四川大學

32

2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学（微积分、线性代数）
科目代码：660
适用专业：光学、无线电物理、物理电子学

（试题共 3 页）

（答案必须写在答题纸上，写在试题上不给分）

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$ ______.

2 $\int_{-a}^{a}x[f(x)+f(-x)]dx=$ ______.

3 过点 $M_0(1,2-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程为 ______.

4 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&t&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$ ______.

5 幂级数 $1+\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{x^3}{10}+\cdots+\dfrac{x^n}{3n+1}+\cdots$ 的收敛域为 ______.

二、选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1 设 $f(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt, g(x)=2x^3+3x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）无穷小.

A、等价　　B、同阶非等价　　C、高阶　　D、低阶

2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则（　　）

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散　　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 必发散

C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 必发散　　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 必发散

3 设直线 $L: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{3}$ 及平面 $\Pi: x-2y+z-6=0$，则直线 L（　　）

A、在 Π 上　　B、平行 Π，但不在 Π 上

C、垂直于 Π　　D、与 Π 斜交

4 设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解，则（　　）

A、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　　B、α_1 可由 α_2,α_3 线性表出

C、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中含有零向量　　D、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

5 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，则 x 与 y 分别为（　　）

A、$-2,2$　　B、$2,-2$　　C、$3,-1$　　D、$-1,3$

三、解答下列各题（每小题 11 分，共 44 分）

1、设 $f(x)=\begin{cases} \frac{a\ln x}{x-1}, & x>0, 且 x\neq 1 \\ b, & x=1 \end{cases}$ 求常数 a,b，使得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=-\frac{1}{2}$。

2、求曲面 $z-3e^z+2xy=1-2xz$ 在点 $M_0(1,2,0)$ 的切平面和法线方程。

3、设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 A+B=AB，（I 是单位矩阵）

（1）证明 $A-I$ 为可逆矩阵；

（2）当 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 时，求矩阵 A。

4、求常数 a 使曲线积分

$$I=\int_{\left(0,\frac{4}{3}\right)}^{\left(-1,\frac{2}{3}\right)} e^{ax}\left(\cos\pi y\,dx+\sin\pi y\,dy\right)$$ 与路径无关，并计算此积分值。

四、计算题（每小题 12 分，共 36 分）

1、设 $u=xyf(x-2y,x^2y)$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

2、计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x+y)\,dydz+(y+z)\,dzdx+(z+x)\,dxdy,$$

其中Σ为抛物面$z=\frac{1}{h}\left(x^2+y^2\right)$上$0\le z\le h$部分的下侧。

3、设实对称矩阵A的三个特征值为$\lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=3$,且对应于该二重特征值3的特征向量为$\alpha_1=(-1,0,1)^T$、$\alpha_2=(1,-2,1)^T$,求矩阵$A$及$A$的对应于的$\lambda_1=6$特征向量。

五、证明题(每小题 10 分,共 20 分)

1、已知函数$z=z(x,y)$,由方程$xy=xf(z)+yg(z)$所确定,其中f,g可导,且$xf'(z)+yg'(z)\ne 0$,证明$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}$。

2、设 A 为 n 阶正交矩阵,且$|A|<0$,证明矩阵 I+A 不可逆。(I 是单位矩阵)