

代 号 10701

学 号 1010120892

分类号 TN911.7

密 级 公开

题 (中、英文) 目 基于压缩感知的空域信号 DOA 估计研究

**DOA Estimation Based on Compressive Sensing**

作者姓名 郭月强 指导教师姓名、职称 陈建春 教授

学科门类 工学 学科、专业 信号与信息处理

提交论文日期 二〇一三年一月



## 西安电子科技大学

### 学位论文创新性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：郭月强

日期 2013.3.14

## 西安电子科技大学

### 关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。本人保证毕业后离校后，发表论文或使用论文工作成果时署名单位仍然为西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。（保密的论文在解密后遵守此规定）

本学位论文属于保密在\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本人签名：郭月强

日期 2013.3.14

导师签名：陈建春

日期 2013.3.14



## 摘要

压缩感知理论技术是数学界最近几年提出来的一种关于稀疏信号的采集与重建的理论，它突破了传统奈奎斯特采样频率的限制，对于稀疏的或可压缩的信号，当压缩感知矩阵符合一定的条件时，就可以用远少于传统奈奎斯特采样定理所需要的采样数据，精确地恢复出原始信号或者估计出原始信号的相关参数。压缩感知理论现在已经成为信号处理领域中一个新的研究热点，因此，本论文将压缩感知理论应用于空间信号的 DOA 估计问题的研究中，以克服传统 DOA 估计算法中的一些不足。

本论文主要对阵列信号处理技术中传统的 DOA 估计算法，压缩感知理论和稀疏信号重构算法进行了研究。首先，给出了远场窄带信号的一般数学模型，对传统的 DOA 估计算法进行了回顾，主要包括延迟-相加法、Capon 最小方差方法、MUSIC 算法、ESPRIT 算法、最大似然法和综合法，重点介绍了子空间分解类算法：MUSIC 和 ESPRIT 算法。其次，研究了压缩感知理论的基本原理和基本框架，主要包括时空域下的稀疏信号表示形式和变换域下的稀疏信号表示形式，投影测量矩阵的设计和稀疏信号的重构算法；研究了稀疏信号重构的条件，详细介绍了约束等距条件(RIP)、不一致性条件(MIP)以及二者之间的关系。最后，分析了阵列接收信号的空域稀疏表示形式，介绍了稀疏信号重构算法 L1-SVD 和 MFOCUSS。为了解决传统的 DOA 估计算法无法用于相干信号源以及 MFOCUSS 算法不适用于低信噪比的情况，提出了一种新的基于压缩感知的 DOA 估计算法，SVD-MFOCUSS 算法。SVD-MFOCUSS 算法是对 MFOCUSS 算法的改进，其本质上是采用奇异值分解进行信号降维和能量积累，改善了传统稀疏信号恢复算法的应用范围，能在低信噪比情况下使用，且显著降低了计算量。

**关键词：**DOA 估计 压缩感知 稀疏表示 RIP MIP MFOCUSS



## Abstract

The theory of Compressive Sensing (CS) is a new theory on sparse signal acquisition and reconstruction, which breaks through the limits of traditional Nyquist sampling theorem. CS theory states that one can recover certain signals or estimate their parameters from far fewer samples than traditional methods use, when the signals are sparse or compressible. Compressed sensing theory has become a new hotspot in signal processing field. In this thesis, the compression sensing theory is applied to the signal source DOA estimation, to overcome some of the shortcomings in the traditional DOA estimation algorithm.

In this thesis, the traditional DOA estimation algorithms about array signal processing technology, the compressed sensing theory and the sparse signal reconstruction algorithms are studied. First of all, the general mathematics model of far field narrowband signal is given, and the traditional DOA estimation algorithms are reviewed. Including Beamforming method, Capon method, MUSIC method, ESPRIT method, maximum likelihood method and comprehensive method. But the MUSIC and ESPRIT are mainly introduced. Secondly, the basic principle and framework of the compressed sensing theory are researched, and the sparse signal reconstruction conditions, Including Restricted Isometry Property, Mutual Incoherence Property and the relationship between the RIP and MIP, are detailed introduction. Thirdly, the airspace sparse representation of the signals array-received, L1-SVD algorithm and MFOCUSS algorithm are researched. Finally, the SVD-MFOCUSS algorithm is put forward. SVD-MFOCUSS algorithm is the improvement of MFOCUSS algorithm, its essence is the signal dimensionality reduction and energy accumulation of singular value decomposition. It improves the application range of the traditional sparse signal recovery algorithm, can be used in the condition of low SNR, and significantly reduce the amount of computation.

**Keywords:** DOA estimation   Compressive Sensing   Sparsity Representation   RIP  
MIP   MFOCUSS



# 目录

第一章 绪论 .....	1
1.1 课题研究背景和意义 .....	1
1.2 DOA 估计的研究与发展现状 .....	2
1.3 基于压缩感知原理的 DOA 估计的研究现状 .....	3
1.4 本论文的主要研究工作和内容安排 .....	3
第二章 DOA 估计的基本原理和方法 .....	5
2.1 DOA 估计中的阵列信号假设及其数学模型 .....	5
2.2 DOA 估计的原理 .....	8
2.3 DOA 估计的传统方法 .....	9
2.3.1 延迟—相加法 .....	9
2.3.2 延迟—相加法仿真结果及分析 .....	10
2.3.3 Capon 最小方差法 .....	12
2.3.4 Capon 最小方差法仿真结果及分析 .....	13
2.4 DOA 估计的子空间方法 .....	14
2.4.1 MUSIC 算法 .....	15
2.4.2 ESPRIT 算法 .....	16
2.4.3 MUSIC 算法仿真结果及分析 .....	20
2.5 DOA 估计的其他方法 .....	21
2.5.1 最大似然法 .....	22
2.5.2 DOA 估计综合法 .....	22
2.6 本章小结 .....	22
第三章 压缩感知原理 .....	25
3.1 压缩感知理论的研究现状与发展趋势 .....	25
3.2 压缩感知理论下的稀疏信号 .....	26
3.2.1 时空域下的稀疏信号 .....	27
3.2.2 变换域下的稀疏信号 .....	28
3.3 压缩感知的基本理论 .....	29
3.3.1 信号的稀疏表示 .....	30
3.3.2 投影测量矩阵的设计 .....	30
3.3.3 稀疏信号的重构算法 .....	31
3.4 稀疏信号重构的条件 .....	32

3.4.1 约束等距性条件分析.....	32
3.4.2 不一致性条件分析.....	33
3.4.3 约束等距性与不一致性的关系.....	34
3.5 本章小结.....	34
第四章 基于压缩感知的 DOA 估计算法和仿真.....	37
4.1 阵列接收信号的空域稀疏表示.....	37
4.2 稀疏信号的重构算法.....	39
4.2.1 L1-SVD 类算法.....	39
4.2.2 MFOCUSS 类算法.....	40
4.3 MFOCUSS 算法的改进—SVD-MFOCUSS 算法.....	42
4.3.1 稀疏信号模型的降维表示.....	42
4.3.2 稀疏信号模型优化求解.....	42
4.3.3 SVD-MFOCUSS 算法求解步骤.....	43
4.3.4 SVD-MFOCUSS 算法性能分析.....	43
4.4 仿真实验分析.....	45
4.5 本章小结.....	56
第五章 结论.....	57
5.1 本论文总结.....	57
5.2 工作展望.....	57
致谢.....	59
参考文献.....	61
研究生期间参加科研及论文发表情况.....	65

## 第一章 绪论

### 1.1 课题研究背景和意义

信号处理理论的应用范围十分广泛，涉及到雷达、导航、声纳、通信、射电天文、医疗诊断等多种领域。信号处理所包含的内容极其丰富，例如从被干扰和噪声污染的信号的接收数据中恢复出原来的信号；或者将混在信号中的干扰和噪声去除；或者把原始信号变换成另一种信号形式。无论以什么样的方式对信号做处理，其基本原则是尽可能的少丢失或不丢失信息。信息总是包含在信号的外部特征和内部特征参数之中，因此对信号的特征参数进行有效的检测和精确的估计是信号处理中最为重要的内容。信号处理在早期主要集中于时域一维信号的处理，例如时域信号的频谱分析和估计；之后逐渐发展为对二维和多维时域信号的处理，例如数字图像信号处理、时频域二维信号处理、时空域二维信号处理等。伴随着信号处理理论的发展和信号处理的应用领域的不断扩展，对空域信号的处理变得越来越重要。因为对空间信号的目标检测和参数估计的要求越来越高，阵列信号处理作为空间信号处理的主要手段，它的发展也变得极为迅速。阵列信号处理是指将多个传感器放置在空间中不同的位置，以组成感知阵列，用感知阵列接收来自于空间的信号，并对接收到的信号做一系列的处理。对阵列接收信号进行处理是为了放大预期的信号，同时消除干扰与噪声，并提取预期信号所包含的特征及信息。同早期的只有一个传感器的情况相比，由多个传感器组成的感知阵列可以灵活地控制波束，具有较高的增益倍数，较强的干扰、噪声抑制能力，和超高的角度分辨率等一系列的优点。特别是近几年来，有关阵列信号处理方面的理论取得了重大的突破，涌现出了很多具有高性能和高效率的算法。

波束形成是阵列信号处理技术的主要内容之一，它通过对阵列接收天线添加加权值，保证方向图在预期信号的方向上增益不变的同时，使得系统的总输出功率达到最小。自适应波束形成算法可以根据信号环境的变化，自适应的调整各个阵元上的加权因子，从而达到增强信号，并同时抑制干扰的目的。阵列信号处理中另一个关键的技术是波达方向（Direction of Arrival, DOA）估计。DOA 估计，又称为谱估计（spectral estimation）或波达角（Angle Of Arrival）估计。

空间信号谱估计方法是目前较为先进的 DOA 估计算法。以 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法为代表的子空间类算法，使得测向定位技术有了质的飞跃，做到了超分辨率测向定位。MUSIC 与 ESPRIT 等经典谱估计算法，主要是利用阵列接收数据的统计特性来估计空间信号的位置。因此，这些算法都需要利用大量的采样

数据才能够实现对目标 DOA 方向的精确估计。然而，现代化的雷达等信号源大都使用了捷变频的技术，这样就使获得大量拥有相同的统计特性的采样数据变的非常困难。另外，MUSIC 算法和 ESPRIT 算法均对噪声比较敏感，要求采样数据的信噪比必须要高，这就使得这一类算法在实际的应用过程中遇到了很大的困难。

近几年来，由应用数学领域提出的压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论，得到了进一步的发展并日益完善，它为我们提供了一种新的有关信号采集与参数估计的思路，可以以远少于传统奈奎斯特采样定理所需要的采样数据，精确地恢复原始信号或者估计出相应的信号参数。因此，将压缩感知理论应用到空间信号的 DOA 估计当中，可以有效地解决传统的空间谱估计方法本身所具有的缺陷。

## 1.2 DOA 估计的研究与发展现状

波束形成算法(CBF)<sup>[1]</sup>是最早的一种基于阵列天线的空间谱估计方法。这种谱估法方法是时域傅里方法在空域中的扩展形式，即采用空间感知阵元的接收数据来替代时域处理中的时间采样数据。这种方法虽然处理起来比较简单，但是会受到空间阵列“傅里叶限”的制约。空间阵列的“傅里叶限”也就是阵列天线实际的物理孔径大小限制，常称之为“瑞利限”。换句话说就是，这种算法对于处在同一个天线波束中的空间信号是不可分辨的。所以，对于提高空间分辨力的最为简单有效的办法就是增加阵列天线的物理孔径，这等效于间接的减小了天线的波束宽度，最终达到提高空间分辨率的目的。但是，对于许多实际的应用环境而言，增加天线的物理孔径是不现实的，因此就需要有更好的算法来提高空间分辨率。

时间信号的频率估计和空间信号的方向估计十分近似，因此许多时域非线性谱估计方法被推广成为空域信号的方向估计方法，这就是我们经常说的高分辨率空间谱估计方法。自上世纪 70 年代以来，具有高分辨率的空间谱估计方法主要有：Pisarenko 谐波分析方法<sup>[2]</sup>、Burg 最大熵方法(MEM)<sup>[3]</sup>、Capon 最小方差方法(MVM)<sup>[4]</sup>等。其中，基于 AR、ARMA 及 MA 的谱估计方法，都假设信号的频谱为连续谱，对应到空间信号处理之中就是假设信号目标在空间中是连续分布的，信号是空间平稳的随机过程。不过这样的假设在大多数空间谱估计中不能成立，因此，这些空间谱估计处理方法具有一定的局限性。

自上世纪 70 年代末以来，空间谱估计方面现出了大量的研究成果，其中以美国的 Schmidt R O 等人<sup>[5]</sup>提出的以 MUSIC 算法为代表的子空间类算法最为突出。子空间类算法按照处理方式的不同可以分成两类：一种是以 MUSIC 算法为代表的噪声子空间类算法，另一种是以 ESPRIT 算法为代表的信号子空间类算法。子空间类算法有一个共同的特点，就是对阵列天线接收到的数据进行数学分解（如奇异值分解、特征值分解和 QR 分解等），将数据分解成两个互相正交的特征子空

间：一个是信号子空间，另一个是噪声子空间。子空间类算法根据这两个子空间之间相互正交的特性，构造出了具有“针状”谱峰的空间谱，从而提高了空间谱估计的分辨率。现在的一些超分辨率空间谱估计方法往往都延续了这两种算法的思想，例如求根 MUSIC 算法<sup>[6~7]</sup>、解相干的 MUSIC 算法<sup>[8~11]</sup>以及 ESPRIT 算法<sup>[12~13]</sup>等。

