pi aU_\infty\sin\theta\le 4\pi rU_\infty$$

这说明，当$I>4\pi aU_\infty$时，不可能在$r=a$上出现$u_\theta=0$，必须求解$u_r=0$和$u_\theta=0$构成的方程组，才能找到圆柱外满足$r>a$的滞留点。为此令

$$\eta=\frac{I}{4\pi aU_\infty}>1, z=\frac{a}{r}<1$$

由（b）（c）两式，得

$$u（r）=0:\ U_\infty(1-z^2)\cos\theta=0$$

$$u（\theta）=0:-U_\infty(1+z^2)\sin\theta-2\eta U_\infty z=0$$

从式（d）中可解出$\cos\theta=0$，即滞点位于$\theta=-\pi/2$。将$\sin\theta=1$代入式（e），得

$$z^2-2\eta z+1=0$$

可解出

$$z=\eta\pm\sqrt{\eta^2-1}$$

因为圆柱外的滞点满足$\eta>1$和$z<1$,只有取“$-$”才有意义

故得两个滞点条件

$$\frac{a}{r}=\frac{I}{4\pi aU_\infty}-\sqrt{(\frac{I}{4\pi aU_\infty})^2-1}\text{和}\theta=-\pi/2$$

4-34 设水平放置的90^0弯管如图所示，内外壁位于半径分别为$r_1=200mm$和$r_2=400mm$的同心圆上。若轴向流速$u(r)$的断面分布与自由涡相同，轴线流速$u(r_0)=2\ m/s$，（1）求水流通过时弯管内外壁之压差；（2）验证流体的总机械能在弯管内外壁处相等。

解：（1）写出自由涡的流速分布

$$\mu_r=0,\mu_\theta=C/r$$

将 $r=r_0=0.3m$ 处流速值 u(r_0)=2m/s 带入上式，得常数 C=0.9，有

$$\mu_\theta=0.6/r$$

在弯道内侧，$r=r_1=0.2m,\mu_{\theta1}=3m/s;$ 在弯道外侧，$r=r_2=0.4m,\mu_{\theta2}=1.5m/s$。依据同心圆弯道

的压强微分式，有 $dp=\rho\frac{\mu_\theta^2}{r}dr$

由 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 积分该式，得

$$\int_{r_1}^{r_2}dp=\int_{r_1}^{r_2}\rho\frac{\mu_\theta^2}{r^3}dr=\frac{\rho\mu_\theta^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)$$

故弯管内、外壁之压差为

$$p_2-p_1=\frac{0.6^2\times1000}{2}\times\left(\frac{1}{0.2^2}-\frac{1}{0.4^2}\right)pa=3375pa$$

（2）压强水头差 $\frac{p_2-p_1}{g\rho}=\frac{3375}{9.8\times1000}m=0.344m$

流速水头差 $\frac{\mu_{\theta2}^2-\mu_{\theta1}^2}{2g}=\frac{1.5^2-3^2}{2\times9.8}m=0.344m$

可见，压强水头差等于流速水头差，故总机械能在弯道内、外壁处相等。

第五章　层流、紊流及其能量损失

5-1（1）某水管的直径 d=100㎜,通过流量 Q=4L/s,水温 T=20 ^0C ;(2)条件与以上相同，但水管中流过的是重燃油，其运动粘度 $\nu=150\times10^{-6}m^2/s$。试判断以上两种情况下的流态。

解:（1） $\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{4Qd}{\pi d^2\nu}=\frac{4Q}{\pi d\nu}=\frac{4\times0.004}{\pi\times0.1\times1.01\times10^{-6}}=50425>2000$

流动为紊流流态。

（2） $\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{4Q}{\pi d\nu}=\frac{4\times0.004}{\pi\times0.1\times150\times10^{-6}}=339.5<2000$

流动为层流流态。

5-2（2）温度为 0 ^0C 的空气，以 4m/s 的速度在直径为 100㎜ 的圆管中流动，试确定其流态（空气的运动粘度为 $1.37\times10^{-5}m^2/s$）。若管中的流体换成运动粘度为 $1.792\times10^{-6}m^2/s$ 的水，问水在观众管中呈何流态?

解 流体为空气时，有

$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{4\times0.1}{1.37\times10^{-5}}=29197>2000$$ 紊流流态

流体为水时，有

$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{4\times0.1}{1.792\times10^{-6}}=223214>2000$$ 紊流流态

5-3（1）一梯形断面排水沟，底宽 0.5m，边坡系数 $\cot\theta=1.5$（θ 为坡角），水温为 20^0C，水深 0.4m，流速为 0.1m/s，试判别流态；（2）如果水温保持不变，流速减小到多大时变为层流？

解（1）梯形断面

面积 $A=h(b+hm)=0.4\times(0.5+0.4\times1.5)m^2=0.44m^2$

湿周 $\chi=b+2h\sqrt{1+m^2}=\left(0.5+2\times0.4\times\sqrt{1+1.5^2}\right)m=1.942m$

水力半径 $R=\frac{A}{\chi}=\frac{0.44}{1.942}m=0.2266m$

雷诺数 $\mathrm{Re}=\frac{VR}{\nu}=\frac{0.1\times0.2266}{1.01\times10^{-6}}=2.24\times10^4>500$ 紊流流态

（2）层流的上界雷诺数 $\mathrm{Re}=\frac{VR}{\nu}=500$。解出

$$V=\frac{500\nu}{R}=\frac{500\times1.01\times10^{-6}}{0.2266}m/s=2.23\times10^{-3}m/s$$

故流速减小到 $2.23\times10^{-3}m/s$ 时变为层流。

5-4 由若干水管组装成的冷凝器，利用水流经过水管不断散热而起到冷凝作用。由于紊流比流层的散热效果好，因此要求管中的水流处于紊流流态。若水温 10^0C，通过单根水管的流量为 0.03L/s，试确定冷却管的直径。

解：水温 $t=10^0C$ 时，水的粘度 $\nu=1.31\times10^{-6}m^2/s$。管道断面平均流速

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi d^2}$$

由 $\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{4Qd}{\pi d^2\nu}=\frac{4Q}{\pi d\nu}>2000,$ 得

$$d<\frac{4Q}{2000\pi\nu}=\frac{4\times0.03\times10^{-3}}{2000\pi\times1.31\times10^{-6}}m=0.0146m$$

故可选用标准管径 d=14mm。

5-5 设有一均匀流管路，直径 d=200mm，水力坡度 J=0.8%，试求边壁上的切应力 τ_0 和 100m 长管路上的沿程损失 h_f。

解：由式（5-16），管壁平均切应力

$$\tau_0 = g\rho RJ = 9800\times\frac{0.2}{4}\times0.008N/m^2 = 3.92N/m^2$$

沿程损失 $h_f = Jl = 0.008\times100m = 0.8m$

5-6 动力粘度为 $\mu = 0.048Pa\cdot s$ 的油，以 V=0.3m/s，的平均速度流经直径为 d=18mm 的管道，已知油的密度 $\rho = 900Kg/m^3$，试计算通过 45m 长的管道所产生的测管水头降落，并求距管壁 y=3mm 处的流速。

解 该管流的雷诺数

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{900\times0.3\times0.018}{0.048} = 101.25 < 2000$$

表明，油流为层流流态。由层流的水头损失公式（5-28），有

$$h_f = \frac{32\nu l}{gd^2}V = \frac{32\mu l}{g\rho d^2}V$$

长 l=45m 的均匀流段的测管水头降落于水头损失相等，得

$$\frac{\Delta p}{g\rho} = h_f = \frac{32\mu l}{g\rho d^2}V = \frac{32\times0.048\times45}{9.8\times900\times0.018^2}\times0.3m = 0.726m$$

当 y=3mm 时，有

$$\frac{r}{d} = \left(\frac{d}{2}-y\right)\frac{1}{d} = \frac{1}{2}-\frac{3}{18} = \frac{1}{3}$$

将流层关系式（5-25）即 $\mu_{\max} = 2V$ 代入到流层的流速剖面式（5-24），得

$$\mu(r) = 2V\left[1-4\left(\frac{r}{d}\right)^2\right] = 2\times0.3\times\left[1-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]m/s = 0.33m/s$$

5-7 一矩形断面明渠中流动为均匀流，已知底坡 i=0.005，水深 h=3m，底宽 b=6m。试求：(1) 渠底壁面上的切应力 τ_0；(2) 水深 $h_1 = 2m$ 处的水流切应力 τ_0

解（1）求渠底切应力 τ_0。水力半径

$$R = \frac{bh}{b+2h} = \frac{6\times3}{6+2\times3}m = 1.5m$$

均匀流的水力坡度与底坡相等，即 J=i=0.005m。由切应力公式（5-16），渠底壁面上的切应力

$$\tau_0 = g\rho RJ = 9800\times1.5\times0.005Pa = 73.5Pa$$

（2）求水深 $h_1 = 2m$ 处的水流切应力 τ_0 以水深 $h_1 = 2m$ 处为界面，上侧水体构成一流束，其水力半径为

$$R^{'} = \frac{bh_1}{b+2h_1} = \frac{6\times2}{6+2\times2}m = 1.2m$$

均匀流各流束的水力坡度相等，有 J=i=0.005。由式（5-14），该流束的周界上的平均切应力为

$$\tau_0^{'} = g\rho R^{'} J = 9800 \times 1.2 \times 0.005 Pa = 58.8 Pa$$

因为断面较宽，可看作 $\tau \approx \tau_0^{'}$，即水深 $h_1 = 2m$ 处的切应力约为 58.8Pa。

5-8 有三条管道，其断面形状分别为图中所示的图形、方形和矩形，它们的断面面积均为 A，水力坡度 J 也相等。（1）求三者边壁上的平均切应力之比。（2）当沿程损失系数 λ 相等时，求三者流量比。

解（1）求三者平均切应力之比。由切应力公式（5-16），有 $\tau_0 = gpRJ$。又因为各断面 J 相等，可知

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = R_1 : R_2 : R_3$$

其中，下标 1，2，3 分别表示圆形、方形和矩形断面。各断面的水力半径

$$R_1 = \frac{d}{4} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}, R_2 = \frac{A}{4a} = \frac{A}{4\sqrt{A}} = \frac{1}{4}\sqrt{A}, R_3 = \frac{A}{6b} = \frac{A}{6\sqrt{A/2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{A}$$

由此算得比值

$$R_1 : R_2 : R_3 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} : \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{2}}{6} = 0.282 : 0.25 : 0.236$$

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 \approx 28.2 : 25 : 23.6$$

⑵求三者的流量比。由达西公式，得

$$J = \frac{h_f}{l} = \frac{\lambda V^2}{2dg} = \frac{\lambda Q^2}{8gRA^2}$$

又因为各断面 J 相等，有 $Q \propto \sqrt{R}$。于是，得流量比

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 \approx \sqrt{R_1} : \sqrt{R_2} : \sqrt{R_3} = 0.531 : 0.5 : 0.486$$

5-9 两水平放置、间距为 b 的平板，顶板以速度 U 沿水平方向作匀速运动，板之间流动为层流流态，求其流速剖面。

解 选取长方形水体单元如图，依据 x 向受力平衡 $F_1 = F_2$，得单元上、下表面的切应力关系 $\tau_1 = \tau_2$。因为单元任取，故得到 $\tau = \mu \frac{d\mu}{dy} = C =$ 常数。积分该式，得 $\tau = C_1 y + C_2$

其中两个积分常数由边界条件确定：由 y=0 处 $\mu = 0,$ 得 $C_2 = 0$；由 y=0 处 $\mu = U$，得 $C_1 = \frac{U}{b}$。故流速剖面为直线 $\mu = \frac{U}{b} y$。

5-10 厚度直径 b 的液体薄层在斜面上向上流动，如图示。设流动为均匀流、层流流态，试用脱离体法证明其流速剖面为

$$\mu = \frac{g}{2\nu}\left(b^2 - y^2\right)\sin\theta$$

其中，g 为重力加速度，v 为运动粘度，θ 为斜面的倾角，y 为自由液面以下的深度。

解 建立图示 0xy 坐标系。取宽度 B=1m、厚度为 y 的水体。由 x 向平衡条件，可写出 $(Bdl)\tau = g\rho(dlBy\sin\theta)$

或 $\tau = g\rho y\sin\theta$

依据牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu\frac{d\mu}{dz} = -\mu\frac{d\mu}{dy}$，得 $g\rho y\sin\theta = -\mu\frac{d\mu}{dy}$。积分该式，得

$$\frac{1}{2}g\rho y^2\sin\theta + C' = -\mu u \quad 或 \quad \mu = \frac{1}{2\nu}g\sin\theta\left(C - y^2\right)$$