从上世纪 80 年代末开始，学者们又提出了一类基于子空间拟合的空间谱估计算法，其中最具代表性的算法为：最大似然算法(ML)<sup>[14]</sup>，加权子空间拟合算法(WSF)<sup>[15]</sup>和多维 MUSIC 算法<sup>[16]</sup>等。1988 年，Ziskind L 和 MAX M 首先将最大似然参数估计的方法应用于空间目标的 DOA 估计之中，但是由于目标似然函数是一个非线性的函数，要求其最优解就必须要对解空间做多维的搜索，其运算量是非常大的。Wax 提出了用交替投影算法(AP)来求解目标似然函数的方法来得到最优解，这在很大程度上减少了算法的计算量，但是 AP 算法只能得到局部的最优解，它不能保证最终得到的解是全局最优解<sup>[17]</sup>。WSF 类算法按照子空间的特性同样可以分成两类：一种是基于噪声子空间的拟合算法<sup>[18]</sup>，另一种是基于信号子空间的拟合算法<sup>[15]</sup>。

### 1.3 基于压缩感知原理的 DOA 估计的研究现状

随着 CS 理论的不断发展和完善，其在阵列信号 DOA 估计方面的应用也不断增多<sup>[19~25]</sup>，并且表现出了比传统的 DOA 估计方法更为优秀的性能。D Malioutov 和 M Cetin 等人<sup>[19~20]</sup>，从 2002 年就开始将稀疏信号恢复的思想应用到阵列信号的 DOA 估计问题之中，通过对空域角度离散化来建立稀疏信号重建的模型，应用二阶锥规划方法(SOC)来求解相应的最优化问题，并通过空域角度细分来获得较高的角度分辨率。近几年来，也有一部分学者尝试着将压缩感知理论和稀疏信号重建理论应用到由传感器组成的网络当中，试图去解决分布式空间信号的 DOA 估计问题。例如 D Model 等人<sup>[21]</sup>应用信号的时间稀疏特性和空间稀疏特性来构造需要重构的信号的目标函数，这类算法可以在较低的信噪比下精确地重构原信号。总的来说，现阶段对于将压缩感知原理应用到 DOA 估计问题中的研究仍然处在不断探索的阶段。目前，基本上只是简单的将压缩感知原理套用在 DOA 估计的问题当中，并没有对 DOA 估计问题和压缩感知原理之间的关系进行深入的研究。

### 1.4 本论文的主要研究工作和内容安排

本论文主要研究将压缩感知理论应用于信号源 DOA 估计问题之中，通过构建合理的信号稀疏化模型，实现信号源 DOA 的精确估计。详细介绍了传统 DOA

估计的基本理论与方法、压缩感知的基本理论以及一些基本的稀疏信号重构算法，最后对多测量欠定系统聚焦求解算法（MFOCUSS）做了进一步的改进，并对改进后的算法进行了仿真分析。

全文内容安排如下：

第一章为绪论，简要介绍了空间信号 DOA 估计的意义，概述了 DOA 估计、压缩感知理论和基于压缩感知理论的 DOA 估计在国内外的研究现状与发展趋势，并说明了本论文的主要工作内容和创新之处。

第二章为 DOA 估计的基本原理与方法，介绍了波达方向估计（DOA）的一些经典算法：传统法、子空间法、最大似然法和特性恢复和子空间法的综合法。重点介绍了 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法，并对这些算法做了仿真分析。

第三章主要介绍压缩感知理论的基本原理以及信号 DOA 估计问题在压缩感知理论框架下的数学描述。首先介绍了压缩感知理论的研究现状与发展趋势；其次介绍了压缩感知理论的基本原理和理论框架，主要分析了信号的稀疏表示形式、投影测量矩阵的设计以及稀疏信号的重构算法；最后介绍了稀疏信号重构的条件，主要分析了约束等距性条件（RIP），不一致性条件（MIP）以及这两者之间的关系。

第四章分析了阵列接收信号的空域稀疏表示形式，介绍了稀疏信号重构算法 L1-SVD 和 MFOCUSS，对传统的 DOA 估计算法以及基于 L1-SVD 和 MFOCUSS 的 DOA 估计算法做了仿真实验分析。提出了一种新的基于 CS 的 DOA 估计算法：SVD-MFOCUSS 算法。SVD-MFOCUSS 算法是对 MFOCUSS 算法的改进，其本质是采用奇异值分解进行信号降维和能量积累，改善了传统稀疏信号恢复算法的应用范围，能在低信噪比情况下使用，且显著降低了计算量。

第五章为全文总结与工作展望。

## 第二章 DOA 估计的基本原理和方法

本章主要介绍波达方向估计 (DOA) 的一些经典算法: 传统法、子空间法、最大似然法和特性恢复与子空间法相结合的综合法。传统法是基于波束形成的方法, 它需要有大量的阵元才能得到高分辨率。子空间算法利用了输入数据矩阵的结构特征, 是具有高分辨率的次最优方法。最大似然估计法是最优的方法, 即使是在信噪比很低的环境下也具有良好的性能, 但是通常计算量很大。综合法首先利用特征恢复方案区分多个信号, 估计空间特征, 进而采用子空间法确定波达方向。

### 2.1 DOA 估计中的阵列信号假设及其数学模型

本论文中讨论的 DOA 估计均是指基于线形阵列的 DOA 估计。整个 DOA 估计系统由三部分组成, 分别是目标空间、观察空间和估计空间。也就是说 DOA 估计系统由这三个空间构成, 其框图如图 2.1 所示:

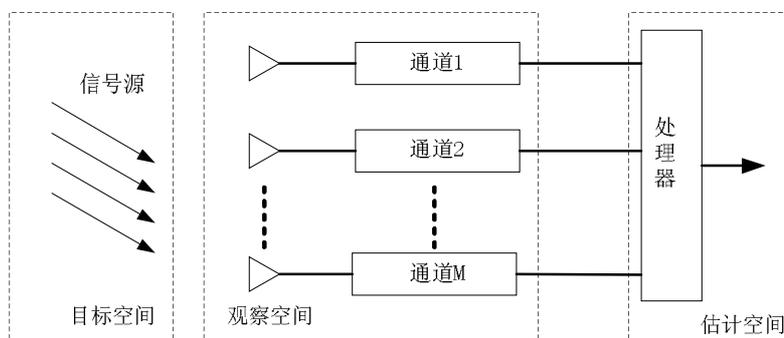


图 2.1 DOA 估计的系统框图

由图 2.1 可以看到, 估计空间是对目标空间的一个重构过程, 这个重构过程由很多因素决定, 例如环境的复杂性、空间阵元的互耦性、通道的不一致性和频带的非一致性等。

本论文在讨论传统的波达方向估计算法之前, 为了分析和推导的方便, 首先给出以下几点假设:

- (1) 信号源均为远场窄带信号, 即阵列处于信号源的远场中, 信号具有相同的中心频率, 且到达阵列时可将其看成平行的平面波;
- (2) 组成阵列的各传感器均为各向同性阵元, 即阵元的接收特性与其尺寸大小无关, 仅与其所在的位置有关, 且阵元之间无互耦及通道不一致性的干扰;
- (3) 阵元间距不大于待测信号源中最高频率的信号波长的二分之一;

(4) 信号源个数小于阵元的数目，以确保阵列流形矩阵的各列线性独立；

(5) 各阵元间的噪声相互独立，噪声序列为一零均值高斯过程，噪声与信号相互独立。

考虑  $N$  个远场窄带信号入射到某空间阵列天线上，其中天线共由  $M$  个阵元构成，这里假设阵元个数与通道个数相同，即各阵元的接收信号经由各自的信号通道传送至处理器。

在信号源为窄带信号的假设下，信号源的复包络形式为：

$$\begin{aligned} s_i(t) &= u_i(t)e^{j(\omega_0 t + \phi_i(t))} \\ s_i(t-\tau) &= u_i(t-\tau)e^{j(\omega_0(t-\tau) + \phi_i(t-\tau))} \end{aligned} \quad (2-1)$$

式 (2-1) 中， $u_i(t)$  为信号振幅， $\phi_i(t)$  为信号相位， $\omega_0$  为信号频率， $\tau$  是信号延迟。在信号源为远场窄带信号的假设下，有

$$\begin{aligned} u_i(t-\tau) &\approx u_i(t) \\ \phi_i(t-\tau) &\approx \phi_i(t) \end{aligned} \quad (2-2)$$

由式 (2-1) 和式 (2-2)，可得下式成立：

$$s_i(t-\tau) \approx s_i(t)e^{-j\omega_0\tau} \quad i=1,2,\dots,N \quad (2-3)$$

第  $l$  个阵元的接收信号为

$$x_l = \sum_{i=1}^N g_{li}s_i(t-\tau_{li}) + n_l(t) \quad l=1,2,\dots,M \quad (2-4)$$

式 (2-4) 中， $g_{li}$  为第  $l$  个阵元对于第  $i$  个信号的放大倍数， $n_l(t)$  为第  $l$  个阵元在  $t$  时刻接收的噪声， $\tau_{li}$  为第  $i$  个信号到达第  $l$  个阵元时同参考阵元之间的延迟。将式 (2-3) 代入式 (2-4) 可得

$$x_l = \sum_{i=1}^N g_{li}s_i(t)e^{-j\omega_0\tau_{li}} + n_l(t) \quad l=1,2,\dots,M \quad (2-5)$$

将  $M$  个阵元在某一时刻  $t$  接收到的信号排成列矢量，可得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}e^{-j\omega_0\tau_{11}} & g_{12}e^{-j\omega_0\tau_{12}} & \cdots & g_{1N}e^{-j\omega_0\tau_{1N}} \\ g_{21}e^{-j\omega_0\tau_{21}} & g_{22}e^{-j\omega_0\tau_{22}} & \cdots & g_{2N}e^{-j\omega_0\tau_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1}e^{-j\omega_0\tau_{M1}} & g_{M2}e^{-j\omega_0\tau_{M2}} & \cdots & g_{MN}e^{-j\omega_0\tau_{MN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

由于我们已假设阵列中的每一个阵元都是各向同性的，因此式(2-6)中的信号放大倍数  $g_{li}$  可以归一化为 1。在这样的假设下，式(2-6)可简化为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_{11}} & e^{-j\omega_0\tau_{12}} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{1N}} \\ e^{-j\omega_0\tau_{21}} & e^{-j\omega_0\tau_{22}} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_{M1}} & e^{-j\omega_0\tau_{M2}} & \dots & e^{-j\omega_0\tau_{MN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

将式 (2-7) 写为矢量形式, 可得:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (2-8)$$

式(2-8)中,  $\mathbf{X}(t)$  为  $M \times 1$  维阵列接收数据矢量, 为一个快拍接收数据,  $\mathbf{N}(t)$  为  $M \times 1$  维的阵列接收噪声矢量,  $\mathbf{S}(t)$  为目标信号的  $N \times 1$  维数据矢量,  $\mathbf{A}$  为  $M \times N$  维的阵列流形矩阵 (导向矢量矩阵), 并且

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\omega_0) \quad \mathbf{a}_2(\omega_0) \quad \dots \quad \mathbf{a}_N(\omega_0)] \quad (2-9)$$

式 (2-9) 中, 导向矢量

$$\mathbf{a}_i(\omega_0) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_{1i}} \\ e^{-j\omega_0\tau_{2i}} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_{Mi}} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2-10)$$

式 (2-10) 中,  $\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ ,  $c$  为光速,  $\lambda$  为信号的波长。

根据以上的推导可以知道, 只要确定了阵列各阵元之间的延迟  $\tau$ , 就可以很容易地得出一个特定阵列天线的阵列流形矩阵。以下将推导空间阵元间的延迟表达式  $\tau$ 。取空间中的任意两个阵元, 将其中一个阵元作为参考阵元 (位于原点), 另一个阵的位置为  $(x, y, z)$ , 两个阵元几何关系如图 2.2 所示, 图中的 “•” 代表阵元。

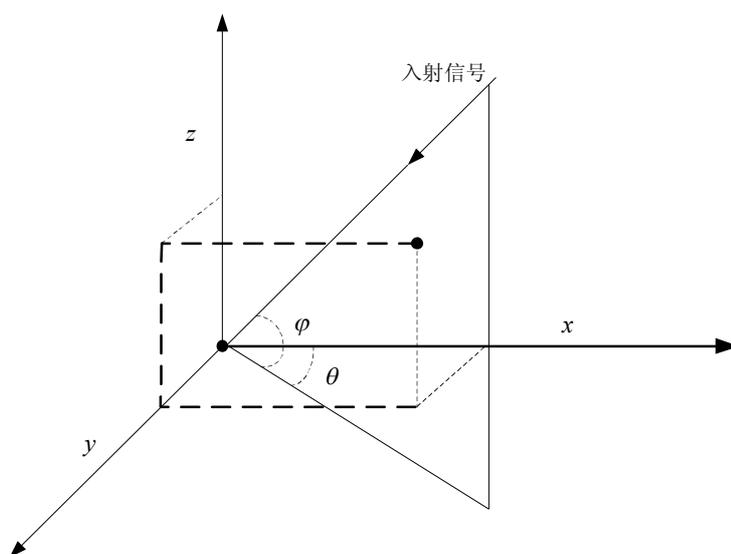


图 2.2 空间任意两阵元间的几何关系

根据图 2.2 的几何关系, 可以推导出两个阵元间的接收信号的延迟为

$$\tau = \frac{1}{c}(x \cos \theta \cos \varphi + y \sin \theta \cos \varphi + z \sin \varphi) \quad (2-11)$$

对应于线阵的情况, 以原点作为参考点, 设线阵阵元的位置为  $x_k (k=1, 2, \dots, M)$ , 入射角参数  $\theta$  为信号源的方位角 (信源方向和线阵法线的夹角), 则有

$$\tau_k = \frac{1}{c}(x_k \sin \theta) \quad (2-12)$$

综上所述, 由式 (2-7) 和式 (2-12) 可以确定在均匀线阵下信号源 DOA 估计的数学模型。

## 2.2 DOA 估计的原理

对于远场窄带信号来说, 同一个信号到达阵列中不同的阵元时会存在一个延迟, 这个延迟导致阵列的各个接收阵元之间存在一个相位差, 根据各个阵元相互之间的相位差就可以对信号进行 DOA 估计。

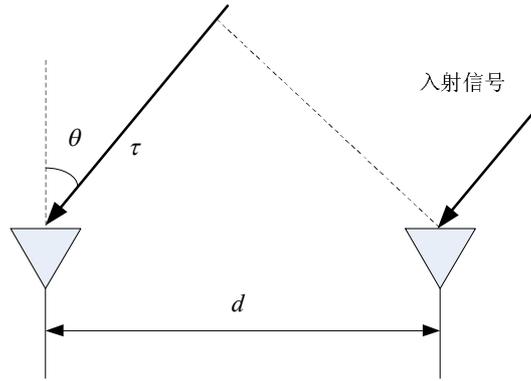


图 2.3 DOA 估计原理图

如图 2.3 所示, 考虑空间中的两个阵元,  $d$  为两个阵元之间的距离,  $c$  为光速,  $\theta$  为远场窄带信号相对于阵列天线的入射角度, 两个阵元之间所接收信号的延迟为

$$\tau = \frac{d \sin \theta}{c} \quad (2-13)$$

因此, 两个阵元之间的相位差可以表示为

$$\phi = \omega \tau = \omega \frac{d \sin \theta}{c} = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda f_0} f \quad (2-14)$$

式 (2-14) 中,  $f_0$  是中心频率,  $\lambda$  为信号的波长。对于远场窄带信号来说, 可以认为相位差为

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} \quad (2-15)$$

所以，只要知道了各阵元之间的相位差，根据式（2-15）就可以估计出信号的方位，这就是 DOA 估计技术的基本原理。

## 2.3 DOA 估计的传统方法

传统的波达方向估计方法是基于波束形成和零波导引概念的，并没有利用接收信号向量的模型（或信号和噪声的统计特性）。知道阵列流形以后，可以对阵列进行电子导引，利用电子导引可以把波束调整到任意方向上，从而寻找输出功率的峰值。这种方法需要用大量的阵元才能得到高分辨率，其中比较典型的两种算法为：延迟—相加法（也称为经典波束形成器法）和 Capon 最小方差法。

### 2.3.1 延迟—相加法

延迟—相加法，又称为经典波束形成器法，是最简单的一种 DOA 估计方法。图 2.4 是延迟—相加法结构（波束形成器结构）的模型图：

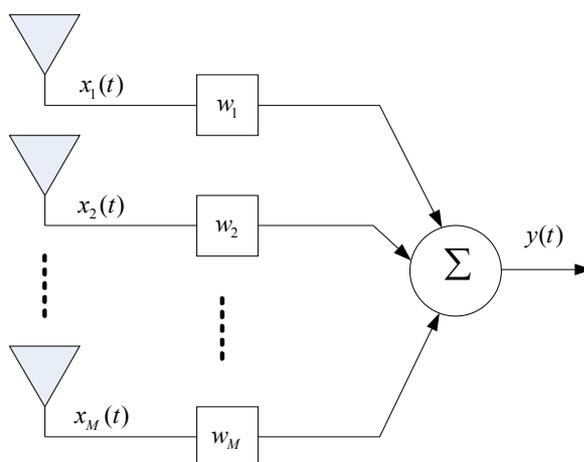


图 2.4 延迟—相加法结构模型

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  是阵列接收信号向量， $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$  是加权向量， $y(t)$  是输出信号，它等于传感器阵元输出的线性加权和，三者满足如下关系：

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2-16)$$

波束形成器的输出功率  $P$  可以表示为：

$$P = E[|y(t)|^2] = E[|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2] = \mathbf{w}^H E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad (2-17)$$

上式中， $\mathbf{R}_{xx}$  为阵列输入数据的自相关矩阵。 $\mathbf{R}_{xx}$  包含了阵列响应向量和信号自身

的统计信息，由  $\mathbf{R}_{xx}$  可以估计出信号的相关参数。

假设一个信号  $s(t)$  以角度  $\theta$  入射到天线阵列上，则输出功率  $P(\theta)$  可以表示为：

$$\begin{aligned} E\left[|\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)|^2\right] &= E\left[|\mathbf{w}^H (\mathbf{a}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t))|^2\right] \\ &= |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 E[s(t)^2] + E\left[|\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)|^2\right] \\ &= |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2 \sigma_s^2 + \|\mathbf{w}^H\|_2 \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (2-18)$$

式 (2-18) 中， $\mathbf{a}(\theta)$  是阵列关于信号入射角度  $\theta$  的导引矢量， $\mathbf{n}(t)$  是阵列的输入端噪声信号， $\sigma_s^2 = E[s(t)^2]$  为信号功率， $\sigma_n^2 = E[\mathbf{n}(t)^H \mathbf{n}(t)]$  为噪声功率。由式 (2-18) 可以知道，当  $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\theta)$  时，系统的输出功率达到最大。这是因为，权值向量  $\mathbf{w}$  在传感器阵元处和来自方向  $\theta$  的信号分量相位对齐，使得它们能够同相相加，从而使系统的输出功率为最大。系统的输出功率  $P$  与信号的波达方向之间的关系为：

$$P = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{a}(\theta) \quad (2-19)$$

波束形成器产生的波束在感兴趣的区域中离散地扫描，对应不同的  $\theta$  可以产生不同的权向量  $\mathbf{w} = \mathbf{a}(\theta)$ ，从而得到的输出功率也不相同，最大的功率对应着最大的峰值，而最大的空间谱峰所对应的角度方向即为信号的波达方向。延迟一相加法具有一定的局限性，当存在着来自多个方向的信号时，该方法要受到波束宽度和旁瓣高度的制约，因而这种方法的分辨率较低。

### 2.3.2 延迟一相加法仿真结果及分析

在均匀等距线阵下对算法进行仿真，阵列的阵元数为 8，信噪比为 20dB，考察单信号和多信号两种情况下算法的性能。单信号时信号角度为  $20^\circ$ ，多信号时信号角度为  $-30^\circ$ ， $-15^\circ$ ， $0^\circ$ ， $15^\circ$  和  $30^\circ$ 。仿真分析如下：

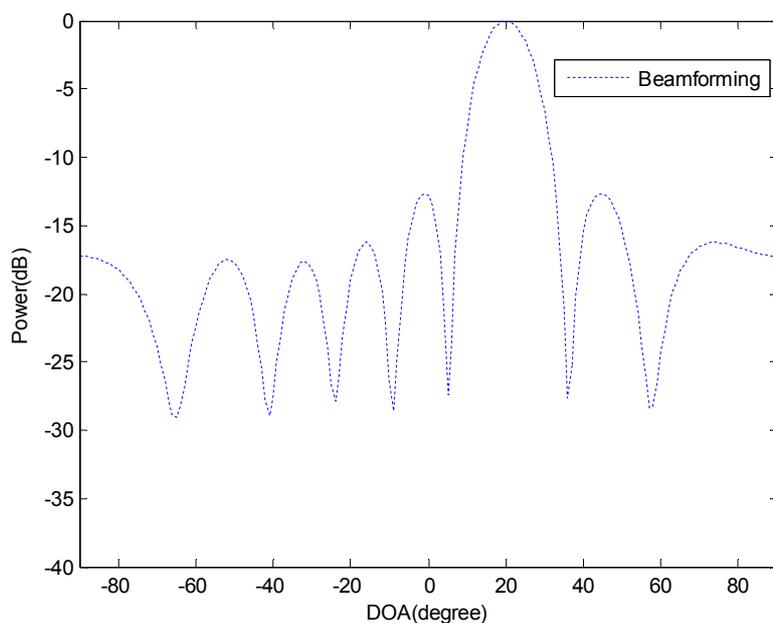


图 2.5 单信号的延迟—相加法仿真

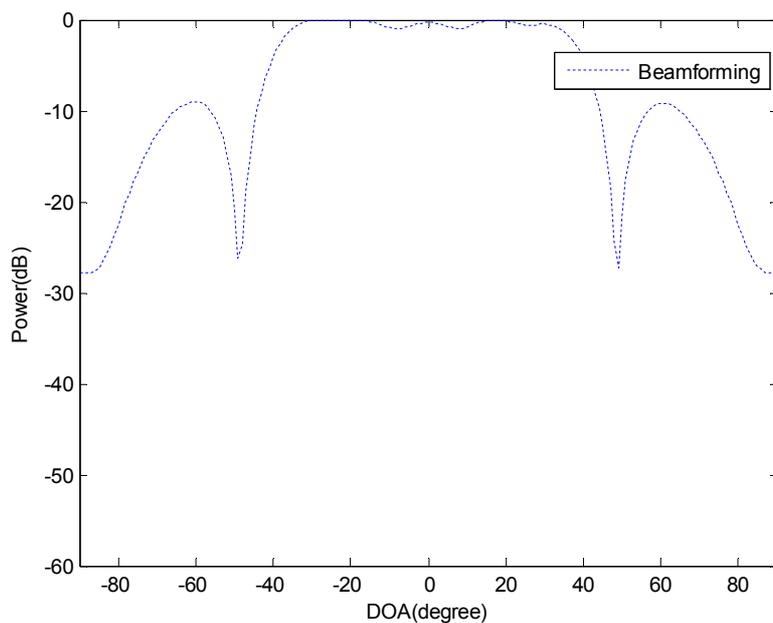


图 2.6 多信号的延迟—相加法仿真

从图 2.5 和图 2.6 中可以看出，延迟—相加法可以很好的识别单个信号，但是当信号个数比较多时延迟—相加法就会失效，只能大致分辨出信号所处的角度范围。这是因为，延迟—相加法是把阵列形成的波束指向某个方向，由此可以获得来自于这个方向的信号的最大功率。就单个信号而言，延迟—相加法可以很好地估计出它的波达方向。但是当信号空间中存在多个信号的时候，因为波束宽度的限制，受到同一个波束内信号之间的相互干扰，延迟—相加法的估计性能就会急

剧的下降。

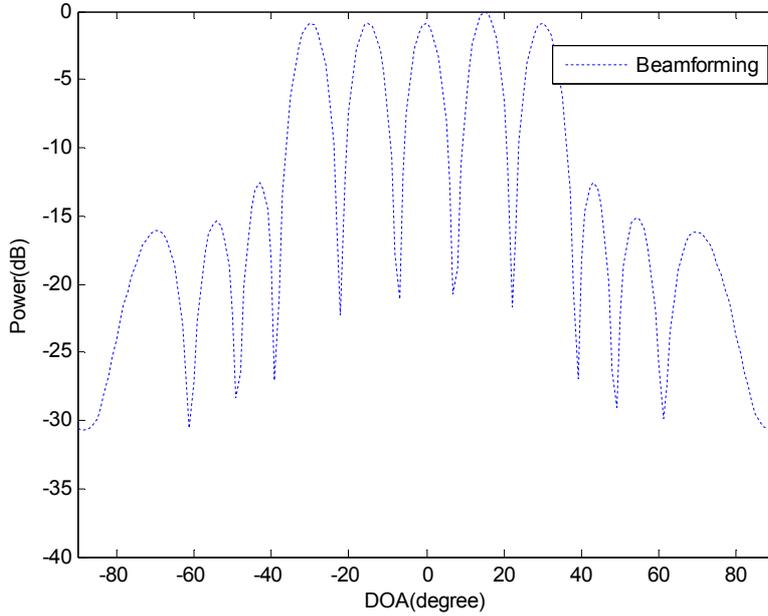


图 2.7 阵元个数为 16 时的多信号延迟—相加法仿真

由图 2.7 可以看出，增加阵列的阵元数可以改善延迟—相加法的性能，提高分辨率，但是这会使系统更加复杂，还会增加算法的计算量和数据存储空间。

### 2.3.3 Capon 最小方差法

Capon 最小方差法的出现是为了解决延迟—相加法分辨率差的缺点。用一部分自由度在期望方向上形成一个波束，利用剩余的一部分自由度在干扰方向形成零陷。这种方法使得输出功率最小，使得非期望干扰信号的贡献为最小，同时使观测方向上的增益达到最大，其数学表达式为：

$$\min_{\mathbf{w}} E \left[ |y(t)|^2 \right] = \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad (2-20)$$

约束条件为  $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1$ ，这种方法又称为最小方差无畸变响应波束形成器，它使信号方差达到最小，同时使得来自期望方向的信号响应不变。

用拉格朗日数乘法求解上述约束最优化问题，将约束问题转化为非约束问题，用最小二乘法求解，得到最优权向量为：

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)}{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)} \quad (2-21)$$

由上式可得，Capon 空间谱的输出功率与波达方向的函数关系为：

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (2-22)$$

由式 (2-22) 计算并画出  $\theta$  所在范围内的空间谱，空间谱上的峰值对应的角度就是信号的波达方向 (DOA)。

### 2.3.4 Capon 最小方差法仿真结果及分析

在均匀等距线阵下对 Capon 算法进行仿真，阵列的阵元数为 8，信噪比为 20dB，考察非相干信号和相干信号两种情况下算法的性能。信号的角度分别为  $-30^\circ$ ， $-15^\circ$ ， $0^\circ$ ， $15^\circ$  和  $30^\circ$ 。仿真分析结果如下：