由条件 y=b 处 $\mu = 0$，得系数 $C = b^2$。故有

$$\mu = \frac{g\sin\theta}{2\nu}\left(b^2 - y^2\right)$$

证毕。

5-11 圆管直径 d=150mm，通过该管道的水流速度 V=1.5m/s，水温 $T = 18^0C$。若已知沿程损失系数 $\lambda = 0.03$，试求摩阻流速 μ_* 和粘性底层名义厚度 δ_0。如果将 V=2.0m/s，μ_* 和 δ_0 如何让变化？若保持 V=1.5m/s，而管径增大到 d=300mm，μ_* 和 δ_0 如何让变化？

解 当温度 18^0C 时，水的粘度为 $\nu = 1.062\times10^{-6}m^2/s$。由（5-35）和（5-37）两式，有

$$\delta_0 = \frac{32.8\nu}{V\sqrt{\lambda}} = \frac{32.8\times1.062\times10^{-6}}{1.5\times\sqrt{0.03}}m = 1.341\times10^{-4}m$$

$$\mu_* = 11.6\frac{\nu}{\delta_0} = \frac{11.6\times1.062\times10^{-6}}{1.341\times10^{-4}}m/s = 0.0919m/s$$

当流速提高至 V=2.0m/s 时，设 λ 保持不变，有

$$\delta_0 = 1.341\times10^{-4}\times\frac{1.5}{2.0}m = 1.006\times10^{-4}m$$

$$\mu_* = 0.092\times\frac{2.0}{1.5}m/s = 0.122m/s$$

当保持 V=1.5m/s 不变，而管径增大到 d=0.3m，若 λ 不变，则 μ_* 和 δ_0 保持不变。

5-12 半径 $r_0 = 150mm$ 的输水管，在水温 $T = 15^0C$ 下进行实验，所得数据为 $\rho = 991.1kg/m^3, \mu = 0.00114Pa\cdot s, V = 3.0m/s, \lambda = 0.015.$ 求：(1) 管壁 $r = r_0$ 处、管轴 r=0 处和 $r = 0.5r_0$ 处的切应力；(2) 若在 $r = 0.5r_0$ 处的流速梯度为 $4.34s^{-1}$，求该点的粘性切应力和紊动附加切应力。

解 (1) $\mathrm{Re} = \rho\frac{Vd}{\mu} = \frac{3\times2\times0.15}{0.00114}\times991.1 = 782447.4$ 属于紊流流态。

由式（5-18），有 $\tau_0 = \lambda\frac{\rho V^2}{8}$。故管壁切应力 $\tau_0 = 0.015\times\frac{991.1\times3^2}{8} = 16.725Pa$。

由式（5-17），在 $r=0.5r_0$ 处，$\tau=\tau_0\left(\frac{r}{r_0}\right)=16.72\times0.5Pa=8.362Pa$；

在 r=0 处，$\tau=0$。

（2）在 $r=0.5r_0$ 处的粘性切应力为

$$\tau_1=\mu\frac{d\mu}{dy}=0.00114\times4.34Pa=4.95\times10^{-3}Pa$$

紊动附加切应力

$$\tau_2=\tau-\tau_1=8.362-4.95\times10^{-3}=8.357(Pa)$$

5-13 根据紊流光滑管的对数流速分布律和粘性底层的线性流速分布式，推导 粘性底层的名义厚度 δ_0 满足

$\frac{\delta_0\mu_*}{\nu}=11.64$。

证　依据式（5-50）、（5-51），光滑管的对数流速剖面为

$$\frac{\mu}{\mu_*}=\frac{y\mu_*}{\nu}\quad（粘性底层，y<\delta_0）\qquad(b)$$

$$\frac{\mu}{\mu_*}=2.5\ln\frac{\mu_*y}{\nu}+5.5\quad(y>\delta_0)\qquad(a)$$

在 y=δ_0 处流速 $\mu(y)$ 满足（a）、（b）两式，因此有

$$2.5\ln\frac{\mu_*y}{\nu}+5.5=\frac{\mu_*\delta}{\nu}$$

令 $\delta_0^+=\frac{\mu_*\delta_0}{\nu}$，得 $\delta_0^+=2.5\ln\delta_0^++5.5$。利用该式直接迭代计算，取初值 11.6，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon=1.0\times10^{-3}$，得

$$\delta_0^+=11.6\longrightarrow\delta_0^+=11.628\longrightarrow\delta_0^+=11.633\longrightarrow\delta_0^+=11.635$$

可见，收敛值为

$$\frac{\mu_*\delta_0}{\nu}=11.635\approx11.64$$

证毕。

5-14 有一直径 d=200㎜ 的新铸铁管，其当量粗糙度为 $k_s=0.25mm$，水温 $T=15^0C$。试求出维持水力光滑管的最大流量和维持完全粗糙管的最小流量。

解　设光滑管紊流的最大流速为 V_1 。由勃拉修斯公式（5-62b）和式（5-35），有

$$\mathrm{Re}=\frac{V_1 d}{\nu},\lambda=\frac{0.316}{\mathrm{Re}^{1/4}}=0.316\left(\frac{\nu}{V_1 d}\right)^{1/4}$$

$$\delta_0=\frac{32.8\nu}{V_1\sqrt{\lambda}}=\frac{32.8\nu}{V_1}\frac{1}{\sqrt{0.316}}\left(\frac{V_1 d}{\nu}\right)^{1/8}=58.349\left(\frac{\nu}{V_1}\right)^{7/8}d^{1/8}$$

由式（5-40a）中光滑管条件 $k_s\leq 0.4\delta_0$，得

$$k_s\leq 23.34\left(\frac{\nu}{V_1}\right)^{7/8}d^{1/8}$$

将 d=0.2m，$k_s=0.00025m$ 和 $\nu=1.178\times10^{-6}m^2/s$ 代入，得

$$0.00025\leq 0.0001239V_1^{-7/8}\text{或}V_1\leq 0.495m/s$$

故，维持水力光滑管要求流量满足

$$Q_1=\frac{\pi}{4}d^2V_1=\frac{\pi}{4}\times0.2^2\times0.495m^3/s\leq 0.0156m^3/s$$

设粗糙管紊流的最小流速为 V_2 。由粗糙管公式（5-63），有

$$\lambda=\left(2\lg\frac{3.7d}{k_s}\right)^{-2}=\left(2\lg\frac{3.7\times0.2}{0.00025}\right)^{-2}=0.0207$$

由式（5-35）即 $\delta_0=\dfrac{32.8d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}$ 和式（5-40b）中粗糙管条件 $k_s\geq 6\delta_0$，得

$$k_s\geq\frac{6\times32.8\nu}{V_2\sqrt{\lambda}}=\frac{196.8\nu}{V_2\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{或}V_2\geq\frac{196.8\nu}{k_s\sqrt{\lambda}}=\frac{196.8\times1.178\times10^{-6}}{0.00025\times\sqrt{0.0207}}m/s=6.445m/s$$

故维持完全粗糙管要求流量满足

$$Q_2=\frac{\pi}{4}d^2V_2\geq\frac{\pi}{4}\times0.2^2\times6.445m^3/s=0.202m^3/s$$

5-15 铸铁管长 l=1000m，内经 d=300mm，通过的水流流量 $Q=0.1m^3/s$ 。试计算水温为 10^0C 和 15^0C 两种情况下的沿程损失系数 λ 及水头损失 h_f 。

解（1）当水温为 10^0C 时，有 $\nu=1.31\times10^{-6}m^2/s$, 且

$$V=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times 0.1}{\pi\times 0.3^2}m/s=1.415m/s$$

$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{1.415\times 0.3}{1.31\times 10^{-6}}=3.240\times 10^5$$

依据表 5-2，取铸铁管的当量粗糙度 $k_s=0.25mm$，利用哈兰德公式（5-65），得

$$\lambda=\left\{-1.81g\left[\left(\frac{k_s}{3.7d}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right]\right\}^{-2}=\left\{-1.81g\left[\left(\frac{0.00025}{3.7\times 0.3}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{3.24\times 10^5}\right]\right\}^{-2}$$

$$=\left[-1.81g\left(8.941\times 10^{-5}+2.130\times 10^{-5}\right)\right]^{-2}=0.01972$$

利用 Colebrook 公式（5-64），的迭代式

$$\lambda=\left[-2\lg\left(\frac{k_s}{3.7d}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}=\left[-2\lg\left(\frac{0.00025}{3.7\times 0.3}+\frac{6.9}{3.24\times 10^5}\right)\right]^{-2}$$

$$或\lambda=\left[-2\lg\left(2.2523+\frac{0.07747}{\sqrt{\lambda}}\right)+8\right]^{-2}$$

取初值 $\lambda_0=0.02$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon=1.0\times 10^{-3}$，得迭代值

$$\lambda_0=0.02\longrightarrow\lambda_1=0.01981\longrightarrow\lambda_2=0.01981$$

可取收敛值 $\lambda_0=0.0198$，与哈兰德公式的误差为 5%。

应用达西公式（5-18），按 $\lambda=0.0198$，得

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}=0.0198\times\frac{1000}{0.3}\times\frac{1.415^2}{2\times 9.8}m=6.74m$$

⑵当水温为15^0C时，有$\nu=1.178\times 10^{-6}m^2/s$，且

$$V=1.415m/s,\mathrm{Re}=\frac{1.415\times 0.3}{1.178\times 10^{-6}}=3.60\times 10^5$$

$$哈兰德公式（5-65）：\lambda=\left\{-1.8\lg\left[\left(\frac{0.00025}{3.7\times 0.3}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{3.6\times 10^5}\right]\right\}^{-2}$$

$$=\left[-1.8\lg\left(8.941\times 10^{-5}+1.917\times 10^{-5}\right)\right]^{-2}=0.0196$$

$Colebrook$公式（5-64）

$$\lambda=\left[-2\lg\left(\frac{k_s}{3.7d}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}=\left[-2\lg\left(\frac{0.00025}{3.7\times 0.3}+\frac{2.51}{3.6\times 10^5\times\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}$$

$$或\lambda=\left[-2\lg\left(2.2523+\frac{0.06972}{\sqrt{\lambda}}\right)+8\right]^{-2}$$

取初值 $\lambda_0 = 0.02$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$，得迭代值

$$\lambda_0 = 0.02 \longrightarrow \lambda_1 = 0.01971 \longrightarrow \lambda_2 = 0.01972$$

取收敛值 $\lambda_0 = 0.0197$，与哈兰德公式的误差为 0.5%。按 $\lambda = 0.0197$，得

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0.0197 \times \frac{1000}{0.3} \times \frac{1.415^2}{2 \times 9.8} m = 6.71m$$

5-16 某给水干管长 l=1000m，内经 d=300mm，管壁当量粗糙度 $k_s = 1.2mm$，水温 $T = 10^0C$。求水头损失 $h_f = 7.05m$ 时所通过的流量。

解 当 $T = 10^0C$ 时，有 $\nu = 1.31 \times 10^{-6} m^2 / s.$假定$\lambda = 0.029$。由达西公式（5-20），得

$$V = \sqrt{2g\frac{h_f d}{\lambda l}} = \sqrt{2 \times 9.8 \times \frac{7.05}{0.029} \times \frac{0.3}{1000}} m/s = 1.196 m/s$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.196 \times 0.3}{1.31 \times 10^{-6}} = 2.739 \times 10^5$$

由哈兰德公式（5-65）：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8\lg\left[\left(\frac{k_s}{3.7d}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right],得$$

$$\lambda = \left\{-1.8\lg\left[\left(\frac{0.0012}{3.7 \times 0.3}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{2.739 \times 10^5}\right]\right\}^{-2}$$

$$= \left[-1.8\lg\left(51.0 \times 10^{-5} + 2.518 \times 10^{-5}\right)\right]^{-2} = 0.02884$$

依据Colebrook公式（5-64），按迭代式

$$\lambda = \left[-2\lg\left(\frac{\mathrm{k_s}}{3.7\mathrm{d}} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2} = \left[-2\lg\left(\frac{0.0012}{3.7 \times 0.3} + \frac{2.51}{2.739 \times 10^5 \times \sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}$$

$$或\lambda = \left[-2\lg\left(10.811 + \frac{0.09164}{\sqrt{\lambda}}\right) + 8\right]^{-2}$$

取初值 $\lambda_1 = 0.0288$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$，可算的

$$\lambda_1 = 0.0288 \longrightarrow V_1 = 1.1997 \longrightarrow \mathrm{Re}_1 = 2.747 \times 10^5 \longrightarrow \lambda_2 = 0.02883$$

故迭代收敛值为 $\lambda = 0.0288$。

按 $\lambda = 0.0288$ 重新计算 V 和 Re，得 V=1.1997m/s，$\mathrm{Re} = 2.747 \times 10^5$。由于 Re 值有所变化，$\lambda$ 值也发生变化，但变化量很小可忽略。所以，流量值

$$Q=\frac{\pi}{4}d^2V=\frac{\pi}{4}\times0.3^2\times1.1997=0.0848m^3/s\approx80L/s$$