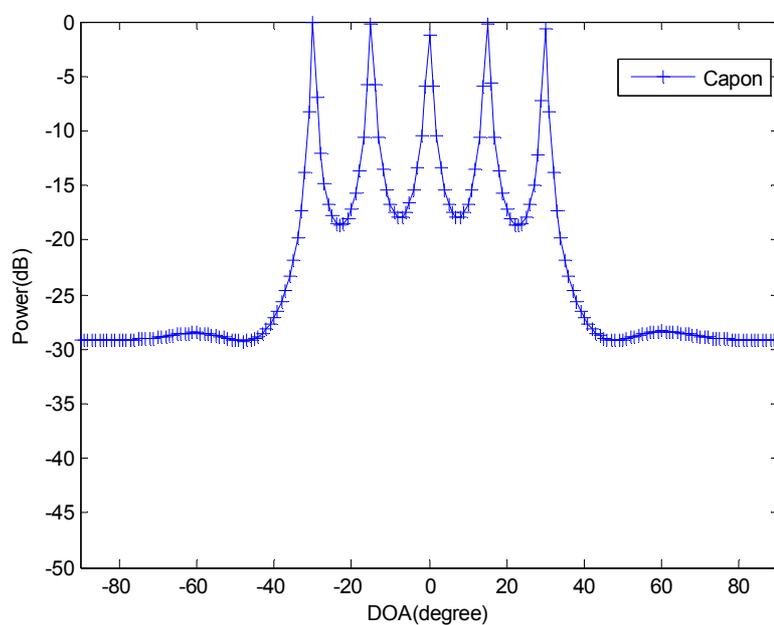


图 2.8 多个非相干信号的 Capon 算法仿真

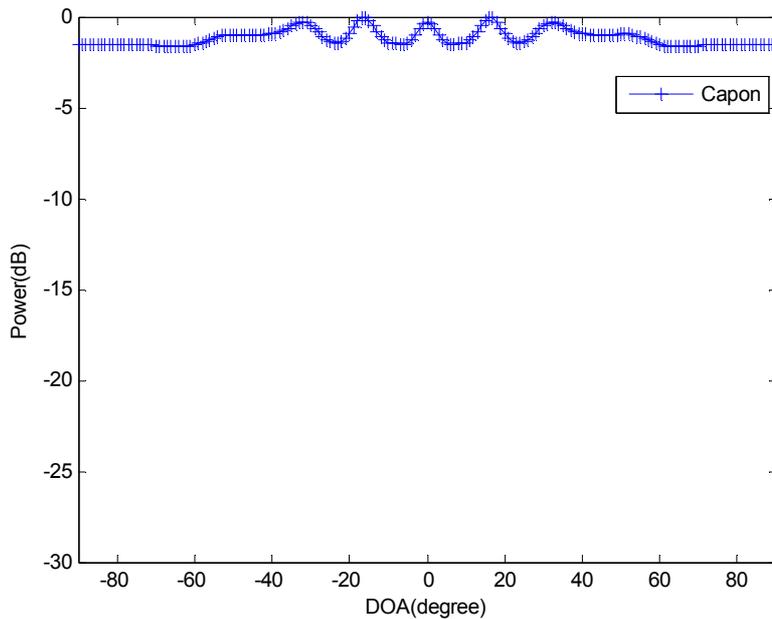


图 2.9 多个相干信号的 Capon 算法仿真

从图 2.8 和图 2.9 可以看出, Capon 算法比延迟-相加法有了一定程度的改进, 可以对多个信号进行 DOA 估计。但是 Capon 算法只能分辨非相干信号, 当存在与感兴趣信号相关的其它信号时, 它就不能起作用了。这是因为 Capon 算法在运算的过程中使用到了信号的自相关矩阵, 因而不能对干扰信号形成零陷。也就是说, 在使得输出功率为最小的过程当中, 相关分量可能会恶性合并。此外, Capon 算法运算时需要信号的自相关矩阵求逆, 当阵列加大时会有巨大的运算量。

## 2.4 DOA 估计的子空间方法

虽然 Capon 最小方差算法等传统算法通常很有效, 但是这些方法在分辨率上有着其本质上的局限性, 无法超过瑞利限的制约。之所以会有这些局限是因为这些算法没有利用式 (2-8) 给出的输入信号模型结构。从上个世纪 70 年代后期开始, 以多重信号分类 (MUSIC) 算法为代表的子空间分解类算法开始兴起。这一类算法有一个共同的特点, 就是需要对阵列的接收数据矩阵进行数学分解 (如奇异值分解、特征值分解和 QR 分解等), 将数据分解成两个互相正交的特征子空间: 一个是信号子空间, 另一个是噪声子空间。子空间类算法按照处理方式的不同可以分成两类: 一种是以 MUSIC 算法为代表的噪声子空间类算法, 另一种是以 ESPRIT 算法为代表的信号子空间类算法。

## 2.4.1 MUSIC 算法

由前面章节的讨论可知，窄带远场信号 DOA 估计的数学模型为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (2-23)$$

阵列接收数据的自相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2-24)$$

因为信号和噪声之间相互独立，所以阵列接收数据的自相关矩阵可以分解为信号部分和噪声部分，上式中  $\mathbf{R}_S$  是信号的自相关矩阵， $\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H$  为信号部分， $\sigma^2\mathbf{I}$  为噪声部分。

对自相关矩阵  $\mathbf{R}$  做特征分解，可以得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S\mathbf{\Sigma}_S\mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N\mathbf{\Sigma}_N\mathbf{U}_N^H \quad (2-25)$$

式 (2-25) 中， $\mathbf{U}_S$  是由属于大特征值的特征向量所构成的信号子空间， $\mathbf{U}_N$  是由属于小特征值的特征向量所构成的噪声子空间。

由于噪声子空间和信号子空间是相互正交的，而由导向矢量所张成的空间与信号子空间是一致的，因此有

$$\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_N = 0 \quad (2-26)$$

经典的 MUSIC 算法正是在式 (2-26) 这个性质的基础上提出来的，但是实际中接收数据矩阵长度是有限的，即阵列接收数据的自相关矩阵的最大似然 (ML) 估计为：

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (2-27)$$

对自相关矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  做特征值分解，可以得到它的噪声子空间  $\hat{\mathbf{U}}_N$  和信号子空间  $\hat{\mathbf{U}}_S$ 。因为有噪声的存在，所以  $\mathbf{a}(\theta)$  与  $\hat{\mathbf{U}}_N$  不能够完全的正交，即式 (2-26) 并不成立。实际上求解 DOA 估计是通过最小优化搜索来实现的，即

$$\theta_{MUSIC} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{U}}_N\hat{\mathbf{U}}_N^H\mathbf{a}(\theta) \quad (2-28)$$

因此，可以得到 MUSIC 算法的空间谱估计函数为：

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{U}}_N\hat{\mathbf{U}}_N^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (2-29)$$

当导向矢量  $\mathbf{a}(\theta) \in \hat{\mathbf{U}}_s$  时,  $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{U}}_N$  是一个非常小的值 (接近于零), 而当导向矢量  $\mathbf{a}(\theta) \notin \hat{\mathbf{U}}_s$  时,  $\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{U}}_N$  是一个非零值。因此, 由式 (2-29) 所产生的空间谱会在信号源的方向上生成很尖的“谱峰”, 而在其它的方向上则会相对平坦。

应当指出, 与传统方法不同, MUSIC 算法在估计信号功率时并没有考虑波达角。在噪声与信号源非相关的环境下, 可以确保  $P_{MUSIC}(\theta)$  的谱峰对应着信号的真实方向。由于  $P_{MUSIC}(\theta)$  的峰值是可以分辨的, 并且与信号之间的真实角度间隔没有关系, 因此从理论上讲, 只要阵元位置校准的足够准确, MUSIC 算法就可以分辨出两个邻近的信号。但是当入射信号之间彼此高度相关时, 自相关矩阵  $\mathbf{R}_{xx}$  会变成奇异矩阵, 这将导致 MUSIC 算法失效。

MUSIC 算法进一步的发展, 出现了 MUSIC 算法的改进算法, 例如基于解相干的 MUSIC 算法、基于波束空间的 MUSIC 算法以及求根 MUSIC 算法等处理各种复杂情况的空间谱估计算法。

#### 2.4.2 ESPRIT 算法

旋转不变子空间算法 (ESPRIT) 是空间谱估计算法中的典型算法之一, 它和前面介绍的 MUSIC 算法一样, 也需要对阵列接收数据的协方差矩阵进行特征分解。但是两者也存在着明显的不同点, 即 MUSIC 算法利用了阵列接收数据的协方差矩阵的噪声子空间和导向矢量之间的正交特性, 而 ESPRIT 算法则利用了阵列接收数据的协方差矩阵信号子空间的旋转不变性, 所以 MUSIC 算法与 ESPRIT 算法可以看成为是一种互补的关系。和 MUSIC 算法相比, ESPRIT 算法具有计算量小的优点, 且不需要进行谱峰搜索。

与 MUSIC 算法不同的是, ESPRIT 算法不需要知道精确的导向矢量, 只需要各子阵之间的阵元保持一致。这种算法思想是将接收阵列在几何结构上分为两个完全一致的位置平移的子阵列, 两个子阵列之间具有平移不变性。使信号源入射角在两个子阵列上只相差一个旋转不变因子, 这一旋转不变因子包含了各个入射信号的到达角信息, 可以通过求解一个广义特征值方程得到。

ESPRIT 算法的最基本的假设是, 存在着两个完全相同的子阵列, 且两个子阵列的间距  $\Delta$  是已知的。以线形阵列为例, 考察一个由  $m$  个阵元所组成的均匀等距线阵, 如图 2.5 所示:

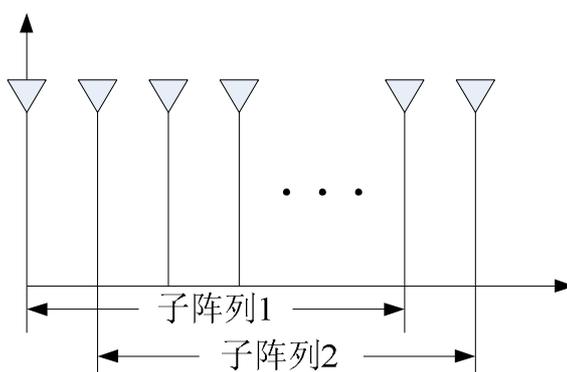


图 2.5 均匀等距线阵模型图

将这个均匀等距线阵分成两个子阵列，其中，子阵列 1 由第 1 至第  $m-1$  个阵元组成，子阵列 2 由第 2 至第  $m$  个阵元组成。

令  $m \times N$  矩阵

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \quad \mathbf{x}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(N)] \quad (2-30)$$

代表均匀等距线阵的接收数据矩阵，其中， $\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \cdots \quad x_m(n)]^T$  是由  $m$  个阵元在  $n$  时刻的观测信号组成的接收数据矢量， $N$  为数据长度，即  $n = 1, 2, \dots, N$ 。

若令

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1) \quad \mathbf{s}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{s}(N)] \quad (2-31)$$

表示信号矩阵，式 (2-31) 中  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n) \quad s_2(n) \quad \cdots \quad s_K(n)]^T$  表示信号矢量， $K$  为信号的个数，则对应于  $N$  个快拍数据，下式

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2-32)$$

可以用矩阵形式表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \quad \mathbf{x}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(N)] = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (2-33)$$

式 (2-33) 中， $\mathbf{A}$  是  $m \times K$  维导向矢量矩阵， $\mathbf{W}$  为噪声矩阵。

令  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{J}_2$  是两个  $(m-1) \times m$  维选择矩阵，且有

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{m-1} \quad \mathbf{0}_{m-1}] \quad (2-34)$$

$$\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{m-1} \quad \mathbf{I}_{m-1}] \quad (2-35)$$

式 (2-34) 和式 (2-35) 中， $\mathbf{I}_{m-1}$  代表  $(m-1) \times (m-1)$  维单位矩阵， $\mathbf{0}_{m-1}$  代表  $(m-1) \times 1$  维零向量。

用选择矩阵  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{J}_2$  分别左乘阵列接收数据矩阵  $\mathbf{X}$ ，得

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{X} = [\mathbf{x}_1(1) \quad \mathbf{x}_1(2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_1(N)] \quad (2-36)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{X} = [\mathbf{x}_2(1) \quad \mathbf{x}_2(2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_2(N)] \quad (2-37)$$

式 (2-36) 和式 (2-37) 中

$$\mathbf{x}_1(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \cdots \quad x_{m-1}(n)]^T, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2-38)$$

$$\mathbf{x}_2(n) = [x_2(n) \quad x_3(n) \quad \cdots \quad x_m(n)]^T, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2-39)$$

这就是说, 阵列接收数据子矩阵  $\mathbf{X}_1$  由接收数据矩阵  $\mathbf{X}$  的前  $m-1$  行组成, 相当于子阵列 1 的接收数据矩阵; 阵列接收数据子矩阵  $\mathbf{X}_2$  由接收数据矩阵  $\mathbf{X}$  的后  $m-1$  行组成, 相当于子阵列 2 的接收数据矩阵;

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

根据阵列响应矩阵  $\mathbf{A}$  的结构可知, 子矩阵  $\mathbf{A}_1$  和  $\mathbf{A}_2$  之间存在着如下关系:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{\Phi} \quad (2-41)$$

其中  $\mathbf{\Phi} = \text{diag}\{e^{j\phi_0} \quad e^{j\phi_1} \quad \cdots \quad e^{j\phi_{K-1}}\}$ , 式中  $\phi_k = (2\pi|\Delta|\sin\theta_k)/\lambda$ ,  $k=0, 1, \dots, K-1$ 。

很容易验证

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{S} \quad (2-42)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{S} = \mathbf{A}_1 \mathbf{\Phi} \mathbf{S} \quad (2-43)$$

由于  $\mathbf{\Phi}$  是一个酉矩阵, 因此  $\mathbf{X}_1$  与  $\mathbf{X}_2$  具有相同的统计特性, 即子阵 1 与子阵 2 拥有着同样的噪声子空间和信号子空间。

由下式

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2-44)$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= [\mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \sigma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_N^H \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{U}_s\mathbf{\Sigma}_s \quad \sigma^2\mathbf{U}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_N^H \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_s\mathbf{\Sigma}_s\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{U}_N\mathbf{U}_N^H \end{aligned} \quad (2-45)$$

由于  $\mathbf{I} - \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H$ ，所以根据上式可知

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H = \mathbf{U}_S \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H \quad (2-46)$$

用  $\mathbf{U}_S$  左乘上式的两边，利用  $\mathbf{U}_S^H \mathbf{U}_S = \mathbf{I}$ ，并加以整理重排，可得

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (2-47)$$

式 (2-47) 中，矩阵  $\mathbf{T}$  是非奇异的，即  $|\mathbf{T}| \neq 0$ ，且有  $\mathbf{T} = \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{U}_S (\boldsymbol{\Sigma}_S - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$ 。