5-17 混凝土矩形断面渠道，底宽 b=1.2m,水深 h=0.8m，曼宁粗糙系数 n=0.014，通过流量 $Q=1m^3/s$。求水力坡度。

解 $V=\frac{Q}{bh}=\frac{1}{1.2\times0.8}m/s=1.042m/s, R=\frac{bh}{b+2h}=\frac{1.2\times0.8}{1.2+2\times0.8}m=0.343m$

由谢才公式（5-66），有

$$V=C\sqrt{RJ}=\frac{R^{2/3}}{n}\sqrt{J}.\text{得}$$
$$J=\frac{V^2n^2}{R^{4/3}}=8.86\times10^{-4}$$

5-18 镀锌铁皮风道，直径 d=500mm，流量 $Q=1.2m^3/s$，空气的运动粘度 $\nu=1.57\times10^{-5}m^2/s$。试判别流到壁面的类型，并求沿程损失系数 λ 的值。

解

$$V=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times1.2}{\pi\times0.5^2}m/s=6.112m/s$$
$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{6.112\times0.5}{1.57\times10^{-5}}=1.946\times10^5$$

假定为光滑区，用勃拉修斯公式（5-62b）估计 λ 值，有

$$\lambda_0=\frac{0.316}{\mathrm{Re}^{1/4}}=0.01505$$

依据光滑管公式（5-62），迭代算式为

$$\lambda=\left[2\lg\left(\frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}{2.51}\right)\right]^{-2}=\left[2\lg\left(\frac{1.946\times10^5\sqrt{\lambda}}{2.51}\right)\right]^{-2}$$
$$\text{或}\lambda=\left[2\lg\left(7.753\sqrt{\lambda}\right)+8\right]^{-2}$$

迭代计算时，取初值 $\lambda_1=0.015$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon=1.0\times10^{-3}$，得

$$\lambda_1=0.015,\lambda_2=0.01580\longrightarrow\lambda_3=0.01571\longrightarrow\lambda_4=0.01572$$

收敛值可取 $\lambda=0.0157$。依据式（5-35），得

$$\delta_0=\frac{32.8d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}=\frac{32.8\times0.5}{1.946\times10^5\times\sqrt{0.0157}}m=6.726\times10^{-4}m=67.26mm$$

查表 5-2 知，镀锌铁皮管 $k_s=0.15mm<0.4\delta_0$，流动为光滑管区的假定是正确的。

由哈兰德公式（5-56）即 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-1.8\lg\left[\left(\frac{k_s}{3.7d}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right]$，得

$$\lambda=\left\{-1.8\lg\left[\left(\frac{0.00015}{3.7\times0.5}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{1.946\times10^{5}}\right]\right\}^{-2}$$
$$=\left[-1.8\lg\left(2.877\times10^{-5}+3.546\times10^{-5}\right)\right]^{-2}=0.01756$$

利用 Colebrook 公式（5-64)，迭代算式为

$$\lambda=\left[-2\lg\left(\frac{k_s}{3.7d}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}=\left[-2\lg\left(\frac{0.00015}{3.7\times0.5}+\frac{2.51}{1.946\times10^{5}\times\sqrt{\lambda}}\right)\right]^{-2}$$
$$或\lambda=\left[-2\lg\left(0.8108+\frac{0.12898}{\sqrt{\lambda}}\right)+8\right]^{-2}$$

迭代计算时，取值 $\lambda_1=0.015$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon=1.0\times10^{-3}$，可算得

$$\lambda_1=0.015,\lambda_2=0.01797\longrightarrow\lambda_3=0.01777\longrightarrow\lambda_4=0.01778.$$

收敛值可取 $\lambda=0.0178$。可见，哈兰德公式与 Colebrook 公式相差 1.2%，比光滑管公式大 12%。三者中光滑管公式计算值 $\lambda=0.0157$ 较准确。

5-19 有一水管，管长 l=500m，管径 d=300mm，粗糙高度 $k_s=0.2mm$。若通过的流量为 Q=60L/s，水温 $T=20^0C$。

（1）判别流态；（2）计算沿程损失；（3）求流速剖面的表达式；（4）求断面平均流速与断面最大流速之比值 $V/\mu_{\max}$。

解 （1）水温 $T=20^0C$ 的运动粘度 $\nu=1.01\times10^{-6}m^2\ /s$。管流断面平均流速和雷诺数

$$V=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.06}{\pi\times0.3^2}=0.849(m/s)$$
$$\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{0.849\times0.3}{1.01\times10^{-6}}=2.522\times10^{5}>2000$$

该管流属于紊流流态。

（2）根据哈兰德公式（5-65)，即 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-1.8\lg\left[\left(\frac{k_s}{3.7d}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right]$，得

$$\lambda=\left\{-1.8\lg\left[\left(\frac{0.0002}{3.7\times0.3}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{2.522\times10^{5}}\right]\right\}^{-2}=0.01917$$

由达西公式（5-20)，得沿程损失

$$h_f=\lambda\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}=0.01917\times\frac{500}{0.3}\times\frac{0.849^2}{2\times9.8}m=1.175m$$

（3）由式（5-36b）即 $\mu_*=V\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$，得摩阻流速和粗糙雷诺数

$$\mu_* = V\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0.849\times\sqrt{\frac{0.01917}{8}}m/s = 0.0416m/s$$

$$\mathrm{Re}_* = \frac{\mu_* k_s}{\nu} = \frac{0.0416\times 0.2\times 10^{-3}}{1.01\times 10^{-6}} = 8.238$$

依据工业管道过度粗糙区的依据的判断 0.3< Re_* <70，可判定紊流属于过度粗糙区，流速剖面符合流速亏损对数律式（5-54）

即 $\dfrac{\mu_{\max}-\mu}{\mu_*} = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{r_0}{y}$.将$y = r_0 - r$ 代入，得流速剖面的表达式

$$\frac{\mu_{\max}-\mu}{\mu_*} = \frac{1}{k}\left[\ln r_0 - \ln(r_0 - r)\right]或\mu(r) = \mu_{\max} - \frac{\mu_*}{k}\left[\ln r_0 - \ln(r_0 - r)\right]$$

（4）应用式（5-55），得流速比值

$$\frac{V}{\mu_{\max}} = \frac{1}{1+1.326\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{1+1.326\times\sqrt{0.01917}} = 0.845$$

5-20 自引水池中引出一根具有三段不同直径的水管如图所示，已知 d=50mm,D=200mm,l=100m,H=12m,进口局部阻力系数 $\varsigma_1 = 0.5$,阀门$\varsigma_2 = 5.0$，沿程阻力系数 $\lambda = 0.03$。求管中通过的流量，并绘出总水头线和测管水头线。

解 设细管、粗管流速分别为V_1、V_2.依据式（5-77a），取参考流速V_1，算出突扩局部损失系数

$$\varsigma_E = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)^2 = 0.879$$

查表 5-4 中#3，取参考流速V_1，算出突缩局部损失系数

$$\varsigma_C = 0.5\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right) = 0.469$$

写出水池来流断面与管道出口之间的能量方程

$$H = \left(\lambda\frac{2.5L}{d} + \varsigma_1 + \varsigma_E + \varsigma_C + \varsigma_2 + 1\right)\frac{V_1^2}{2g} + \lambda\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g}$$

依据总流速连续性，得$V_2 = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 V_1 = \dfrac{V_1}{16}$。将它代入上式，且代入各项数据，得

$$12 = \left[0.03\times\frac{2.5\times 100}{0.05} + 0.5 + 0.879 + 0.469 + 5.0 + 1.0\right]\frac{V_1^2}{2g} + 0.03\times\frac{100}{0.02}\times\frac{1}{16^2}\frac{V_1^2}{2g}$$

$$或12 = 157.848\frac{V_1^2}{2g} + 0.586\frac{V_1^2}{2g}或\frac{V_1^2}{2g} = 0.07574$$

解出 $V_1 = 1.218m/s$。由此得流量

$$Q = V_1 \frac{\pi d^2}{4} = 1.218 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} m^3/s = 0.002392 m^3/s = 2.392 L/s$$

各段损失

流速水头：0.076m　　进口：0.038m

管段 1、3：11.39m　　突扩：0.067m

管段 2：　0.586m　　突缩：0.036m

管段 4：　5.69m　　阀门：0.038m

总水头和测管水头线如图所示。

5-21 图示逐渐扩大圆管，已知 $d_1 = 75mm, p_1 = 0.7at, d_2 = 150mm, p_2 = 1.4at, l = 1.5m,$ 流过的水流量 Q=56.6L/s，求其局部损失系数。

解 断面平均流速

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 0.0566}{\pi \times 0.075^2} m/s = 12.812 m/s$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 0.0566}{\pi \times 0.15^2} m/s = 3.203 m/s$$

写出两断面之间的能量方程

$$z_1 + \frac{P_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

或改写成

$$h_f = (z_1 - z_2) + \frac{P_1 - P_2}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}$$

将下面两式

$$z_1 - z_2 = l = 1.5m$$
$$\frac{P_1 - P_2}{g\rho} = \frac{(0.7 - 1.4) \times 9.8 \times 10^4}{9800} = -7m$$

代入能量方程，得

$$h_w = \left[1.5 + (-7) + \frac{12.812^2}{2g} - \frac{3.203^2}{2g}\right] m = 2.351 m$$

局部损失系数可写成

$$h_f = \varsigma_1 \frac{V_1^2}{2g} = \varsigma_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

由流速水头

$$\frac{V_1^2}{2g}=\frac{12.812^2}{2g}=8.375m,\frac{V_2^2}{2g}=\frac{3.203^2}{2g}=0.523m$$

得

$$\varsigma_1=\frac{h_f}{V_1^2/2g}=\frac{2.351}{8.375}=0.281,\varsigma_2=\frac{h_f}{V_2^2/2g}=\frac{2.351}{0.523}=4.495$$

5-22 流速由V_1变为V_2的突然扩大管如图所示，若中间加一中等直径的管径，使形成两次突然扩大，试求：（1）中间管段中流速取何值时总的局部水头损失最小；（2）计算总的局部损失与一次扩大时局部损失的比值。

解 （1）依据波达公式（5-76），总的局部损失为

$$h_f=\frac{(V-V_1)^2}{2g}+\frac{(V_2-V)^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left[2V^2+V_1^2+V_2^2-2V(V_1-V_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2g}\left[2\left(V-\frac{V_1-V_2}{2}\right)^2+\frac{1}{2}V(V_1-V_2)\right]$$

这表明，局部损失是 V 的函数$h_j=h_j(V)$，而函数$h_j(V)$是一条顶点朝下的抛物线，上式的平方项取 0 代表抛物线顶点，也就是$h_j(V)$的极小点，故，当$V=\dfrac{V_1+V_2}{2}$时h_j最小。

（2）当$V=\dfrac{V_1+V_2}{2}$时，$h_j(V)$的极小值为$h_j=\dfrac{1}{4g}(V_1-V_2)^2$。对比一次扩大的局部损失$h_j=\dfrac{1}{2g}(V_1-V_2)^2$，可知，二次扩大的局部损失仅为一次扩大损失的一半。

5-23 一直径 d=100mm 的小球，在静水中以匀速 w=0.4m/s 下降，水温为$T=20^0C$。试求小球所受到的阻力 F 和小球的密度ρ_s。

解 水温$T=20^0C$的运动粘度$\nu=1.01\times10^{-6}m^2/s$。绕流雷诺数

$$\mathrm{Re}=\frac{dV}{\nu}=\frac{0.01\times0.4}{1.01\times10^{-6}}=3960$$

查图 5-27 中圆球的$C_D\sim\mathrm{Re}$曲线，得$C_D=0.4$。按牛顿阻力公式（5-82），小球阻力

$$D=C_D\frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho w^2}{2}=0.4\times\frac{\pi\times0.01^2}{4}\times\frac{1000\times0.4^2}{2}N=2.51\times10^{-3}N$$

小球重力 G、浮力 F 与绕流阻力三者平衡，有

G=F+D

将重力$G=g\rho_s\dfrac{\pi d^3}{6}$和浮力$F=g\rho\dfrac{\pi d^3}{6}$代入，得

$$g\rho_s\frac{\pi d^3}{6}=g\rho\frac{\pi d^3}{6}+D$$

解出小球的密度

$$\rho_s=\rho+\frac{6D}{\pi g d^3}=\left(1000+\frac{6\times2.51\times10^{-3}}{\pi\times9.8\times0.01^3}\right)kg/m^3=1489kg/m^3$$

5-24 一竖井磨煤机，空气的上升流速 $\mu=2m/s$，运动粘度 $\nu=2\times10^{-5}m^2/s$，空气密度 $\rho_a=1kg/m^3$，煤颗粒的密度 $\rho_s=1500kg/m^3$。试求能够被上升气流带走的煤粉颗粒最大直径。