用  $\mathbf{T}$  右乘式 (2-40)，有

$$\mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

采用同样的分块方式，可以将  $\mathbf{U}_S$  分块成为

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

由于  $\mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{U}_S$ ，比较式 (2-48) 和 (2-49) 可得

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \quad (2-50)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{T} \quad (2-51)$$

将式 (2-41) 代入式 (2-51)，得

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} \quad (2-52)$$

根据式 (2-50) 和式 (2-52)，可得

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} = \mathbf{A}_1 \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} = \mathbf{U}_2 \quad (2-53)$$

令

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} \quad (2-54)$$

矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  是矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的相似矩阵，因此它们具有相同的特征值，即  $\boldsymbol{\Psi}$  的特征值也为  $e^{j\phi_k}$ ， $k=1,2,\dots,K$ 。

将式 (2-54) 代入式 (2-53)，则有

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Psi} \quad (2-55)$$

式 (2-55) 启发了基本 ESPRIT 算法的另一种形式的求解方法：

1. 将阵列接收数据协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  进行特征值分解  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{U}} \boldsymbol{\Sigma} \hat{\mathbf{U}}^H$ 。
2. 矩阵  $\hat{\mathbf{U}}$  中  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  的  $K$  个主特征值对应的特征向量组成  $\hat{\mathbf{U}}_S$ ， $\hat{\mathbf{U}}_S$  为信号子空间。
3. 取  $\hat{\mathbf{U}}_S$  的前  $m-1$  行组成矩阵  $\hat{\mathbf{U}}_1$ ，取后面的  $m-1$  行组成矩阵  $\hat{\mathbf{U}}_2$ 。对矩阵

$\Psi = (\hat{\mathbf{U}}_1^H \mathbf{U}_1)^{-1} \hat{\mathbf{U}}_1^H \hat{\mathbf{U}}_2$  进行特征值分解，由矩阵  $\Psi$  的特征值  $e^{-j\hat{\phi}_k}$  ( $k = 0, 1, \dots, K-1$ ) 给出估计值  $\hat{\phi}_k$ ， $k = 0, 1, \dots, K-1$ 。

### 2.4.3 MUSIC 算法仿真结果及分析

因为 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法是同一类型的算法，且 MUSIC 算法的频谱图比较直观，因此在这里只对 MUSIC 算法进行仿真分析。在均匀等距线阵下对 MUSIC 算法进行仿真，阵列的阵元数为 8，信噪比为 20dB，考察非相干信号和相干信号两种情况下算法的性能。信号的角度分别为  $-30^\circ$ ， $-15^\circ$ ， $0^\circ$ ， $15^\circ$  和  $30^\circ$ 。仿真分析结果如下：

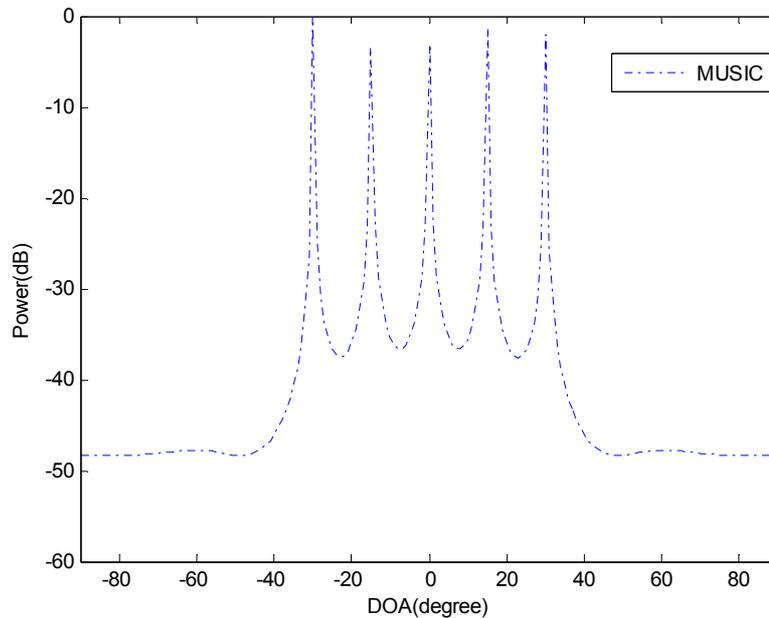


图 2.10 多个非相干信号的音乐算法仿真

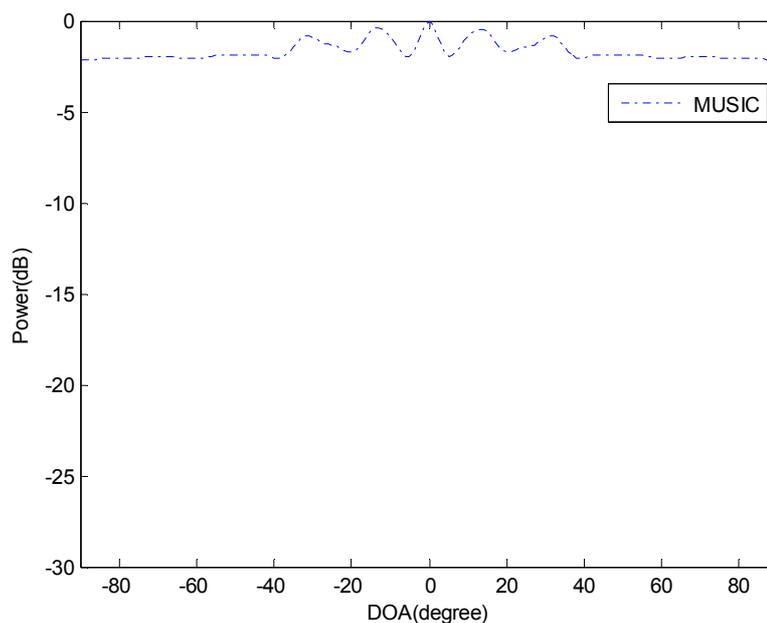


图 2.11 多个相干信号的音乐算法仿真

由图 2.10 和图 2.8 可以看出，MUSIC 算法的分辨率高于 Capon 方法，这说明子空间类 DOA 估计算法的分辨率确实高于传统的 DOA 估计算法。但是由图 2.11 可以看出，当来自空间的信号为相关的信号时，MUSIC 算法同 Capon 方法一样，也不能有效地给出信号的 DOA 估计。这是因为子空间类算法在计算的过程中同样用到了信号的自相关矩阵，不能消除相干信号间的相互干扰。

ESPRIT 算法与 MUSIC 算法同属于子空间类 DOA 估计算法，与 MUSIC 算法相比 ESPRIT 算法的速度快，但是精度低。总的来说 ESPRIT 算法的性能要差于 MUSIC 算法。ESPRIT 算法的优势在于它的实时性，一般的情况下，只要有二个子阵列满足旋转不变性，就可以用 ESPRIT 算法来实现，且其实现速度要优于 MUSIC 算法。

## 2.5 DOA 估计的其他方法

波达方向 (DOA) 估计的算法，除了传统法与子空间法之外，还有最大似然法和特性恢复与子空间法相结合的综合法。其中最大似然估计法是最优的方法，即便是在信噪比很低的环境下仍然具有良好的性能，但是通常计算量很大。综合法首先利用特征恢复方案区分多个信号，估计空间特征，进而采用子空间法确定波达方向。

### 2.5.1 最大似然法

最大似然法是空间谱估计最优的方案，也是 DOA 估计中最早采用的方法之一。可是由于最大似然法的计算量通常很大，其应用不如子空间法流行。但是仅就估计性能而言，最大似然法要优于子空间法，即使是在信噪比较低或者样本数比较少的环境下，也可以获得良好的估计性能。此外，同子空间方法不同的是，最大似然法在原信号为相关信号的环境下也能保持良好的性能。在阵列信号处理中，最大似然估计法是最著名、最常用的一种建模方法，根据原信号数学模型假设的不同，基于最大似然方法的 DOA 估计方法可以分成两大类：确定性最大似然法（DML: deterministic ML）和随机性最大似然法（SML: stochastic ML）。

但就估计方差而言，在阵列接收数据协方差矩阵为对角矩阵的环境下，DML 方法的性能与 MUSIC 算法的性能相同<sup>[26]</sup>。此外，只有在理想的环境下，DML 算法可能接近于常规波束形成（CRB）算法。对于足够大的快拍数  $L$ ，SML 算法可能接近于 DML 算法。只有在理想的环境下，DML 算法才可能接近于 CRB。

### 2.5.2 DOA 估计综合法

DOA 估计的综合法是利用特性恢复方案，以此来区分多个信号，估计接收数据的空间特征，最后采用子空间法得到信号的波达方向。

DOA 估计的综合法的主要思想是：利用基于迭代最小二乘投影的 CMA(ILSP-CMA)算法，来估计  $M$  个阵列的空间特征，并对每一个空间特征的平滑空间特征协方差矩阵运用 MUSIC 或 ESPRIT 等子空间算法。对于存在多个共信道用户或每个用户具有多个分量的情况，这种方法可以确定多个用户多个分量的波达方向，并使各个分量对应于正确的用户。

## 2.6 本章小结

本章主要讨论了波达方向（DOA）估计的一些基本算法，主要包括延迟—相加法、Capon 最小方差方法、MUSIC 算法和 ESPRIT 算法，简要介绍了最大似然法和综合法。

延迟—相加法是把阵列形成的波束指向某个方向，由此可以获得来自于这个方向的信号的最大功率。就单个信号而言，延迟—相加法可以很好地估计出它的波达方向，但是当信号空间中存在多个信号的时候，延迟—相加法的估计性能就会急剧的下降。Capon 最小方差算法有效地解决了延迟—相加法本身分辨率差的问题，但是当信号源中存在相干信号时，Capon 算法就无法准确地估计出信号的

波达方向了。

MUSIC 算法精度高, 运算速度慢; ESPRIT 算法速度快, 但是精度低。MUSIC 算法和 ESPRIT 算法都不能处理相干信号源。总的来说 ESPRIT 算法的性能要差于 MUSIC 算法。在 ESPRIT 算法取最优权的条件下, 两者的性能比较接近, 此时两者的算法性能之比, 与阵元数、信源数和入射信号的角度间隔均有关系。总的来说, 阵元数越大、信源数越少、入射信号的角度间隔越大, ESPRIT 算法与 MUSIC 算法的性能就越接近。ESPRIT 算法的优点在于它的实时性, 一般的情况下, 只要有二个子阵列满足旋转不变性, 就可以用 ESPRIT 算法来实现, 且其实现速度要优于 MUSIC 算法。

在最大似然法中, 当噪声平稳, 且样本个数趋于无穷大时, 确定性最大似然法的误差收敛趋近于零, 但是由于受到初始波达方向估计值的影响, 无法保证使其收敛于总体最小值。随机性的最大似然法可以适用于高斯或非高斯的情况, 但是它的优化问题比较困难。

基于传统空间谱估计方法的 DOA 估计算法, 尤其是其中估计性能较为优越的子空间分解类算法, 它是利用阵列接收数据的统计特性来进行 DOA 估计的, 这种方法需要大量的数据来实现信号源的 DOA 估计, 并且它对采样系统也有较高的要求。此外, MUSIC 等子空间类算法对于相干信号源的 DOA 估计效果比较差, 并且对信噪比的要求也很高。因此, 研究新的 DOA 估计方法, 使之只需要使用很少的采样数据就可以实现高精度的 DOA 估计, 是一个很值得研究的方向。



## 第三章 压缩感知原理

传统形式下的信号处理方式，依照 Nyquist 采样理论采样会产生海量的采样数据，而在后期的压缩编码过程中大部分的采样数据将会被抛弃，这就极大地增加了数据存储、传输的代价和资源的浪费。因为带宽的限制，许多信号只包含有少量重要频率的信息，所以大部分的信号是稀疏的或者可压缩的，对于这一类型的信号而言，传统形式采样后的大部分数据都要被抛弃，那么，为什么还要获取全部的采样数据呢？能不能直接获取压缩以后的数据而不需要抛弃任何数据？因此，如何突破 Nyquist 采样理论支撑下的传统信号获取和处理方式，是推动信息科学进一步发展亟待解决的问题。

近年来，应用数学领域中提出来的压缩感知（Compressing Sensing, CS）理论引起了学者们的极大关注，并已经广泛的应用于图像处理 and 无线通信等诸多领域。CS 理论指出，若信号为可压缩的或者稀疏的，则可以采用低于奈奎斯特频率的采样速率，对信号进行非自适应随机投影测量，通过求解一个  $l_1$  优化问题，可以以很高的概率精确重建原信号。压缩感知理论是由 D Donoho、E Candès 以及 T. Tao(陶哲轩)等人<sup>[27~28]</sup>于 2006 年正式提出的一项新理论，该理论突破了 Nyquist 采样速率的限制。目前，压缩感知理论尚处于初步研究阶段，理论研究还不够完善，实际的应用也比较少，在国内起步也相对较晚。

基于阵列的 DOA 估计是信号处理领域的一个重要分支，与信号处理的其它领域一样，DOA 估计中一个必要的步骤就是采样，在第二章中介绍的各种经典的空间谱估计算法，都需要根据 Nyquist 采样定理进行采样，即信号采样的速率必须是信号最高频率的两倍以上，这会导致大量的采样数据。压缩感知理论为信号采集和处理提供了新思路，本章基于单快拍接收数据，将压缩感知理论引入到信号源的 DOA 估计问题当中，为 DOA 估计提供一种新的方法。

### 3.1 压缩感知理论的研究现状与发展趋势

在传统的采样过程中，为了避免信号的失真，采样频率不得低于信号最高频率的 2 倍，这就是 Nyquist 采样定理。Nyquist 采样定理导致了海量的采样数据，这极大地增加了数据存储和数据传输的代价。压缩感知理论<sup>[29~30]</sup>是应用数学界近年来提出来的关于稀疏信号采集和恢复的理论，该理论充分利用信号的稀疏特性或者可压缩特性，对信号进行采样和处理，它可以以远少于经典采样理论所需的测量数据，精确的恢复原信号或估计出信号的参数。压缩感知理论现在已经

成为信号处理领域的一个新的研究热点,其在雷达成像<sup>[31~38]</sup>、压缩成像<sup>[39]</sup>和生物感知<sup>[40~42]</sup>等领域得到了初步的应用。

1986年, Santosa 和 Symes<sup>[19]</sup>最早明确提出了稀疏信号的概念,即在给定的表示基下,只有少量非零系数的信号。稀疏信号处理的基本模型是线性回归模型:设  $\mathbf{x}$  为长度为  $N$  的原始信号,  $\mathbf{y}$  为长度为  $M$  的观测信号,  $\Phi_{M \times N}$  ( $M < N$ ) 为观测矩阵,且满足  $\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{n}$ , 其中  $\mathbf{n}$  为噪声矢量。若  $\mathbf{x}$  为  $K$ -稀疏信号,且观测矩阵满足约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP),则当  $M > K \log(N)$  时,  $\mathbf{x}$  可被精确重构。由观测值  $\mathbf{y}$  重构原始信号  $\mathbf{x}$  最直接的方法是求解下面的优化方程:

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad st \quad \|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3-1)$$

但是,式(3-1)是一个欠定方程,求解此欠定方程的解,就是求  $\mathbf{x}$  的  $l_0$  范数。 $\mathbf{x}$  的  $l_0$  范数表示  $\mathbf{x}$  中的非零元素个数,可描述待估向量的稀疏特性。然而,求解欠定方程(3-1)的解需要搜索所有非 0 位置的  $C_N^K$  种可能的线性组合,才能够找到最优解。因此,在现有数学基础理论条件下,  $l_0$  范数的求解非常困难,这是一个 NP 难题。

2001年, D.Donoho 和 M.Elad 等人<sup>[43]</sup>系统阐述了  $l_1$  范数优化与稀疏性之间的关联。2006年, E.Candès 和 T.Tao<sup>[44~46]</sup>给出了  $l_1$  范数与  $l_0$  范数优化问题等价的充分条件,即约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP),阐明了  $l_1$  范数优化与稀疏信号重建之间的关系。由  $l_1$  范数和  $l_0$  范数在一定条件下的等价性,利用方程(3-2)的约束条件,求解一个更简单的线性规划问题可以得到与方程(3-1)相同的解:

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad st \quad \|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3-2)$$

式(3-2)与(3-1)只有很小的差别,但却使得问题变成了求解一个凸优化问题,于是可以方便的将最优化范数问题简化为线性规划问题,目前已有多名学者提出了不同的算法来解决这个问题。

在压缩感知理论的框架下,信号的采样率将不再取决于信号带宽,而是取决于信息在信号中的内容和结构,压缩感知理论打破了 Nyquist 采样定理的限制,为信号的采集和处理提供了新的思路和方法,这对应用科学和工程的许多领域具有十分重要的影响。

### 3.2 压缩感知理论下的稀疏信号

压缩感知是一种利用信号的稀疏性或可压缩性对信号重构的技术。因此,该理论首先要求信号在特定的基上是“稀疏”的或“可压缩”的。其核心思想是,让这些信号在采样的同时就能够在前端被压缩,从而可以在很大的程度上降低信

号的采样率。

一个有限长度的复信号  $\mathbf{x} = [x(1) \ x(2) \ \cdots \ x(L)] \in C^L$ ，可以表示成为一组有限正交基  $\{\boldsymbol{\psi}_k\}_{k=1}^L$  的线性组合。对应的系数设为  $\alpha_i, i=1,2,\dots,L$ ，即

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^L \alpha_k \boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (3-3)$$

式 (3-3) 中， $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_L]$ ， $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L]^T$  是信号  $\mathbf{x}$  在基矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  下的系数。显然， $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\mathbf{x}$  是等价的信号表示形式。若  $\boldsymbol{\alpha}$  满足  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = K \ll L$ ， $\|\cdot\|_0$  表示向量的  $l_0$  范数，则信号  $\mathbf{x}$  称为  $K$  稀疏信号。

### 3.2.1 时空域下的稀疏信号

我们首先考虑稀疏信号的重构问题，若信号  $\mathbf{x}$  在时空域本身就是稀疏的或者是可压缩的，则给定一个投影测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbf{R}^{M \times N} (M \ll N)$ ，如图 3.1 所示，对稀疏信号  $\mathbf{x}$  用测量投影矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  进行线性投影测量得到测量值矢量  $\mathbf{y}$ ，即

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (3-4)$$

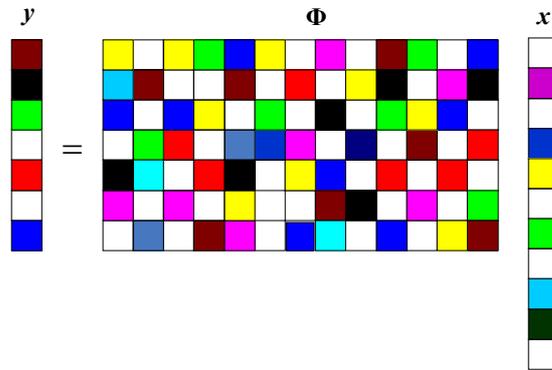


图 3.1 时空域稀疏信号的压缩过程

式 (3-4) 中的投影矢量  $\mathbf{y}$  可以用来重建信号  $\mathbf{x}$ 。由于投影矢量  $\mathbf{y}$  的维数  $M$  远小于信号  $\mathbf{x}$  的维数  $N$ ，所以方程 (3-4) 是一个欠定方程，具有无穷多的解，通过直接求解的方法不能重建原信号。但是，理论证明<sup>[46]</sup>，如果原信号  $\mathbf{x}$  在时空域中是  $K$  - 稀疏或者可压缩的 ( $K \ll M$ ) 信号，并且  $\boldsymbol{\Phi}$  满足 RIP<sup>[47~48]</sup> 条件时，则可以通过求解  $l_0$  范数的最优化问题，由投影矢量  $\mathbf{y}$  以很高的概率精确的重建原信号：

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (3-5)$$

上式中， $\|\mathbf{x}\|_0$  代表矢量  $\mathbf{x}$  的  $l_0$  范数，即矢量  $\mathbf{x}$  中非零的元素个数。Candès. E 等人指出，当测量数据关系满足  $M = O(K \log(N/K))$ ，并且投影矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  满足 RIP 条件时，就可以以很高的概率准确地重建  $K$  - 稀疏度信号  $\mathbf{x}$ 。

### 3.2.2 变换域下的稀疏信号

时空域下稀疏信号的模型很简单，但是常见的信号在时空域中几乎都不是稀疏信号，因而，不能用上述的信号重构模型来直接重构原信号。然而，通常的情况下，时空域的非稀疏信号影射到变换域后，会变成稀疏的或可压缩的。因此，傅里叶变换、小波变换以及多尺度几何分析等，为上面的问题提供了解决思路，即寻找待处理时空域非稀疏信号在某变换域下的稀疏表示方式。

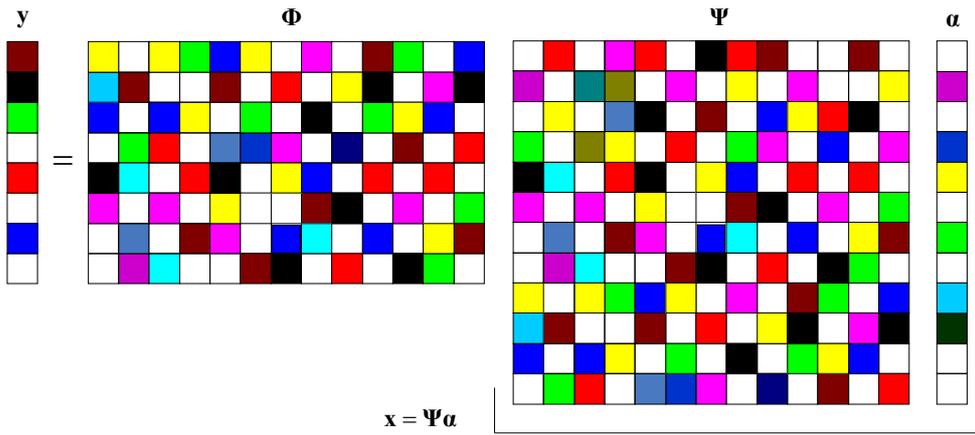


图 3.2 变换域下的稀疏信号压缩测量过程

设信号  $x$  在基变换矩阵  $\Psi$  下是稀疏的或可压缩的，即  $x = \Psi\alpha$ ， $\alpha$  是信号  $x$  在变换域下的稀疏表示，则图 3.2 中所示的信号  $y$ ，在投影测量矩阵  $\Phi$  下可以表示为

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha = \Theta \alpha \quad (3-6)$$

式中， $\Theta = \Phi \Psi$  为  $M \times N$  维的感知矩阵 (Sensing Matrix)， $y$  可以看成是稀疏信号  $\alpha$  在投影测量矩阵  $\Theta$  下的线性投影测量值。如果感知矩阵  $\Theta$  满足稀疏信号重构条件 RIP，则同样可以通过求解最优化  $l_0$  范数问题，以极高的概率来精确的重建稀疏信号  $\alpha$ ：

$$\min \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad y = \Theta \alpha \quad (3-7)$$

因为变换域  $\Psi$  是固定不变的，要让  $\Theta = \Phi \Psi$  满足 RIP 条件，则投影测量矩阵  $\Phi$  必须满足一定的条件。对此，E.Candès 和 T.Tao 提出来的约束等距条件以及 D.Donoho 提出来的不一致性条件，给出了稀疏信号重构的充分条件。目前常用的测量矩阵有：高斯随机矩阵、二值随机矩阵、局部傅里叶矩阵等。

求出信号  $x$  的稀疏表示系数  $\hat{\alpha}$ ，就可以进一步通过变换域基  $\Psi$  精确的重构原信号  $x$ ：

$$\hat{x} = \Psi \hat{\alpha} \quad (3-8)$$

同传统的信号采样方法对信号  $x$  先采样然后再压缩的方式不同，压缩感知理

论利用信号的稀疏性或可压缩性，用少量的测量数据通过求解最优化问题直接重构信号  $\mathbf{x}$ ，这突破了 Nyquist 采样定理的限制，提高了信号处理中数据采集与处理的效率，节约了信息处理系统中数据存储和传输的资源。

### 3.3 压缩感知的基本理论

传统信号编码解码的过程如图 3.3 所示：首先在信号编码端对信号采样，然后对所有的采样数据进行变换，并将其中的重要参数（如信号的幅度和位置等）进行编码，最后再将编码得到的值进一步存储和传输；信号的解码过程是信号编码过程的逆过程，对接收到的数据进行解压缩和反变换，得到恢复后的原始信号。这种编码解码方法有两个缺点：1) 由于信号采样的速率必须等于或大于信号最高频率的 2 倍，这会给硬件系统带来很大的负担；2) 在信号的压缩和编码过程中，大量计算后的数据被丢弃，这造成了内存资源和数据运算的极大浪费。

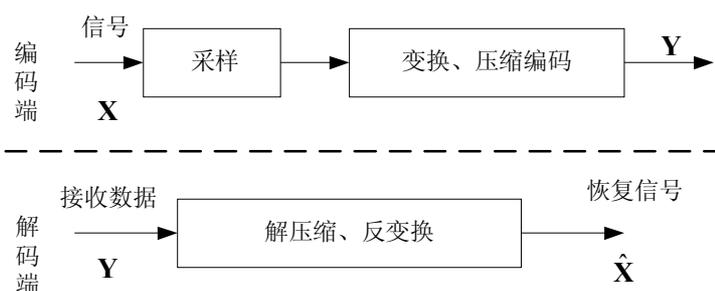


图 3.3 传统信号编解码理论框图

压缩感知理论的编解码过程与传统的信号编解码过程不同，如图 3.4 所示。CS 理论是一种新的理论框架，其在采样的同时对信号数据进行压缩，利用信号的稀疏或可压缩性，在远低于 Nyquist 频率的采样速率下对信号进行测量编码。

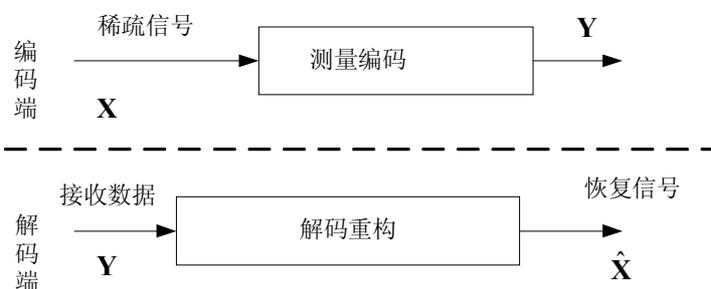


图 3.4 基于 CS 理论的编解码框图

测量值  $\mathbf{Y}$  并非信号本身，而是由高维数据到低维数据的投影值，从数学的角度来看，每一个测量数据都是传统采样理论下的样本数据的组合，即每一个测量数据都包含所有样本数据的部分信息。信号的解码过程并不是简单的逆编码

过程, 而是利用稀疏信号重构算法, 从概率的意义上对信号进行精确重构, 并且解码过程所需要的测量值远小于传统框架下的采样数。

CS 理论主要涉及以下三个方面的内容: 1) 对于一个信号  $\mathbf{x} \in C^N$ , 找到某个正交基  $\Psi \in C^{N \times N}$ , 使  $\mathbf{x}$  在  $\Psi$  上的系数  $\alpha$  是稀疏的, 即解决信号的稀疏或可压缩性表示问题。2) 设计一个投影测量矩阵  $\Phi$ , 使其满足 RIP 条件, 保证稀疏系数向量  $\alpha$  从  $N$  维降到  $M$  维时, 其包含的重要信息不被破坏, 即解决信号的低速率采样问题。3) 设计一个快速重构算法, 从线性观测值  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$  中恢复原始信号  $\mathbf{x}$ , 即解决信号的重构问题。