解 按牛顿阻力公式（5-82），煤粉颗粒的绕流阻力

$$D=C_D\frac{\rho_0\mu^2}{2}\frac{\pi d^2}{4}$$

将重力 $G=g\rho_s\frac{\pi d^3}{6}$ 和浮力 $F=g\rho_a\frac{\pi d^3}{6}$ 代入到受力平衡方程 G=F+D，可解出

$$d=\frac{3}{4}C_D\mu^2\frac{\rho_a}{\rho_s-\rho_a}=0.002C_D,\ \mathrm{Re}=\frac{\mu d}{\nu}=10^5 d$$

按阻力等价粒径（煤粉颗粒的 D 值与该粒径下球体的 D 相等），煤粉颗粒绕流可近似成球体绕流。利用上面两式，结合查图 5-27 中圆球的 $C_D\sim\mathrm{Re}$ 曲线，进行迭代计算，得

第 1 次猜测值 $d_0=0.002m,\mathrm{Re}=200,C_D=0.75,d=0.0015m$

第 2 次猜测值 $d_1=0.0016m,\mathrm{Re}=160,C_D=0.85,d=0.0017$

第 3 次猜测值 $d_2=0.00165m,\mathrm{Re}=165,C_D=0.82,d=0.00164m$

故被气流带走的最大煤粉颗粒 d=1.64mm。

5-25 某河道中有一圆柱形桥墩如图，圆柱直径 d=1m，水深 h=2m，河道中流速 V=3m/s。试求桥墩受到的水流作用力。

解 $\mathrm{Re}=\frac{Vd}{\nu}=\frac{3\times1}{1.01\times10^{-6}}=3\times10^6$。查图 5-28 中二维圆柱的 $C_D\sim\mathrm{Re}$ 曲线，得 $C_D=0.5$。故水流作用力

$$D=C_D\frac{\rho\nu^2}{2}(hd)=0.5\times\frac{1000\times3^2}{2}\times2\times1N=4500N$$

5-26（1）直径 0.5m、长 5m 的圆柱体受到流速 4m/s 水流的冲击。计算柱体受到的最大横向荷载和涡脱落频率；（2）计算直径 5m、长 20m 的圆柱形建筑物当风速 50m/s，时的最大横向风荷载。

解 （1）已知来流 $U_\infty=4m/s$，圆柱体 d=0.5m，l=5m。选取水体的密度 $\rho=1000kg/m^3$, 粘度 $\nu=1.01\times10^{-6}$. 算得圆柱体迎流总面积和绕流雷诺数

$$A = dl = 2.5m^2, \mathrm{Re} = U_\infty d/\nu = 2\times10^2$$

因为 Re 值小于失阻值，升力幅值应取 $C_L \approx 0.45$. 依据升力公式（5-88），得最大瞬间时升力

$$L = C_L A\frac{\rho U_\infty^2}{2} = 0.45\times2.5\times\frac{1000\times1^2}{2}N = 562.5N$$

在涡街频率公式（5-86）中，取 $S_t = 0.2$，得

$$f_s = \frac{SU_\infty}{d} = \frac{0.2\times1}{0.5} = 0.4Hz$$

故，柱体受到的最大瞬间横向荷载为 562.5N，涡脱落频率为 0.4Hz。

（2）已知来流风速 $U_\infty = 50m/s$，圆柱形 d=5m， l=20m。选取空气的密度 $\rho = 1.5kg/m^3$，粘度 $\nu = 1.57\times10^{-5}$。算得建筑物迎流总面积和绕流雷诺数

$$A = dl = 100m^2, \mathrm{Re} = U_\infty d/\nu = 1.59\times10^7$$

因为 Re 值小于失阻值，升力幅值应取 $C_L \approx 0.15$，依据升力公式（5-88），得最大瞬时升力

$$L = C_L A\frac{\rho U_\infty^2}{2} = 0.15\times100\times\frac{1.25\times50^2}{2}N = 23437.5N = 23.44kN$$

在涡街频率公式（5-86）中，取 $S_t = 0.25$，得

$$f_s = \frac{SU_\infty}{d} = \frac{0.25\times50}{5} = 2.5Hz$$

故，建筑物受到的最大瞬间横向荷载为 23.4kN，涡脱落频率为 2.5Hz。

第六章 孔口、管嘴出流与有压管流

6-1

解： 由 $h_j = \varsigma\frac{V_c^2}{2g}$，得

$$\varsigma = \frac{2gh_j}{V_c^2} = \frac{2\times9.8\times0.165}{6.86^2} = 0.06872$$

流速系数

$$\varphi \approx \frac{1}{\sqrt{1+\varsigma}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.06872}} = 0.9673$$

由 $\mu = \varepsilon\varphi$，可解出收缩系数

$$\varepsilon=\frac{\mu}{\varphi}=\frac{0.61}{0.9673}=0.631$$

由 $\varepsilon=A_c/A$，得 $\dfrac{d_c}{d}=\left(\dfrac{A_c}{A}\right)^{1/2}=\varepsilon^{1/2}$。故有

$$d_c=\varepsilon^{1/2}d=0.631^{1/2}\times 50mm=39.71mm$$

6-2

解：(1) 闸门开启时间 $T_v=h/v=2.0/0.05s=40s$。设 t 时刻闸室与下游的水位差为 z，孔口出流量为 Q。依据闸室水体的连续性方程，有

$$-Adz=Qdt$$

孔口面积为 bvt，利用孔口淹没出流算式（6-4），忽略行进流速水头，有

$$Q=\mu bvt\sqrt{2gz}$$

利用上面两式，有

$$Q=-\frac{dz}{dt}A=\mu bvt\sqrt{2gz} \qquad 或 \qquad -\frac{A}{\mu b\sqrt{2g}}\frac{1}{v}\frac{dz}{\sqrt{z}}=tdt$$

令

$$C=\frac{A}{\mu b\sqrt{2g}}=\frac{800}{0.65\times 4\times\sqrt{19.6}}=69.501$$

得

$$\frac{-C}{v}\frac{dz}{\sqrt{z}}=tdt$$

积分该式，得

$$\frac{-C}{v}\int_{H_1}^{H_1-y}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_0^{Tv}tdt \qquad 或 \qquad \frac{2C}{V}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_1-y}\right)=\frac{T_v^{\ 2}}{2}$$

解出 y 后将 $T_v=40s$ 代入，得

$$y=H_1-\left(\sqrt{H_1}-\frac{VT_V^2}{4C}\right)^2=\left[5-\left(\sqrt{5}-\frac{0.05\times 40^2}{4\times 69.501}\right)^2\right]m=1.204m$$

（2）当闸门全开后，有

$$\frac{-dz}{dt}A=Q=\mu bh\sqrt{2gz} \qquad 或 \qquad \frac{-C}{h}\frac{dz}{\sqrt{z}}=dt$$

设自闸门刚好抵达全开到水位平齐所需要的时间为 T_1，有

$$T_1=-\frac{C}{h}\int_{H_1-z}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{2C}{h}\sqrt{H_1-y}=\frac{2\times 69.501}{2}\times\sqrt{5-1.204}s=135.41s$$

闸室水位与下游平齐所需要的总时间

$$T=T_v+T_1=40+135.41=175.41s$$

6-3

解：　作用水头 $H=h+\dfrac{p_0}{g\rho}$。由孔口自由出流算式（6-2），

$$Q=\mu A\sqrt{2gH}=\mu A\sqrt{2g\left(h+\frac{p_0}{g\rho}\right)}$$

有
$$=0.61\times\frac{\pi}{4}\times 0.05^2\sqrt{2\times 9.8\times\left(1.8+\frac{70000}{9800}\right)}m^3/s$$

$$=0.0159\,m^3/s=15.9\,L/s$$

6-4

解：　按小孔口计算。右孔口为淹没出流，由算式（6-4），有

$$Q_1=\mu_1A_1\sqrt{2g(H_1-H_2)}$$

左孔口为自由出流，由算式（6-2），有

$$Q_2=\mu_2A_2\sqrt{2gH_2}$$

当水池两半部分的水面稳定后，有 $Q_1=Q_2$。

得

$$\mu_1A_1\sqrt{2g(H_1-H_2)}=\mu_2A_2\sqrt{2gH_2}$$

利用 $\mu_1=\mu_2$ 和 $A_1/A_2=(d_1/d_2)^2$，得

$$H_1-H_2=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4H_2$$

可解出左半部水面高度

$$H_2=\frac{H_1}{1+(d_2/d_1)^4}=\frac{4.8}{1+(0.125/0.1)^4}m=1.395m$$

取 $\mu_2=0.62$，得孔口的出流量

$$Q_1=Q_2=\mu_2A_2\sqrt{2gH_2}=0.62\times\frac{\pi}{4}\times 0.125^2\times\sqrt{2\times 9.8\times 1.395}\,m^3/s=0.0398\,m^3/s$$

6-5

解：　设孔口面积为 A，收缩断面的面积为 A_c、流速为 V，取收缩断面上游的所有水体为控制体。除了管嘴的进口断面各点上为大气压强外，控制体界面各处均为静压分布，故在水平向上控制体受到的合力为 $F = g\rho hA$。控制体动量的时间变化率等于单位时间穿越管嘴入口断面的动量，即 $\rho QV = \rho A_c V^2$。依据动量方程，有

$$\rho A_c V^2 = g\rho hA$$

或

$$V = \sqrt{gh\left(A/A_c\right)} = \sqrt{gh/\varepsilon}$$

由 $V = \varphi\sqrt{2gh}$，得 $\sqrt{gh/\varepsilon} = \varphi\sqrt{2gh}$。于是可解出

$$\varepsilon = \frac{1}{2\varphi^2}$$

（1）当不计损失时，有 $\varphi = 1.0$，$\varepsilon = \dfrac{1}{2\varphi^2} = 0.5$

这就是波达喷口收缩系数的理论值。

（2）当 $\zeta = 0.04$ 时，依据小口孔自由出流，有

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$$

得，$\varphi = 0.981$，且

$$\varepsilon = \frac{1}{2\varphi^2} = \frac{1+\zeta}{2} = \frac{1+0.04}{2} = 0.52，\quad \mu = \varepsilon\varphi = 0.510$$

$$Q = \mu A\sqrt{2gh} = 0.51 \times \frac{\pi}{4} \times 0.04^2 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 1.5}\, m^3/s = 0.00347\, m^3/s = 3.47\, L/s$$

6-6

解：　收缩损失　$\zeta = 0.04$

扩散损失　$\zeta_E = \left(\dfrac{A}{A_c} - 1\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 = \left(\dfrac{1}{0.52} - 1\right)^2 = 0.852$

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta+\zeta_E}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.04+0.852}} = 0.727$$

按管嘴的自由出流算式，有

$$Q=\mu A\sqrt{2gh}=0.727\times\frac{\pi}{4}\times0.04^2\times\sqrt{2\times9.8\times1.5}\,m^3/s=0.00495\,m^3/s$$

与 $Q=0.00347\,m^3/s$ 对比知，出流量增加 43%

6-7

解： 设管嘴出口断面面积 A，出口流速为 V。由已给定的 $\zeta=0.2$，可算出

流速系数

$$\varphi=\mu\approx\frac{1}{1+\zeta}=\frac{1}{\sqrt{1+0.2}}=0.913$$

喷口流速

$$V=\varphi\sqrt{2gz_0}=0.913\times\sqrt{2\times9.8\times5}\,m/s=0.913$$

水头损失

$$h_w=\zeta\frac{V^2}{2g}=0.2\times\frac{9.038^2}{2\times9.8}m=0.834m$$

可达到的高度

$$z_2=z_0-h_j=(5-0.934)m=4.166m$$

6-8

解： 按短管自由出流设计。取 $H_0\approx H$。理想流速

$$V_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8\times6}\,m/s=10.844\,m/s$$

由流量公式（6-8），有 $Q=\mu\frac{\pi}{4}d^2V_0$。解出管径

$$d=\left(\frac{4Q}{\mu\pi V_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{4\times10}{0.82\pi\times10.844}\right)^{1/2}m=1.197m$$

据此，可选取管径 $d=1.20m$，因为 $l=3.33d$，故满足管嘴要求 $l=(3\sim4)d$。

真空度

$$h_v=\frac{p_a-p_c}{g\rho}=0.75H_0=4.5m$$

6-9

解： 依据达西公式（5-20），有

$$h_{f1-2}=\lambda\frac{l_{12}}{d}\frac{V^2}{2g},\quad h_{f2-3}=\lambda\frac{l_{23}}{d}\frac{V^2}{2g}$$

得测压管 2、3 之间的沿程损失

$$h_{f2-3}=\frac{l_{23}}{l_{12}}h_{f1-2}=\frac{l_{23}}{l_{12}}(\nabla 1-\nabla 2)=\frac{2}{1}\times(1.5-1.25)m=0.5m$$

测压管 2、3 间的总损失可写成

$$h_{w2-3}=h_{f2-3}+\zeta\frac{\alpha V^2}{2g}$$

将 $h_{f2-3}=\frac{l_{23}}{l_{12}}h_{f1-2}=\frac{l_{23}}{l_{12}}(\nabla 1-\nabla 2)=\frac{2}{1}\times(1.25-0.4)m=0.85m$ 代入上式，解出烦闷的局部损失系数

$$\zeta=\frac{2g(h_{w2-3}-h_{f2-3})}{\alpha V^2}=\frac{2\times 9.8\times(0.85-0.5)}{3^2}=0.762$$

6-10

解： （1）依据式（6-14），写出短管的总损失系数

$$\zeta_c=\frac{\lambda}{d}\sum_i l_i+\sum_m\zeta_m=\frac{\lambda}{d}(l_1+l_2+l_3)+\zeta_1+2\zeta_2+\zeta_3$$
$$=\frac{0.026}{0.2}\times(3+5+4)+10+2\times 1.5+1.0=15.56$$

忽略断面 1、3 的流速水头，得作用水头 $H_0\approx H=2m$。依据短管淹没出流的流速算式（6-17），有

$$V=\frac{1}{\sqrt{\zeta_c}}\sqrt{2gH_0}=\frac{1}{\sqrt{15.56}}\sqrt{2\times 9.8\times 2}\,m/s=1.587\,m/s$$

得出流流量

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}V=\frac{\pi\times 0.2^2}{4}\times 1.587\,m^3/s=0.0499\,m^3/s$$

（2）管中压强最低点发生在第二弯头下游侧的断面 2。自断面 2 到下游水池断面 3 之间的损失系数为

$$\zeta'=\frac{\lambda}{d}l_3+\zeta_3=\frac{0.026}{0.2}\times 4+1=1.52$$

取基准面位于下游水池自由水面上。设断面 2 管顶处的压强为 $p_{\min}$，断面 2 各点上测管水头均等于管顶测管水头值，故断面 2、3 之间的能量方程可写成

$$H+h+\frac{p_{\min}}{g\rho}+\frac{\alpha V^2}{2g}=\zeta'\frac{V^2}{2g}$$

取 $\alpha\approx 1.0$，解得

$$\frac{p_{\min}}{g\rho}=-H-h-\frac{V^2}{2g}+\zeta'\frac{V^2}{2g}=-2-1+(1.52-1)\times\frac{1.587^2}{2\times 9.8}m=-2.933m$$

断面 2 管顶处的真空值为 $p_v=-p_{\min}=2.933mH_2O$。

第三段管道出口与下游水池液面平齐的部位上，压强为

$$\frac{p}{g\rho}=-\frac{V^2}{2g}=-\frac{1.587^2}{2\times 9.8}m=-0.128m$$

假如 V 很大，该断面的真空值会超过断面 2 管顶处的真空值。但本题流速比较小，故最低压强确实发生在断面 2.

6-11

解：　取进口损失 $\zeta_0=0.5$，出口损失 $\zeta_2=1.0$。正方形断面的水力半径 $R=b/4$。由式（6-14），短管的总损失系数为

$$\zeta_c=\frac{\lambda l}{4R}+\zeta_0+2\zeta_1+\zeta_2=\frac{0.024}{b}\times 50+0.5+2\times 0.2+0.1=\frac{1.2}{b}+1.9$$

作用水头 $H_0\approx z=3m$。依据淹没出流流量算式（6-18），有

$$Q^2=\frac{A^2}{\zeta_c}2gH_0 \quad 或 \quad 3^2=\frac{b^4}{1.2/b+1.9}2\times 9.8\times 3$$

整理后，得 b 的迭代式

$$b=\left[0.1531\times(1.2+1.9b)\right]^{1/5}$$

选用迭代初值 $b_0=1$，控制两次迭代值的相对误差在不大于 $\varepsilon=1.0\times 10^{-3}$，得

$$b_0=1\rightarrow b_1=0.8622\rightarrow b_2=0.8464\rightarrow b_3=0.8447\rightarrow b_4=0.8445$$

收敛值为 0.845.最后取倒虹吸管正方形断面的边长 $b=0.85m$

6-12

解：　设油塔自由面与管道出口断面间的高度差为 H。因为局部损失可忽略 ，按长管算式（6-21），有

$$H=\frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}lQ^2=\frac{8\times 0.032}{9.8\times\pi^2\times 0.2^5}\times 5000\times 0.022^2 m=20.02m$$

6-13

解：　将圆管水力半径 $R=d/4$ 代入到式（5-70），得

$$n=\frac{\lambda^{1/2}}{\sqrt{8g}}\left(\frac{d}{4}\right)^{1/6} \quad 或 \quad \lambda=8gn^2\left(\frac{4}{d}\right)^{1/3}$$

局部损失和沿程损失算式可写成

$$h_j=(\zeta_1+\zeta_2)\frac{V^2}{2g}，\ h_f=8gn^2\left(\frac{4}{d}\right)^{1/3}\frac{l}{d}\frac{V}{2g}$$

按照给定的长管近似条件 $h_j\le 0.05h_f$，得

$$(\zeta_1+\zeta_2)\frac{V^2}{2g}\le 0.4gn^2\left(\frac{4}{d}\right)^{1/3}\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

由该式可解除

$$\frac{l}{d}\geq\frac{\zeta_1+\zeta_2}{0.4gn^2}\left(\frac{d}{4}\right)^{1/3}=\frac{0.5+1.0}{0.4\times9.8\times n^2}\left(\frac{0.2}{4}\right)^{1/3}=\frac{0.141}{n^2}$$

当 $n=0.011\sim0.012$ 时，有 $l/d\leq1165\sim979$。故管道长度为 979~1165 倍管径时才能看作是长管。

6-14

解：　　该串联管路属于短管，应计入局部损失。取进口损失系数 $\zeta_1=0.5$，出口损失系数 $\zeta_2=1.0$。

设管段 2 的流速为 V，取 V 为参考流速。查表 5-4#3，管段 1 到管段 2 的突缩损失系数

$$\zeta_c{}'=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right)=0.5\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)\right]=0.5\left[1-\left(\frac{0.10}{0.15}\right)^2\right]=0.278$$

依据式（5-77a），管段 2 到管段 3 的突扩损失系数

$$\zeta_E=\left(1-\frac{A_2}{A_3}\right)^2=\left[1-\left(\frac{d_2}{d_3}\right)^2\right]^2=\left[1-\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^2\right]^2=0.563$$

依据式（6-13），将串联管路的总损失写成 $h_w=\zeta_c\left(V^2/2g\right)$，其中，总损失系数

$$\begin{aligned}
\zeta_c&=\sum_i\left(\frac{\lambda_i}{d_2}l_i\right)\left(\frac{d_2}{d_i}\right)^4+\sum_m\zeta_m\left(\frac{d_2}{d_m}\right)^4\\
&=\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4+\lambda_2\frac{l_2}{d_2}+\lambda_3\left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4+\zeta_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4+\zeta_v\left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4+\zeta_2\left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4+\zeta_c{}'+\zeta_E\\
&=0.024\times\frac{50}{0.15}\times\left(\frac{0.1}{0.15}\right)^4+0.025\times\frac{50}{0.1}+0.023\times\frac{50}{0.2}\times\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^4+0.5\times\left(\frac{0.1}{0.15}\right)^4+0.5\times\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^4\\
&+1.0\times\left(\frac{0.1}{0.2}\right)^4+0.278+0.563\\
&=1.580+12.5+0.359+0.099+0.031+0.063+0.278+0.563=15.473
\end{aligned}$$

选取基准面位于下游水库自由面上。作用说头 $H_0\approx H=15m$。由 $H=\zeta_cV^2/2g$，得管段 2 的流速水头和流速

$$\frac{V^2}{2g}=\frac{H}{\zeta_c}=\frac{15}{15.473}m=0.969m\qquad V=4.359\,m/s$$

各控制断面的测管水头和总能头列于计算表中，总水头线（H_0线）和测管水头线（H_p线）如图示。

6-15

解：　　各管段的流量

$$Q_3=q_D=0.005\,m^3/s$$

$$Q_2 = Q_3 + q_C = 0.005 + 0.01 = 0.015 m^3/s$$

$$Q_1 = Q_2 + q_B = 0.015 + 0.015 = 0.03 m^3/s$$

假定按长管估算，忽略局部损失和流速水头。依据总水头差算式（6-28），有

$$\begin{aligned} H &= S_1 l_1 Q_1{}^2 + S_2 l_2 Q_2{}^2 + S_3 l_3 Q_3{}^2 \\ &= \left(9.03 \times 500 \times 0.03^2 + 41.85 \times 400 \times 0.015^2 + 365.3 \times 300 \times 0.005^2\right) m \\ &= \left(4.064 + 3.767 + 2.740\right) m = 10.571 m \end{aligned}$$

管道轴线水平，D 点的最小服务水头 $h_e = 10m$。水泵出口 A 点的压强水头为

$$H + h_e = \left(10.571 + 10\right) m = 20.571 m$$

6-16

解：　管道较长，可按长管计算，局部损失和流速水头可忽略。按比阻公式（6-22），先计算各段的比阻值

BC 段：　$d_{BC} = 0.6m \quad l_{BC} == 3000m$，

$$S_{BC} = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5{}_{BC}} = 0.8271 \times \frac{0.4}{0.6^5} s^2/m^{-6} = 0.04255 s^2/m^{-6}$$

CE 段：　$d_{CE} = 0.3m \quad l_{CE} = 3000m$

$$S_{CE} = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5{}_{CE}} = 0.08271 \times \frac{0.04}{0.3^5} s^2/m^{-6} = 1.3615 s^2/m^{-6}$$

CD 段：　与 CE 段完全相同，$S_{CD} = S_{CE} = 1.3615 s^2/m^{-6}$ 设总流量为 Q，则 BC 段的流量为 Q，CE 段和 CE 段的流量为 $Q/2$ 管段阻力公式（6-26），各段的沿程损失可写成

$$h_{fBC} = S_{BC} l_{BC} Q^2 \quad , \quad h_{fCD} = h_{fCE} = S_c l_{CE} Q^2/4$$

由总水头差公式（6-28），得

$$\begin{aligned} H &= S_{BC} l_{BC} Q^2 + S_{CEe} l_{CE} Q^2/4 = Q^2\left(S_{BC} l_{BC} + S_{CE} l_{CE}/4\right) \\ &= Q^2\left(0.04255 \times 3000 + 1.3615 \times 3000/4\right) \\ &= 1148.78 Q^2 \end{aligned}$$

解出流量

$$Q = \left(\frac{H}{1148.78}\right)^{1/2} = 0.0723 m^3/s$$

6-17

解：　各管段的流量

$$Q_{CD} = q_D = 0.02 m^3/s$$

$$Q_{AB} = Q_{CD} + q_B = 0.02 + 0.045 = 0.65 m^3/s$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_{CD} = 0.02 m^3/s$$

将 $A^2R^{4/3} = (\pi d^2/4)^2 (d/4)^{4/3} = d^{16/3}/10.294$ 代入到比阻公式（6-22），得

$$S = \frac{n^2}{A^2R^{4/3}} = \frac{10.294n^2}{d^{16/3}} = \frac{10.294 \times 0.012^2}{d^{16/3}} = \frac{0.00148}{d^{16/3}}$$

将 d 值代入，得各管段的比阻值

$$S_{AB} = \frac{0.00148}{d_{AB}{}^{16/3}} = \frac{0.00148}{0.25^{16/3}} s^2/m^6 = 2.406 s^2/m^6$$

$$S_{CD} = S_1 = S_2 = \frac{0.00148}{d_{CD}{}^{16/3}} = \frac{0.00148}{0.15^{16/3}} s^2/m^6 = 36.725 s^2/m^6$$

（1）对于并联管路 1 和 2，有

$$h_{f1} = S_1 l_1 Q_1{}^2 \quad , \qquad h_{f2} = S_2 l_2 Q_2{}^2$$

由 $h_{f1} = h_{f2}$ 和 $S_1 = S_2$，得

$$l_1 Q_1{}^2 = l_2 Q_2{}^2 \quad 或 \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \sqrt{\frac{700}{350}} = 1.414$$

代入到 $Q_1 + Q_2 = 0.02 m^3/s$，得 $Q_2 + 1.414Q_2 = 0.02$，由此可解出

$$Q_2 = \frac{0.02}{1+1.414} = 0.0083 m^3/s = 8.3 L/s$$

$$Q_1 = 1.414 Q_2 = 0.0117 m^3/s = 11.7 L/s$$

（2）各管段的水头损失

$$h_{fAB} = S_{AB} l_{AB} Q^2{}_{AB} = 2.406 \times 500 \times 0.065^2 m = 5.083 m$$

$$h_{f1} = S_1 l_1 Q_1{}^2 = 36.725 \times 350 \times 0.0117^2 m = 1.760 m$$

$$h_{fCD} = S_{CD} l_{CD} Q^2{}_{CD} = 36.725 \times 300 \times 0.02^2 m = 4.407 m$$

水塔高度

$$H = h_{fAB} + h_{f1} + h_{fCD} + h_{eD}$$
$$= 5.083 + 1.760 + 4.407 + 10.0 m = 21.25 m$$

6-18

解：　（1）各节点的高程、水头和分流量列于表 1。依据分流值，可直接算出各管段的流量分配方案，见表 2.