### 3.3.1 信号的稀疏表示

CS 理论成立的前提是信号是稀疏或可压缩的, 为了简化模型, 以便可以清楚地描述信号的稀疏表示问题, 仅考虑长度为  $N$  的实信号  $\mathbf{x}$ , 且  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$ 。根据矩阵理论可知,  $\mathbf{x}$  可以用一组正交基  $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_M]$  的线性组合来表示, 设对应的系数为  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 则有

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^L \alpha_i \psi_i = \Psi \alpha \quad (3-9)$$

式中,  $\alpha_i = \langle \mathbf{x}, \psi_i \rangle$ ,  $\alpha$  与  $\mathbf{x}$  均为  $N$  维列向量,  $\Psi$  为  $N \times N$  维矩阵。若信号  $\mathbf{x}$  在基  $\Psi$  下有且仅有  $K$  ( $K \ll N$ ) 个非 0 或者远大于 0 的系数时, 则称信号  $\mathbf{x}$  为基  $\Psi$  上的稀疏信号。

当信号  $\mathbf{x}$  在变换域  $\Psi$  上有且仅有  $K$  个非 0 系数时, 信号是严格稀疏的。而通常的情况下, 信号都是非稀疏的, 但是在一些正交基  $\Psi$  上, 可以得到这些信号的近似稀疏表示, 即信号在变换基下的系数是以指数级衰减趋近于零的。合理地选择变换基  $\Psi$ , 可以使信号的非零稀疏系数尽可能的少, 这不仅可以提高信号的采集速度, 而且还能够减少信号存储、传输所使用的资源。傅立叶变换、小波变换以及多尺度几何分析, 这些变换的目的都是为了提取信号的特征, 并对其进行稀疏性表示。如何找到或者构造出适合某一类信号的正交基, 以便求出信号最稀疏的表示, 这是一个很值得研究的问题。Peyré 把变换基由正交基扩展成了由多个正交基构成的正交基字典<sup>[49]</sup>。即在某一个正交基字典中, 可以自适应地寻找到一个能够逼近某种信号特征的最优正交基, 对于不同的信号可以找到最适合其信号特征的正交基, 将信号变换到正交基空间以后就可以得到信号的最稀疏表示形式。

### 3.3.2 投影测量矩阵的设计

在 CS 理论中, 通过变换得到信号的稀疏系数向量  $\alpha = \Psi^{-1} \mathbf{x}$  以后, 需要设计

一个投影测量矩阵  $\Phi$ 。 $\Phi$  必须保证：对信号  $\mathbf{x}$  在该投影测量矩阵上进行投影得到  $M$  个投影测量值，并且这  $M$  个测量值包含有信号  $\mathbf{x}$  绝大部分的信息，从而可以用少量的投影测量数据精确地重构信号  $\mathbf{x}$ 。

在压缩感知测量模型中，并不是对稀疏信号  $\mathbf{x}$  本身进行直接采样，而是将稀疏信号  $\mathbf{x}$  映射到投影测量基  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_M]^T$  上，得到投影测量值  $y_m = \langle \mathbf{x}, \phi_m \rangle$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ 。用矩阵形式表示为：

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \boldsymbol{\alpha} = \Theta \boldsymbol{\alpha} \quad (3-10)$$

其中， $\phi_m$  为  $N$  维列向量， $\mathbf{y}$  是  $M$  维列向量， $\Theta$  是  $M \times N (M \ll N)$  维矩阵，称为感知矩阵或测量矩阵。投影测量的过程是非自适应的，即  $\Phi$  不需要根据信号  $\mathbf{x}$  不同而变化，测量的也不再是信号的采样点，而是信号的本身，并且要求感知矩阵必须满足 RIP 条件。这说明了投影测量矩阵  $\Phi$  与信号的稀疏系数表示基  $\Psi$  不相关，即  $\Phi$  的行不可以由  $\Psi$  的列表示， $\Psi$  的行也不可以由  $\Phi$  的列表示。

当  $M \ll N$  时，式 (3-10) 是一个欠定方程，无法直接求解此方程到正确的解。但是，由压缩感知理论可以知到，对于一个稀疏或者可压缩信号，当感知矩阵  $\Theta = \Phi \Psi$  满足一定的条件时，可以通过求解一个最优化问题，以极高的概率精确重构信号  $\mathbf{x}$ 。

从压缩感知的过程可以看出，必须选择合适的测量矩阵，才可以从压缩后的数据中精确地重构原信号。目前，可以用于压缩感知的测量矩阵主要有以下几种：高斯随机矩阵、二值随机矩阵(伯努力矩阵)、傅立叶随机矩阵、哈达玛矩阵等。

### 3.3.3 稀疏信号的重构算法

稀疏信号重构是压缩感知理论中极为关键的一步，是从少量的非自适应线性观测数据中重构原始信号，即从  $M$  个观测数据中重构长度为  $N (M \ll N)$  的原始信号。在信号重构过程中，由于观测数据长度  $M$  远远小于信号的长度  $N$ ，因此必须要面对求解欠定方程  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$  的问题。理论上，最简单的方法是求解  $l_0$  最小化范数问题

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3-11)$$

式 (3-11) 所示为  $\mathbf{x}$  的  $l_0$  范数问题，实际上是求解向量  $\mathbf{x}$  中非零元素的个数。 $l_0$  最小化范数问题从理论上说是最优的，但是在实际中却很难实现，是一个 NP 难问题。

Chen, Donoho 和 Saundem 指出<sup>[32]</sup>，求解一个更为简单的  $l_1$  最优化问题可以产生与  $l_0$  最优化问题等价的解：

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3-12)$$

式 (3-12) 与式 (3-11) 只有极小的不同, 但是却使得问题变成了求解一个凸优化问题, 可以简化为线性规划问题, 典型的算法有: 基追踪 (BP)、正交匹配追踪 (OMP) 等有效算法求解式 (3-12) 的最优化问题。此外, 有效的算法还有迭代阈值法以及其它各种改进算法。

### 3.4 稀疏信号重构的条件

压缩感知理论说明, 对于稀疏的或可压缩的信号而言, 当投影测量矩阵满足一定的条件时, 可通过求解最优化范数问题以极高的概率重构原始信号。为了可以将压缩感知理论应用于信号的 DOA 估计问题中, 必须要研究投影测量矩阵需要满足的稀疏重构条件, 使得研究基于压缩感知的 DOA 估计问题可以顺利进行。

#### 3.4.1 约束等距性条件分析

E.Candès 和 T.Tao 提出来的约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[44]</sup>, 为稀疏信号重构问题存在定解找到了一个充分条件。以下是关于 RIP 概念的数学定义。

**定义 3.1**<sup>[44]</sup> 设  $\Phi$  为  $M \times N$  维矩阵, 且  $M \ll N$ , 集合  $\mathbf{T} \subseteq \{1 \ 2 \ \dots \ N\}$ ,  $|\mathbf{T}|$  为集合  $\mathbf{T}$  的势, 且  $|\mathbf{T}| \leq N$ 。对于任意整数  $K$ ,  $K \in [1, N]$ , 定义  $K$ -约束等距常数 ( $K$ -Restricted Isometry Constants,  $K$ -RIC) 为  $\delta_K$ , 则对于任意的  $|\mathbf{T}| \times 1$  维列向量  $\mathbf{c}$ , 有下述不等式成立

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|\Phi_{\mathbf{T}} \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{c}\|_2^2 \quad (3-13)$$

其中  $\Phi_{\mathbf{T}}$  为矩阵  $\Phi$  的列向量按照集合  $\mathbf{T}$  中元素索引组成的子矩阵, 对于任意的  $\Phi_{\mathbf{T}}$ ,  $\delta_K$  为使得上式成立的最小值。同样的, 对于任意满足  $K + K' \leq N$  的整数  $K$  与  $K'$ , 定义  $K, K'$ -约束正交常数 ( $K, K'$ -Restricted Orthogonality Constants,  $K, K'$ -ROC)  $\theta_{K, K'}$  为使得不等式 (3-14)

$$|\langle \Phi_{\mathbf{T}} \mathbf{c}, \Phi_{\mathbf{T}'} \mathbf{c}' \rangle| \leq \theta_{K, K'} \|\mathbf{c}\|_2 \|\mathbf{c}'\|_2 \quad (3-14)$$

对于所有满足  $\mathbf{T}, \mathbf{T}' \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $|\mathbf{T}| \leq K$ ,  $|\mathbf{T}'| \leq K'$  的子阵  $\Phi_{\mathbf{T}}$ ,  $\Phi_{\mathbf{T}'}$  都成立的最小值。式 (3-13) 称为约束等距性质(RIP)。

根据常数 RIC 和 ROC 的定义, E.Candès 等人给出了由  $l_1$  范数最优化问题精确重构原始信号的充分条件:

**定理 3.1**<sup>[44]</sup> 当  $K$  ( $K \geq 1$ ) 满足条件

$$\delta_K + \theta_{K, K} + \theta_{K, 2K} < 1 \quad (3-15)$$

时,  $l_1$  范数最优化问题有唯一的解。

目前为止, 由 RIC 和 ROC 确定的的稀疏重构条件包括  $\delta_{3K} + 3\delta_{4K} < 2$ ,  $\delta_{2K} + \theta_{K,2K} < 1$ ,  $\delta_{1.5K} + \theta_{K,1.5K} < 1$ ,  $\delta_{1.25K} + \theta_{K,1.25K} < 1$ 。

### 3.4.2 不一致性条件分析

D. Donoho 提出来的不一致性条件(Mutual Incoherence Property, MIP)<sup>[45]</sup>也被广泛地应用于稀疏信号重构问题之中。它指出, 如果投影测量矩阵的任意两个列向量的相似度越小, 则其稀疏重建的性能就越好。

**定义 3.2**<sup>[45]</sup> 设  $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1}^N$  是一个归一化的字典,  $\Phi_i$  是字典中的原子, 则该字典的相关性的定义为

$$\mu(\Phi) = \max_{j \neq k} |\langle \Phi_j, \Phi_k \rangle| \quad (3-16)$$

其中,  $|\langle \bullet, \bullet \rangle|$  代表两个原子之间的内积,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ 。

相关性  $\mu(\Phi)$  可以度量字典  $\Phi$  中任意的两个原子之间的相关程度, 当  $\mu(\Phi)$  的值很小时, 可以称字典  $\Phi$  是不相关的, 记为  $\mu := \mu(\Phi)$ 。

D. Donoho 等人指出, 在无噪的情况下, 当字典  $\Phi$  由两个相互正交的基的组成时, 若信号的稀疏度  $K$  满足条件

$$K < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \quad (3-17)$$

时, 则可以通过求解  $l_1$  最小优化范数问题, 唯一且完全精确地重构出原稀疏信号。

D. Donoho 和 M. Elad 等人对包含噪声的情况进行了研究, 理论结果表明, 当满足

$$K < \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \quad (3-18)$$

的条件时, 信号重构的误差与噪声成比例。文献[50]得出结论, 在包含噪声的情况下信号可以稳定重构的充分条件是, 信号稀疏度  $K$  满足

$$K < \frac{1}{3 + \sqrt{6}} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \approx 0.368 \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \quad (3-19)$$

T. T. Cai 等人<sup>[51]</sup>的研究指出, 只要满足式(3-17)的条件, 就可以在包含噪声的情况下稳定地重构出原信号, 具体的描述为:

**定理 3.2**<sup>[51]</sup> 假设模型

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3-20)$$

式 (3-20) 中,  $\|\mathbf{n}\|_2^2 = \varepsilon$ ,  $\mathbf{x}$  为  $K$ -稀疏信号, 且满足  $K < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right)$ 。令  $\hat{\mathbf{x}}$  为下面  $l_1$  最优化问题的解

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\| \leq \sigma \quad (3-21)$$

其中,  $\varepsilon \leq \sigma$ , 重构误差满足

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{\sqrt{3(1+\mu)}}{1-(2K-1)\mu} \cdot (\eta + \varepsilon) \quad (3-22)$$

该定理优化了信号稳定性重建的有关结论, 使得在包含噪声和字典为一般字典的情况下, 信号稳定性重建的相关性条件比式(3-18)、(3-19)等更为弱化、更易满足。

### 3.4.3 约束等距性与不一致性的关系

约束等距性条件和不一致性条件有着非常紧密的联系, 从之前的定义可以看出,  $\mu = \delta_2 = \theta_{1,1}$ , 文献[52,53]指出

$$\delta_K \leq (K-1)\mu, \quad \theta_{K,K'} \leq \sqrt{KK'}\mu \quad (3-23)$$

在这种关系下, 等距约束条件下的结论也可以用不一致性条件下的框架来描述。目前为止, 在 RIP 框架下的最佳稀疏重构条件是

$$\delta_{1.25K} + \theta_{K,1.25K} < 1 \quad (3-24)$$

由式 (3-23) 和式 (3-24) 可以得到, MIP 框架下的最佳稀疏重构条件为

$$K < \frac{1}{1.25 + \sqrt{1.25}} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \approx \frac{1}{2.368} \left( \frac{1}{\mu} + 1 \right) \quad (3-25)$$

显然, 式 (3-25) 所示的条件不如 MIP 框架下最佳的条件 (3-17)。因此, 虽然 RIP 和 MIP 有着紧密的联联系, 但是它们本质上是两种不同的稀疏重建条件, 这两者的处理方式也不一样。

## 3.5 本章小结

本章主要介绍压缩感知理论的基本原理以及信号 DOA 估计问题在压缩感知理论框架下的数学描述。首先介绍了压缩感知理论的研究现状与发展趋势; 其次, 研究了压缩感知理论的基本原理和基本框架, 主要包括时空域下的稀疏信号表示形式和变换域下的稀疏信号表示形式, 投影测量矩阵的设计和稀疏信号的重构算法; 最后, 研究了稀疏信号重构的条件, 详细介绍了约束等距性质(RIP)、不一致