选取经济流速 V=1.0m/s，利用式 $d=\left(\frac{4Q}{V\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=1.1284Q^{\frac{1}{2}}$，可算出初选直径值，且按照略大于初选直径的原则，选定各管段的直径（见表 2）。

按选定的直径，计算实际流速值 $V=\frac{4Q}{\pi d^2}$，结果列于表 2.

（2）利用曼宁粗糙率和下列比阻算式

$$S=\frac{n^2}{A^2R^{4/3}}=\frac{10.294n^2}{d^{16/3}}=\frac{10.294\times0.012^2}{d^{16/3}}=\frac{0.00148}{d^{16/3}}$$

计算各管段的比阻，且由 $h_{fi}=S_il_iQ_i^2$ 算出各管段的水头损失，列于表 2.

（3）管线 0-1-4-5 的总水头损失

$$h_{f0-5}=h_{f0-1}+h_{f1-4}+h_{f4-5}=(1.129+1.156+0.990)m=3.275m$$

管线 0-1-2-3 的总水头损失

$$h_{f0-3}=h_{f0-1}+h_{f1-2}+h_{f2-3}=(1.129+1.166+1.707)m=4.002m$$

（4）计算水塔水面的高度。以 5 点为控制点，得到

$$H_1=h_{f0-5}+z_5+h_{e5}=(3.275+2+8)m=13.28m$$

以 3 点为控制点，得

$$H_3=h_{f0-3}+h_{e3}=(4.002+8)m=12.00m$$

所以，水塔水面的高度选定为 13.28m。

6-19

解：（1）假定管段 4 的流动方向如图。管网共有 4 个节点 A、B、C、D，可列出 3 个连续方程：

$$\begin{cases}Q_1=Q_2+Q_3\\Q_2=q_4+Q_4\\Q_3=q_D-Q_4\end{cases}\text{或}\begin{cases}Q_1=0.045\\Q_2=0.025+Q_4\\Q_3=0.02-Q_4\end{cases}$$

管轴有 1 个闭合环，其水头损失的代数和为零。选取环路为逆时针方向，有

$$h_{f3}-h_{f4}-h_{f2}=0\text{或}S_3l_3Q_3^2-S_4l_4Q_4^2-S_2l_2Q_2^2=0$$

事（2）~（4）构成联立方程组，含 3 个方程、3 个未知数 $Q_2\sim Q_4$，具有确定数的解。因为只有 1 个闭合环，故方程组仅含 1 个二次方程，能够直接求解，没有必要迭代。

（2）由比阻算式

$$S=\frac{n^2}{A^2R^{4/3}}=\frac{10.294n^2}{d^{16/3}}=\frac{10.294\times0.011^2}{d^{16/3}}=\frac{0.00125}{d^{16/3}}$$

算得各管段的比阻值见计算表。将式（2）和（3）代入（4），并代入各项数据，得到

$$1000\times 30.859\times(0.02-Q_4)^2-500\times 268.246\times Q_4^2$$
$$-1000\times 6.635\times(0.025+Q_4)^2=0$$

整理得

$$(Q_4\times 10^3)^2+14.256(Q_4\times 10^3)-74.6=0$$

从该方程中解出

$$Q_4\times 10^3=\frac{-14.256+\sqrt{14.256^2+4\times 1\times 74.6}}{2}m^3/s$$
$$=\frac{-14.256+22.397}{2}m^3/s=4.07m^3/s$$

或 $Q_4=4.07L/s$

这里，$Q_4>0$ 表明图中设定的流动方向是正确的。利用式（2），得

$$Q_2=25.0+Q_4=(25.0+4.07)L/s=29.07L/s$$

利用式（3），得

$$Q_3=20-Q_4=(20-4.07)L/s=15.93L/s$$

（3）按 $h_{fi}=S_i l_i Q_i^2$ 各管段的损失，见计算表。

（4）检查环路的闭合差

6-20

解：（1）将下列数据代入声速公式（6-44）

$$\alpha_p=4.90\times 10^{-10}Pa(\text{水温}10^0C),\rho=1000.0kg/m^3,$$
$$d=0.1m,\delta=0.007m,E=2.06\times 10^{11}Pa$$

得

$$c_0=\left[\rho\left(\alpha_p+\frac{d}{\delta E}\right)\right]^{-1/2}=\left[1000\times\left(4.90\times 10^{-10}+\frac{0.1}{0.007\times 2.06\times 10^{11}}\right)\right]^{-1/2}m/s$$
$$=1337.1m/s(\text{忽略管壁弹性时}c_0=1428.5m/s)$$

注：若按水温 0^0C 和 10at 估计，查表 1-1、1-4，得

$$\rho=999.9kg/m^3,\alpha_p=0.536\times 10^{-9}at=5.257\times 10^{-10}Pa$$

将它们以及 $d=0.1m,\delta=0.007m,E=2.06\times 10^{11}Pa$ 代入声速公式（6-44），得

$$c_0=\left[\rho\left(\alpha_p+\frac{d}{\delta E}\right)\right]^{-1/2}=\left[999.9\times\left(5.257\times 10^{-10}+\frac{0.1}{0.007\times 2.06\times 10^{11}}\right)\right]^{-1/2}m/s$$
$$=1296.4m/s(\text{忽略管壁弹性时}c_0=1379.3m/s,\text{该数值偏小})$$

由经验公式 $c = 1447.00 + 4.0(T - 10.0) + 0.16p$（其中 T 的单位为 ^0C，p 的单位为 at）知，温度上升 10^0C 时，声速增大 40.0m/s。下列计算 $c_0 = 1337.1m/s.$

（2）突然关闭阀门产生的最大水击压强

$$\Delta p = \rho c V_0 = (1000 \times 1337.1 \times 1.0)Pa = 1.34 \times 10^6 Pa$$

（3）水击波的相长

$$T_p = 2l/c = (2 \times 1000/1337.1)s = 1.50s$$

为了避免直接水击，阀门关闭时间应大于 1.5 秒。

6-21 将题 6-20 中的钢管改为 $E = 8.73 \times 10^7 N/cm^2$ 的铸铁管，其它条件均相同，直接水击的最大水击压强有何变化？

解　　已知数据

$$\alpha_p = 4.90 \times 10^{-10} Pa(\text{水温}10^0C), \rho = 1000.0kg/m^3,$$
$$d = 0.1m, \delta = 0.007m, E = 8.73 \times 10^{11} Pa$$

代入声速公式（6-44），得

$$c_0 = \left[\rho\left(\alpha_p + \frac{d}{\delta E}\right)\right]^{-1/2} = \left[1000 \times \left(4.90 \times 10^{-10} + \frac{0.1}{0.007 \times 8.73 \times 10^{11}}\right)\right]^{-1/2} m/s$$
$$= 1405.2m/s$$

直接水击的最大压强

$$\Delta p = \rho c V_0 = (1000 \times 1405.2 \times 1.0)Pa = 1.41 \times 10^6 Pa$$

比钢管略有增大。

6-22 对于 6.4.3 节中图 6-20 所示水击波，不计水头损失，试绘制下列位置的 V(t)、p（t）波形：（1）管道进口；（2）距离进口 L/4；（3）距离进口 3L/4 处；（4）管道出口。

答 （1）管道进口-----见题图 a； （2）距离进口 L/4----见图 b

（3）距离进口 3L/4 处---见图 c （4）管道出口---见图题 d。

第七章　明渠流动

7-1.

解： 查表 7-3，$n = 0.025$

底坡 $i = \dfrac{\Delta h}{l} = \dfrac{0.30}{150} = 0.002$

$$A = bh = 1.6 \times 1 = 1.6m^2$$

$$\chi = b + 2h = 1.6 + 2 \times 1.0 = 3.6m$$

$$R = \frac{A}{\chi} = 0.444m$$

$$Q=\frac{1}{n}AR^{2/3}i^{1/2}=\frac{1}{0.025}\times1.6\times0.444^{2/3}\times0.0002^{12}=1.665\,m^3/s$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{1.665}{1.6}=1.04\,m/s$$

7-2.

解： $A=（b+mh)h=(2.0+1.5\times0.8)\times0.8=2.56m^2$

$$\chi=b+2h\sqrt{1+m^2}=2+2\times0.8\times\sqrt{1+1.5^2}=4.88m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{2.56}{4.88}=0.524m$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{0.025}0.524^{1/6}=35.9$$

$$Q=AC\sqrt{Ri}=2.56\times35.9\times\sqrt{0.524\times0.0006}=1.63\,m^3/s$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{1.63}{2.56}=0.64\,m/s$$

7-3.

解： 查表 7-3，取 $n=0.014$

对于矩形断面，水力最优 $b=2h$

$$A=bh=2h^2$$

$$\chi=b+2h=4h$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{h}{2}$$

$$Q=\frac{1}{n}AR^{2/3}i^{1/2}=\frac{1}{n}2h^2(\frac{h}{2})^{2/3}i^{1/2}=\frac{1}{n}2^{1/3}R^{8/3}i^{1/2}$$

$$\therefore h=\frac{(nQ)^{3/8}}{2^{1/8}i^{3/16}}=\frac{(0.014\times8)^{3/8}}{2^{1/8}\times0.005^{3/16}}=1.09m$$

$$b=2h=2\times1.09=2.18m$$

7-4.

解： $A=bh_0=3\times1.5=4.5m^2$

$$\chi=b+2h_0=3+2\times1.5=6m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{4.5}{6}=0.75m$$

按巴氏公式， $R<1m$

$$y=1.5\sqrt{n}=0.237$$

$$C=\frac{1}{n}R^{y}=\frac{1}{0.025}\times 0.75^{0.237}=37.36$$

$$K=AC\sqrt{R}=4.5\times 37.36\times\sqrt{0.75}=145.6\,m^{3}/s$$

$$i=(\frac{Q}{K})^{2}=(\frac{6}{145.6})^{2}=0.0017$$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{6}{4.5}=1.33\,m/s$$

若采用 $C=\frac{1}{n}R^{1/6}=\frac{1}{0.025}\times 0.75^{1/6}=38.13\,m^{3}/s$

$$K=148.6$$

$$i=(\frac{Q}{K})^{2}=0.0016$$

7-5.

解： 由 $Q=\frac{1}{n}A^{5/3}\chi^{-2/3}i^{1/2}$ 可得

$$i=(\frac{Qn}{A^{5/3}\chi^{-2/3}})^{2}$$

$$A=(b+mh_{0})h_{0}=(5+1\times 2)\times 2=14m^{2}$$

$$\chi=b+2h_{0}\sqrt{1+m^{2}}=5+2\times 2\times\sqrt{1+1^{2}}=10.66m$$

$$i=(\frac{15\times 0.0225}{14^{5/3}\times 10.66^{-2/3}})^{2}=0.0004$$

7-6.

解： $A=(b+mh_{0})h_{0}=(1.6+1.5\times 1)\times 1=3.1m^{2}$

$$\chi=b+2h_{0}\sqrt{1+m^{2}}=1.6+2\times 1.0\times\sqrt{1+1.5^{2}}=5.2m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{3.1}{5.2}=0.6$$

$$i=\frac{\Delta z}{l}=\frac{0.03}{100}=0.0003$$

$$n=\frac{A}{Q}R^{2/3}i^{1/2}=\frac{3.1}{1.52}\times 0.6^{2/3}\times 0.0003^{1/2}=0.025$$

7-7.

解： 根据题意良好土壤，取 $n=0.0225$

梯形断面 $A=(b+mh)h$， $A=\frac{Q}{V}$，

$$\therefore (b+mh)h=\frac{Q}{V}$$

$$b=\frac{Q}{Vh}-mh=\frac{40}{0.8\times2.5}-1.5\times2.5=16.25m$$

均匀流 $V=\frac{1}{n}R^{2/3}i^{1/2}$

$$\chi=b+2h_0\sqrt{1+m^2}=16.25+2\times2.5\times\sqrt{1+1.5^2}=25.26m$$

$$A=(b+mh)h=(16.25+1.5\times2.5)\times2.5=50m^2$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{50}{25.26}=1.979m$$

$$i=\frac{n^2V^2}{R^{4/3}}=\frac{0.0225^2\times0.8^2}{1.979^{4/3}}=0.00013$$

7-8.

解： 按梯形断面水力最优条件

$$\beta=2(\sqrt{1-m^2}-m)=2(\sqrt{1-1.5^2}-1.5)=0.606$$

$$b=\beta h_0$$

$$A=(b+mh_0)h_0=(0.606h_0+1.5h_0)h_0=2.106h_0$$

$$\chi=b+2h_0\sqrt{1+m^2}=0.606h_0+2h_0\sqrt{1+1.5^2}=4.212h_0$$

代入 $Q=\frac{1}{n}A^{5/3}\chi^{-2/3}i^{1/2}$，有

$$2.5=\frac{1}{0.025}\times(2.106h_0{}^2)^{5/3}\times(4.212h_0)^{-2/3}\times0.0015^{1/2}$$

解得 $h_0=1.08m$

$$b=0.606h_0=0.65m$$

校核：$A=2.106h_0{}^2=2.46m^2$

$$V=\frac{Q}{A}=1.02\,m/s$$

7-9.

解： $A=bh_0=1.2b$

$$\chi=b+2h_0=2.4+b$$

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{1.2b}{2.4+b}$$

$$K = AC\sqrt{R} = \frac{1}{n}R^{2/3}A = \frac{1}{n}\chi^{-2/3}A^{5/3} = \frac{(1.2b)^{5/3}}{n(b+2.4)^{2/3}}$$

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{3.2}{\sqrt{0.0005}} = 143.1m^3/s$$

试算求得 $b = 3.1m$

7-10.

解：由 $Q=K\sqrt{i}$ 得

$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{30}{\sqrt{0.002}} = 67.08m^3/s$$

$$K = AC\sqrt{R} = \frac{1}{n}R^{2/3}A = \frac{1}{n}\chi^{-2/3}A^{5/3} = \frac{\left[(b+mh)h\right]^{5/3}}{n\left(b+2h\sqrt{1+m^2}\right)^{2/3}} = \frac{\left[(1.2+h)h\right]^{5/3}}{0.0225\times(1.2+2.828h)^{2/3}}$$

试算求得 $h_0 = 1.0m$

7-11.

解：查表 7-6，当 $d = 900mm$ 时，$\alpha = \frac{h}{d} = 0.75;$ 再从表 7-4 查得，当 $d = 900mm$，$K_d = 18.12$；查表 7-5，当 $\alpha = 0.75$ 时，

$$\overline{Q} = 0.9124, A = 0.6318d^2$$

$$Q = \overline{Q}K_0\sqrt{i} = 0.9124\times18.12\times\sqrt{0.001} = 0.523m^3/s$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.525}{0.6138\times0.9^2} = 1.052m/s$$

或查表 7-6，当 $d = 900mm$ 时，$\alpha = \frac{h}{d} = 0.75$；查图 7-6，$\alpha = 0.75$，得 $\frac{Q}{Q_0} = 0.93$，

$$\frac{V}{V_0} = 1.176$$

而 $Q_0 = \frac{1}{n}A_0^{5/3}\chi_0^{-2/3}i^{1/2}$

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = 0.636m^2$$

$$\chi_0 = \pi d = 2.827m$$

$$\therefore Q_0 = \frac{1}{0.0013}\times0.636^{5/3}\times2.827^{-2/3}\times0.001^{1/2} = 0.572m^3/s$$

$$Q = 0.93 \times 0.572 = 0.532\, m^3/s$$

$$V_0 = \frac{Q_0}{A_0} = 0.899\, m/s$$

$$V = 1.176 \times 0.899 = 1.058\, m/s$$

7-12.

解： 查表 7-5，当 α=0.75 时，$\overline{Q}$=0.9124，

$$Q_0 = \frac{Q}{\overline{Q}} = 1.436\, m^3/s$$

$$K_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{i}} = \frac{1.436}{\sqrt{0.0035}} = 24.27\, m^3/s$$

而 $K_0 = \frac{1}{n} AR^{2/3} = \frac{1}{0.013} \times 0.785 \times d^2 \times \left(\frac{d}{4}\right)^{2/3} = 23.96 d^{8/3}$

解得 $d = \left(\frac{24.27}{23.96}\right)^{3/8} = 1.0m$

7-13.

解：查表 7-6，当 $d = 600mm$ 时，最大设计充满度 $\alpha = 0.75$；查表 7-5，当 $\alpha = 0.75$ 时

$$\overline{Q} = 0.9124$$

$$Q_0 = \frac{Q}{\overline{Q}} = \frac{0.4}{0.9124} = 0.438\, m^3/s$$

查表 7-4，当 $d = 0.6m$ 时

$$K_0 = 6.15\, m^3/s$$

$$i = \left(\frac{Q_0}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{0.438}{6.15}\right)^2 = 0.005$$

7-14.

解：复式断面

主槽部分（近似为矩形断面）

$$A_1 = 20 \times 5 = 100 m^2$$

$$\chi_1 = 5 + 20 + (5 - 1.5) = 28.5m$$

$$R_1=\frac{A_1}{\chi_1}=3.509m$$

$$Q_1=\frac{1}{n}A_1R_1^{2/3}i^{1/2}=\frac{1}{0.03}\times100\times3.509^{2/3}\times0.0005^{1/2}=172.1m^3/s$$

边滩部分

$$A_2=70\times1.5=105m^2$$

$$\chi_2=70+1.5=71.5m$$

$$R_2=\frac{A_2}{\chi_2}=\frac{105}{71.5}=1.469m$$

$$Q_2=\frac{1}{n}A_2R_2^{2/3}i^{1/2}=\frac{1}{0.04}\times105\times1.469^{2/3}\times0.0005^{1/2}=75.9m^3/s$$

$$Q=Q_1+Q_2=172.1+75.9=248m^3/s$$

7-15.

解：$A=bh=0.5\times0.8=0.4m^2$

$$\chi=2h+b=1.8m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=0.222$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=31.13$$

$$Q=AC\sqrt{Ri}=0.4\times31.13\times\sqrt{0.222\times0.0008}=0.166m^3/s$$

7-16.

解：$A=\left(b+mh\right)h=\left(0.4+1.0\times0.6\right)\times0.6=0.6m^2$

$$\chi=2h\sqrt{1+m^2}+b=2.097m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=0.286$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=32.47$$

$$Q=AC\sqrt{Ri}=0.147m^3/s$$

7-17.

解：（1）Fr 数法 $V=\dfrac{q}{h_0}=\dfrac{6}{3}=2m/s$

$$Fr=\frac{V}{\sqrt{gh_0}}=\frac{2}{\sqrt{9.8\times 3}}=0.369<1.0 \quad \therefore \text{为缓流}$$

（2）$h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1.0\times 6^2}{9.8}}=1.543m<h_0=3m \quad \therefore$ 为缓流

（3）$c=\sqrt{gh_0}=\sqrt{9.8\times 3}=5.42\,m/s>2\,m/s \quad \therefore$ 为缓流

7-18.

解：（1）临界水深法 $q=\frac{Q}{b}=\frac{9.6}{4}=2.4\,m^2/s$

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}=\sqrt[3]{\frac{1.1\times 2.4^2}{9.8}}=0.865m<h_0=1.2m \quad \therefore \text{为缓流}$$

（2）波速法 $c=\sqrt{gh_0}=\sqrt{9.8\times 1.2}=3.43\,m/s$

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{9.6}{4.8}=2\,m/s<c \quad \therefore \text{为缓流}$$

（3）Fr 数法 $Fr=\frac{V}{\sqrt{gh_0}}=\frac{2}{\sqrt{9.8\times 1.2}}=0.583<1.0 \quad \therefore$ 为缓流

（4）临界底坡法 $A_c=bh_c=4\times 0.865m^2=3.46m^2$

$$\chi_c=b+2h_c=4+2\times 0.865=5.73m$$

$$R_c=\frac{A_c}{\chi_c}=0.604m$$

$$C_c=\frac{R^{1/6}}{n}=36.77$$

$$i=\frac{Q^2}{A_C^2C_C^2R_C}=\frac{9.6^2}{3.46^2\times 36.77^2\times 0.604}=0.0094>i=0.0009 \quad \therefore \text{为缓流}$$

7-19.

解：$A=bh_0=5\times 2.5=12.5m^2$

$$\chi=b+2h_0=5+2\times 2.5=10m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=1.25m$$

$$c=\frac{R^{1/6}}{n}=\frac{1.25^{1/6}}{0.014}=74.135$$

$$i=\frac{Q^2}{A^2c^2R}=\frac{33^2}{12.5^2\times 74.135^2\times 1.25}=0.001$$

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}=\sqrt[3]{\frac{1.0\times 33^2}{9.8\times 5^2}}=1.64m<h_0=2.5m$$

∴ 为缓流

7-20.

解：$A=bh_0=4\times 2.5=10m^2$

$$\chi=b+2h_0=4+2\times 2.5=9m$$

$$R=\frac{A}{\chi}=1.11m$$

$$c=\frac{R^{1/6}}{n}=67.85$$

实际坡底 $i=\frac{Q^2}{A^2c^2R}=\frac{25^2}{10^2\times 67.85^2\times 1.11}=0.0012$

$$h_C=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 25^2}{9.8\times 4^2}}=1.586m$$

$$A_C=bh_C=4\times 1.586=6.34m^2$$

$$\chi_C=b+2h_C=4+2\times 1.586=7.172m$$

$$R_C=\frac{A_C}{\chi_C}=\frac{6.34}{7.172}=0.884m$$

$$c_C=\frac{R_C^{1/6}}{n}=65.31$$

$$i_C=\frac{g}{c_c^2}\frac{\chi_c}{b}=\frac{9.8}{65.31^2}\times\frac{7.172}{4}=0.0041>i=0.0012$$

∴ 为缓流

7-21.

解：（1） $q=\frac{Q}{b}=\frac{60}{5}=12\,m^2/s$

$$Fr_1^2=\frac{q^2}{gh'^3}=\frac{12^2}{9.8\times 0.8^3}=28.7$$

$$h''=\frac{h'}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1\right)=5.67m$$

（2） $$\Delta E_j=\frac{\left(h''-h'\right)^3}{4h'h''}=6.38m$$

$$\frac{\Delta E_j}{E_1}=\frac{\Delta E_j}{h'+q^2/2gh'}=\frac{6.38}{12.28}=51.95\%$$

第八章　堰流

8-1.

解：$m_0=(0.405+\frac{0.0027}{H})\left[1+0.55(\frac{H}{H+P})^2\right]=0.446$

$$Q=m_0b\sqrt{2g}H^{3/2}=0.195m^3/s$$

8-2.

解： $Q=1.4H^{5/2}$

$$H=\left(\frac{Q}{1.4}\right)^{2/5}=0.241m$$

相应 $P\geq 2H=0.482m$

$$B=1m>(3\sim 4)H=0.723\sim 0.964m$$

符合要求

8-3.

解： $m_0=\left(0.405+\frac{0.0027}{H}\right)\left[1+0.55\left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right]=0.438$

$$b=\frac{Q}{m_0\sqrt{2g}H^{3/2}}=1.0m$$

8-4.

解： $Q=1.4H^{5/2}$

当 $\frac{\Delta H}{H}=1.0\%$ 时

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\left|Q'-Q\right|}{Q}=\frac{\left|H^{5/2}-\left(H+\Delta H\right)^{5/2}\right|}{H^{5/2}}$$

$$=\left|1-\left(1+\frac{\Delta H}{h}\right)^{5/2}\right|=\left|1-\left(1\pm 0.01\right)^{5/2}\right|=2.5\%$$

8-5.

解： $Q=0.42b\sqrt{2g}H^{3/2}=1.86bH^{3/2}$

$$b=\frac{Q}{1.86H^{3/2}}=\frac{0.3}{1.86\times0.2^{3/2}}=1.8m$$

8-6.

解： 此题只能试算

第一次近似取 $H=1.0m$

$$h_S=h_1-p_2=1.75-0.8=0.95m$$

$$\frac{h_S}{H}=\frac{0.95}{1}=0.95>0.8$$ 为淹没出流

查表 8-2 得 $\sigma_S=0.65$，再由 $\frac{P_1}{H}=\frac{0.8}{1}=0.8<3$

$$m=0.36+0.01\frac{3-P_1/H}{1.2+1.5P_1/H}=0.36+0.01\frac{3-0.8}{1.2+1.5\times0.8}=0.3692$$

$$Q=\sigma_s mb\sqrt{2g}H^{3/2}=0.65\times0.3692\times4.8\times\sqrt{2g}\times1^{3/2}=5.1m^3/s<12m^3/s$$

第二次近似，取 $H=1.26m$

$$\frac{h_s}{H}=\frac{0.95}{1.26}=0.75<0.8$$ 为自由出流

$$m=0.36+0.01\frac{3-\frac{0.8}{1.26}}{1.2+1.5\times\frac{0.8}{1.26}}=0.3710$$

$$Q=0.371\times4.8\times\sqrt{2g}\times1.26^{3/2}=11.158m^3/s$$

$$V_0=\frac{Q}{b(P_1+H)}=\frac{11.158}{4.8\times(0.8+1.26)}=1.128m/s$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}=1.26+\frac{1\times1.128^2}{2\times9.8}=1.325m$$

$$Q=mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}=0.371\times4.8\times\sqrt{2g}\times1.325^{3/2}=12.02m^3/s\approx12m^3/s$$

∴第二次假设合理，最后求得 $H=1.26m$

8-7.

解： (1)求堰宽 b　过堰流量 $Q=22.0m^3/s$

有 $\frac{P_1}{H}=\frac{3.4}{0.86}=3.95>3$，故 $m=0.36$

$$b=\frac{Q}{m\sqrt{2g}H^{3/2}}=\frac{22}{0.36\times\sqrt{2\times9.8}\times0.86^{3/2}}=17.31m$$

$$V_0=\frac{Q}{b\left(P_1+H\right)}=\frac{22}{17.31\times\left(3.4+0.86\right)}=0.30\,m/s$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}=0.86+\frac{1.0\times3.0^2}{2\times9.8}=0.865m$$

$$Q=mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}=0.36\times17.31\times\sqrt{2\times9.8}\times0.865^{3/2}=22.195\,m^3/s>22\,m^3/s$$

重设 $b=17.15m$

$$V_0=\frac{22}{17.15\times\left(3.4+0.86\right)}=0.294\,m/s$$

$$H_0=H+\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}=0.8644m$$

$$Q=0.36\times17.15\times\sqrt{2\times9.8}\times0.844^{3/2}=21.97\,m^3/s\approx22\,m^3/s$$

$\therefore$ 取 $b=17.15m$

（2）由不淹没堰条件 $h_S<0.8H_0=0.8\times0.8644=0.691m$

$$h_t\le P+h_s=3.4+0.691=4.091m$$

8-8.

解：判别出流条件

$$h_s=h_t-P_2=0.8-0.6=0.2m$$

$0.8H_0>0.8H=0.8\times1.2=0.96m>h_s$ 为自由溢流

$b<B$ 有侧收缩

$$\varepsilon=1-\frac{\alpha}{\sqrt[3]{0.2+P_1/H}}\sqrt[4]{\frac{b}{B}}\left(1-\frac{b}{B}\right)=1-\frac{0.10}{\sqrt[3]{0.2+\frac{0.6}{1.2}}}\sqrt[4]{\frac{4}{5.5}}\left(1-\frac{4}{5.5}\right)=0.972$$

$$m=0.32+0.01\frac{3-P_1/H}{0.46+0.75P_1/H}=0.32+0.01\frac{3-\frac{0.6}{1.2}}{0.46+0.75\times\frac{0.6}{1.2}}\approx0.35$$

$$Q=\varepsilon mb\sqrt{2g}H_0^{3/2}$$

其中 $H_0=H+\frac{\alpha_0V_0^2}{2g}$，$V_0=\frac{Q}{b\left(P_1+H\right)}$，用迭代法求解

第一次取 $H_{01}\approx H$

$$Q_1=\varepsilon mb\sqrt{2g}H_{01}^{3/2}=0.35\times0.972\times4\times\sqrt{2\times9.8}\times1.2^{3/2}=7.92\,m^3/s$$

$$V_{01}=\frac{Q}{b(P_1+H)}=\frac{7.92}{4\times(1.2+0.6)}=1.1\,m/s$$

第二次取 $H_{02}=H+\dfrac{\alpha_0V_{01}^2}{2g}=1.26m$

$$Q_2=\varepsilon mb\sqrt{2g}H_{02}^{3/2}=8.54\,m^3/s$$

$$V_{02}=\frac{Q_2}{b(P_1+H)}=1.186\,m/s$$

第三次取 $H_{03}=H+\dfrac{\alpha_0V_{02}^2}{2g}=1.272m$

$$Q_3=8.64\,m^3/s\qquad V_{03}=1.2\,m/s$$

第四次取 $H_{04}=H+\dfrac{\alpha_0V_{03}^2}{2g}=1.273m$

$$Q_4=8.65\,m^3/s$$

$$\frac{Q_4-Q_3}{Q_4}=0.1\%<1\%$$

故过堰流量为 $Q=8.65\,m^3/s$

8-9.

解： 此题只能试算，无侧收缩

第一次近似，取 $H=1.0m$

$$h_s=h_t-p_2=1.15-0.50=0.65m$$

$\dfrac{h_s}{H}=\dfrac{0.65}{1}=0.65<0.8$ 为自由出流

$$\frac{P_1}{H}=\frac{0.5}{1}=0.5<3$$

$$m=0.32+0.01\frac{3-P_1/H}{0.46+0.75P_1/H}=0.32+0.01\frac{3-0.5}{0.45+0.75\times0.5}=0.35$$

$$Q=mb\sqrt{2g}H^{3/2}=0.35\times30\times\sqrt{2\times9.8}\times1.2^{3/2}=46.51m^3/s$$

再取 $H=1.18m$，$\dfrac{P_1}{H}=\dfrac{0.5}{1.18}=0.424$

$$m=0.32+0.01\frac{3-0.424}{0.46+0.75\times 0.424}=0.353$$

$$Q=0.353\times 30\times\sqrt{2\times 9.8}\times 1.18^{3/2}=60.09\,m^3/s$$

$\therefore$ 第二次假设合理，最后求得 $H=1.18m$

8-10.

解：(1) 计算临界水深

$$h_c=\frac{\alpha\psi^2V_m^2}{g}=\frac{1.0\times 0.85^2\times 4^2}{9.8}=1.18m$$

$1.3h_c=1.53m>h_t=1.0m$ 为自由出流

(2) $b=\dfrac{Q}{\varepsilon\psi h_cV_m}=\dfrac{35}{0.90\times 0.85\times 1.18\times 4}=9.69m$

取标准孔径 $B=10m$

(3) 重新计算 h_c

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{(\varepsilon B)^2g}}=\sqrt[3]{\frac{1\times 35^2}{(0.9\times 10)^2\times 9.8}}=1.156m$$

$1.3h_c=1.5m>h_t=1.0m$ 为自由出流

$$V=\frac{Q}{\varepsilon B\psi h_c}=\frac{35}{0.90\times 10\times 0.85\times 1.156}=3.98\,m/s<[V]_{\max}$$

不会发生冲刷

(4) 验证桥前壅水水深

$$H\approx H_0=\frac{V^2}{2g\varphi^2}+\psi h_c=\frac{3.96^2}{2\times 9.8\times 0.9^2}+0.85\times 1.156=1.97m<H'=2.2m$$

满足设计要求

第九章 渗流

9-1.

解：$z^2-h_0^2=\dfrac{0.73Q}{k}\lg\dfrac{r}{r_0}$

$$h_0=H-S_2=12-2.5=9.5m$$

$$z=H-S_2=12-0.38=11.62m$$

$$k=\frac{0.73Q}{z^2-h_0^2}\lg\frac{r}{r_0}=\frac{0.73\times 0.002}{11.62^2-9.5^2}\lg\frac{20}{0.1}=7.5\times 10^{-5}\,m/s=7.5\times 10^{-3}\,cm/s$$

9-2.

解：对于压水实验，此时出水流量应为负值。采用式（9-18）

$$-Q=1.36\frac{k\left(H^2-h_0^2\right)}{\lg\frac{R}{r_0}}$$

$$k=\frac{0.73Q}{h_0^2-H^2}\lg\frac{R}{r_0}=\frac{0.73\times0.0023}{6.8^2-5^2}\lg\frac{82}{0.1}=0.00023m/s$$

9-3.

解： 由 $Q=1.36\frac{k\left(H^2-t^2\right)}{\lg\frac{R}{r_0}}\left(1+7\sqrt{\frac{r_0}{2H}}\cos\frac{\pi H}{2H}\right)$

式中 $k=3m/h=0.00083m/s$

$$Q=1.36\frac{0.00083\times\left(10^2-6^2\right)}{\lg\frac{345}{0.2}}\left(1+\sqrt[7]{\frac{0.2}{2\times10}}\cos\frac{\pi\times10}{2\times25}\right)=0.0349m^3/s=126m^3/h$$

9-4.

解： 由式（9-20）

$$R=3000S\sqrt{k}=3000\times\left(10.5-7\right)\times\sqrt{0.00002}=46.96m$$

由式（9-18）

$$Q=1.36\frac{k\left(H^2-h_0^2\right)}{\lg\frac{R}{r_0}}=1.36\times\frac{0.00002\times\left(10.5^2-7^2\right)}{\lg\frac{46.96}{0.1}}=0.0006236m^3/s=2.245m^3/h$$

9-5.

解： 由式（9-23）

$$S_0=H-h_0=0.37\frac{Q}{kt}\lg\frac{R}{r_0}$$

$$S=H-h=0.37\frac{Q}{kt}\lg\frac{R}{r}$$

俩式相减，得 $S_0-S=0.37\frac{Q}{kt}\left(\lg r-\lg r_0\right)$

$$k=\frac{0.37Q}{t\left(S_0-S\right)}\left(\lg r-\lg r_0\right)=\frac{0.37\times\frac{15}{3600}}{6\times\left(2.5-1\right)}\times\left(\lg15-\lg0.2\right)=0.00032m/s$$

由式（9-24） $Q = 2.73\dfrac{ktS_0}{\lg\dfrac{R}{r_0}}$

$$15/3600 = 2.73\times\frac{0.00032\times6\times2.5}{\lg\dfrac{R}{0.2}}$$

解得 $R = 279.2m$

9-6.

解：由式（9-28） $q = \dfrac{k}{2}(H+h)\overline{J}$

式中 $\overline{J} = \dfrac{H-h}{L} = \dfrac{6.7-3.8}{90} = 0.032$

$$q = \frac{0.015}{120\times2} = 0.0000625\,m^2/s$$

$$k = \frac{2q}{(H+h)\overline{J}} = \frac{2\times0.0000625}{(6.7+3.8)\times0.032} = 0.000372\,m/s = 0.0372\,cm/s$$

9-7.

解：$\overline{J} = \dfrac{H-h}{L} = \dfrac{2.5-0.5}{80} = 0.025$

$$q = \frac{k}{2}(H+h)\overline{J} = \frac{0.00002}{2}\times(2.5+0.5)\times0.025 = 7.5\times10^{-7}\,m^2/s$$

$$Q = 2q\times100 = 0.54\,m^3/h$$

9-8.

解：由式（9-35），计算井群得影响半径

$$R = 575S\sqrt{Hk}$$

式中 $k = 10\,m/d = 0.000116\,m/s$

$$R = 575\times4\times\sqrt{9\times0.000116} = 74.3m$$

基坑中心点 $z = H - S = 9 - 4 = 5m$

对于中心点

$$r_A = r_B = r_C = r_F = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = 23.58m$$

$$r_B = r_E = 12.5m$$

代入式（9-34）

$$Q=1.36\frac{k\left(H^2-z^2\right)}{\lg R-\frac{1}{n}\lg\left(r_1^4r_2^2r_n\right)}=1.36\times\frac{0.000116\times\left(9^2-5^2\right)}{\lg 74.3-\frac{1}{6}\left(23.58^4\times 12.5^2\right)}=0.015m^3/s$$

各井抽水量

$$Q=\frac{Q}{6}=0.0025m^3/s=2.5L/s$$

9-9.

解： 由题意

$$z_1=H-S_1=10-3=7m$$

$$z_2=H-S_2=10-3.5=6.5m$$

$$k=15m/d=0.000174m/s$$

由式（9-36）

$$z_1^2=H^2-\frac{0.73}{k}\left(Q_1\lg\frac{R}{r_1}+Q_2\lg\frac{R}{r_2}\right)$$

$$z_2^2=H^2-\frac{0.73}{k}\left(Q_1\lg\frac{R}{r_1'}+Q_2\lg\frac{R}{r_2'}\right)$$

代入各数值

$$7^2=10^2-\frac{0.73}{0.000174}\left(Q_1\lg\frac{80}{8}+Q_2\lg\frac{80}{17}\right)$$

$$6.5^2=10^2-\frac{0.73}{0.000174}\left(Q_1\lg\frac{80}{17}+Q_2\lg\frac{80}{8}\right)$$

化简得

$$51=4195.4\times\left(Q_1+0.673Q_2\right)$$

$$57.75=4195.4\times\left(0.673\times Q_1+Q_2\right)$$

解得

$$Q_1=0.00528m^3/s=5.28L/s$$

$$Q_2=0.0102m^3/s=10.2L/s$$

9-10.

解： $J=-\frac{dz}{dr}$，$V=-k\frac{dz}{dr}$

$$Q=AV=-2\pi rzk\frac{dz}{dr}$$

分离变量 $-2\pi zdz = \frac{Q}{k}\frac{dr}{r}$

$$-2\pi\int_{h_0}^{H} zdz = \frac{Q}{k}\left(\ln R - \ln r_0\right)$$

$$h_0{}^2 - H^2 = \frac{0.73Q}{k}\lg\frac{R}{r_0}$$

$$Q = 1.36\frac{k\left(h_0^2 - H^2\right)}{\lg\frac{R}{r_0}}$$

9-11.

解： 按式（9-30）计算

$$r_0 = \sqrt{\frac{200}{\pi}} = 8m$$

$$S = \frac{Q}{4kr_0} = \frac{0.1}{4\times 0.001\times 8} = 3.13m$$