---

性性质(MIP)以及二者之间的关系。



## 第四章 基于压缩感知的 DOA 估计算法和仿真

### 4.1 阵列接收信号的空域稀疏表示

考虑一个阵元个数为  $N$  的均匀线阵(ULA)。假设有  $K$  个远场窄带信号源，则该线阵在时刻  $t$  接收信号的数学模型是

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4-1)$$

式中， $\mathbf{A}$  为  $N \times K$  维阵列流形矩阵，且

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\omega_0) \quad \mathbf{a}_2(\omega_0) \quad \cdots \quad \mathbf{a}_K(\omega_0)] \quad (4-2)$$

式(4-2)中的导向矢量  $\mathbf{a}_k(\omega_0)$  为

$$\mathbf{a}_k(\omega_0) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_0\tau_{1k}} \\ e^{-j\omega_0\tau_{2k}} \\ \vdots \\ e^{-j\omega_0\tau_{Nk}} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

式(4-3)中， $\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ ，其中  $c$  为光速， $\lambda$  为波长； $\tau_{nk} = \frac{1}{c}(x_n \sin \theta_k)$ ， $n=1,2,\dots,N$ ，

$k=1,2,\dots,K$ ， $\theta_k$  为第  $k$  个信号源的方位角。

由此可知，阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  的每一列  $\mathbf{a}_k(\omega_0)$  都对应着一个目标信号源的空间位置  $\theta_k$ ，也就是说阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  中包含着目标的方位信息。

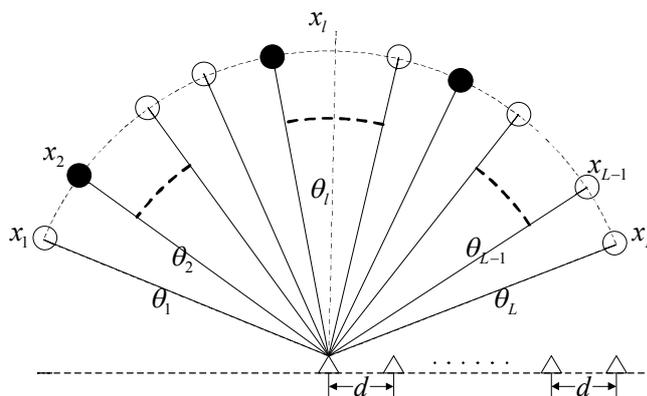


图 4.1 源信号的空间稀疏化图示

如图 4.1 所示，将整个空间按角度分为  $L$  份，即  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L\}$ ，假设每一个角度划分  $\theta_l (l=1,2,\dots,L)$  都对应着一个潜在的源信号  $x_l$ ，“•”表示空间实际存在的源信号，“o”表示空间中实际并不存在的源信号，那么阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  的每一列

都对应着一个潜在的源信号的方位信息。为了体现出阵列接收信号的空域稀疏性，潜在的信号源个数往往要比空间中实际存在的信号源个数大得多，即  $L \gg K$ 。同样，这也构造了一个  $L \times 1$  维的空域稀疏信号  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_L]^T$ ，在信号向量  $\mathbf{x}$  中，只有空间中实际存在有目标的  $K$  个位置为非零元素，而其余的  $N - K$  个位置均为零元素。因此，阵列接收信号 DOA 估计的数学模型可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (4-4)$$

其中， $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_M]^T$  为某时刻阵列中阵元的接收数据向量， $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_L]^T$  表示包含有实际源信号的空域稀疏信号， $\mathbf{A}$  为阵列接收信号稀疏表示以后所对应的  $N \times L$  维的阵列流形矩阵，向量  $\mathbf{n}$  则表示阵元实际接收到的噪声。

对于任意一个给定的空间角度划分方式  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L\}$ ，只要空间角度的划分方式确定了，式 (4-4) 中的阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  也就随着确定了。利用 CS 理论来解决阵列接收信号的 DOA 估计问题，就是根据阵列的接收数据  $\mathbf{y}$  和已经确定的阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$ ，来重构空间信号源向量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_L]^T$ ， $\mathbf{x}$  中的前  $K$  个最大的分量所在的位置即为空间中实际存在的源信号所对应的空域角度位置。然后，根据空间角度划分  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_L\}$  和信号向量  $\mathbf{x}$  的一一对应关系就可以得到空间信号源的 DOA 估计。因此，可以通过求解以下  $l_1$  范数最小优化问题重构原始信号：

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \sigma \end{cases} \quad (4-5)$$

式中， $\sigma$  为噪声水平的一个估计。

对于多快拍接收数据的情况，设阵列接收快拍数为  $N_L$ ，第  $i$  次快拍接收的信号矢量为  $\mathbf{y}_i$ ，信号矢量为  $\mathbf{x}_i$ ，噪声矢量为  $\mathbf{n}_i$ ，且服从复正态分布，即  $\mathbf{n}_i \sim CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ ，由 (4-4) 式可得

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (4-6)$$

其中，阵列接收数据矩阵  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_L}]$ ，信号方位信息矩阵  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_L}]$ ，噪声数据矩阵  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{N_L}]$ 。

上述讨论给出了基于压缩感知理论框架下的信号源 DOA 估计问题的数学模型。由以上的问题描述可以知道，这里的阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  相当于 CS 理论中的投影测量矩阵  $\Phi$ ，所以，为了确保可以由  $l_1$  范数最小优化问题精确地重构原始信号，并得到其准确的 DOA 估计，阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  需要满足一定的条件。在一个确定的阵列结构下，阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  由信号源空间角度的划分形式决定，不同的空域角度划分方式将会产生不同形式的阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$ ，如若采用适当的空间角度划分方式，则得到的阵列流形矩阵  $\mathbf{A}$  就可以以极高的概率符合稀疏重构的条件<sup>[54]</sup>。

## 4.2 稀疏信号的重构算法

### 4.2.1 L1-SVD 类算法

压缩感知原理要求信号在某个表征域中可以被稀疏表示。在空域信号处理之中，信号的稀疏度相对较高，可以采用稀疏重构方法进行求解。而传统的方法对于信噪比的要求较高，且容易受到数据统计特性的限制，因此很难做到突破瑞利限，得到较高的分辨率。L1-SVD 算法主要采用奇异值分解的方法，充分融合了时间采样信号，并利用二阶凸规划求解目标函数的最优解，即解决在信号子空间内伴随多采样数据的稀疏表示问题。

由于空域信号相对整个空间来说已经很稀疏，可以直接建立稀疏表达方程  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，其中  $\mathbf{A} \in C^{M \times N}$  是由空间导向矢量构成的稀疏矩阵，且  $M < N$ 。当有噪声存在时，稀疏表达方程式为  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 。L1-SVD 方法是在  $l_p$  ( $p \leq 1$ ) 方法的基础上，充分利用 SVD 奇异值分解的特点，并结合多快拍数据，在信号子空间上进行 DOA 估计。L1-SVD 方法有效的降低了接收数据的维数，提高了 DOA 估计算法的效率和准确性。

在噪声存在的情况下，单快拍目标函数的表达式为：

$$\min \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (4-7)$$

式中  $\lambda$  为稀疏度参数，在不同的噪声强度下  $\lambda$  的大小有不同的选择。设快拍数为  $T$ ，则多快拍接收数据的目标函数表达式为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (4-8)$$

其中， $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_T)]$ ，目标函数 (4-8) 可以进一步表示为：

$$\min \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_f^2 + \lambda \|\mathbf{x}^{(i_2)}\|_1 \quad (4-9)$$

其中， $\|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_f^2 = \|\text{vec}(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X})\|_2^2$ ，在这个目标函数中， $\mathbf{x}^{(i_2)}$  是由  $\mathbf{X}$  的每一个行向量的  $l_2$  范数构成的列向量， $\mathbf{x}^{(i_2)} = [\mathbf{x}_1^{i_2}, \mathbf{x}_2^{i_2}, \dots, \mathbf{x}_M^{i_2}]^T$ ， $\mathbf{x}_i^{i_2} = \|x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(T)\|_{l_2}$ ， $i = 1, 2, \dots, M$ ；如果  $\mathbf{X}$  的不同快拍中的幅度并不是线性相关的，那么出现的尖峰相对于单快拍而言将会更加的突出。

式 (4-9) 最大的缺点就是，算法的计算量过大，问题的大小随着采样数  $T$  线性变化，计算量随采样数  $T$  的增加而超线性增加。因此，当采样数  $T$  非常大时，该方法将不能对信号源定位问题做到实时处理，需要对数据进一步利用 SVD 奇异值分解进行降维处理。为了减少计算复杂度和噪声对算法的影响，利用 SVD 对  $M \times T$  维接收数据矩阵  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_T)]$  进行奇异值分解。这种思想将数据矩阵  $\mathbf{Y}$  分解成信号子空间和噪声子空间，仅保留信号子空间，用式 (4-9) 的方法

对降维后的空间谱估计问题进行求解。

用数学方法描述，SVD 分解可以表示为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}' \quad (4-10)$$

对式 (4-8) 保留一个降维后的  $M \times K$  维矩阵  $\mathbf{Y}_{SV}$ ， $\mathbf{Y}_{SV}$  保留了信号的绝大部分的能量，且有

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{D}_K = \mathbf{Y}\mathbf{V}\mathbf{D}_K \quad (4-11)$$

式中， $\mathbf{D}_K = [\mathbf{I}_K, \mathbf{0}]^T$ ， $\mathbf{I}_K$  为  $K \times K$  维单位矩阵， $\mathbf{0}$  为  $K \times (T-K)$  维零矩阵。令  $\mathbf{X}_{SV} = \mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$  和  $\mathbf{N}_{SV} = \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$ ，则有

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{SV} + \mathbf{N}_{SV} \quad (4-12)$$

使用 SVD 奇异值分解将问题 (4-8) 的数据大小由  $T$  变为  $K$ ， $K$  为信号源的个数。由于实际情况下，信号源个数  $K$  远小于样本数  $T$ ，因此这极大地降低了计算的复杂度。L1-SVD 算法的步骤如下：

1. 获得阵列接收数据  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_L}] = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N}$ ， $N_L$  为接收数据快拍数；
2. 对  $\mathbf{Y}$  进行 SVD 分解： $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}'$ ；
3. 降低接收数据的维数： $\mathbf{Y}_{SV} \triangleq \mathbf{Y}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$ ， $\mathbf{X}_{SV} \triangleq \mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{D}_K$ ；
4. 计算  $\mathbf{X}_{SV}$  每一行的  $l_2$  范数  $\mathbf{x}^{(l_2)} = [\mathbf{x}_1^{l_2}, \mathbf{x}_2^{l_2}, \dots, \mathbf{x}_M^{l_2}]^T$ ，  
 $\mathbf{x}_i^{l_2} = \|x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(K)\|_{l_2}$ ， $i = 1, 2, \dots, M$ ；
5. 求解优化函数  $\min \|\mathbf{Y}_{SV} - \mathbf{A}\mathbf{X}_{SV}\|_f^2 + \lambda \|\mathbf{x}^{(l_2)}\|_1$ 。

#### 4.2.2 MFOCUSS 类算法

文献[36]给出了无噪声的情况下 MMV (Multiple Measurement Vectors) 模型的 FOCUSS 算法 (简称 M-FOCUSS) 的推导过程。其优化问题形式为

$$\min J^{(p)}(\mathbf{X}) \quad s.t. \quad \mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{X} \quad (0 < p \leq 1) \quad (4-13)$$

式 (4-13) 中， $J^{(p)}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{x}[i]\|_2)^p = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{l=1}^L |x[i, l]|^2 \right)^{p/2}$ ， $x[i, l]$  是矩阵  $\mathbf{X}$  的第  $i$  行第  $l$  列元素， $N$  为信号的长度， $L$  为接收数据的快拍数。根据 Lagrange 乘子算法，式 (4-13) 的优化函数可以写成无约束的形式

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Lambda}) = J^{(p)}(\mathbf{X}) + \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\lambda}_l^H (\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_l - \mathbf{y}_l) \quad (4-14)$$

式 (4-14) 中， $\boldsymbol{\lambda}_l \in \mathbb{R}^N$ ， $(l = 1, 2, \dots, L)$  为 Lagrange 乘子向量。拉格朗日方程 (4-14)

存在最小解  $\mathbf{X}_*$  的一个必要条件是  $(\mathbf{X}_*, \mathbf{\Lambda}_*)$  为拉格朗日方程的稳定点。也就是说，对于所有的  $l=1, 2, \dots, L$ ，有

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}_l} L(\mathbf{X}_*, \mathbf{\Lambda}_*) = \nabla_{\mathbf{x}_l} J^{(p)}(\mathbf{X}_*) + \mathbf{\Phi}^H \boldsymbol{\lambda}_{l,*} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}_l} L(\mathbf{X}_*, \mathbf{\Lambda}_*) = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{l,*} - \mathbf{y}_l = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4-15)$$

这里， $\nabla_{\mathbf{x}_l} L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = [\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) / \partial x[1, l], \dots, \partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) / \partial x[N, l]]^T$ ，并且  $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}_l} L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$  具有

相似的定义。 $J^{(p)}(\mathbf{X})$  关于元素  $x[i, l]$  的偏导数为  $\nabla_{x[i, l]} J^{(p)}(\mathbf{X}) = p \| \mathbf{x}[i] \|^ {p-2} x[i, l]$ ，

因此，拉格朗日方程  $L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$  关于  $\mathbf{x}_l$  的偏导数  $\nabla_{\mathbf{x}_l} L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})$  可以写成下式的形式

$$\nabla_{\mathbf{x}_l} = J^{(p)}(\mathbf{X}) = p | \prod(\mathbf{X}) \mathbf{x}_l \quad (4-16)$$

式中， $\prod(\mathbf{X}) = \text{diag}([\|\mathbf{x}[i]\|^{p-2}]_{i=1, 2, \dots, N})$ 。由式(4-15)和式(4-16)可知，稳定点  $(\mathbf{X}_*, \mathbf{\Lambda}_*)$  满足

$$\begin{cases} |p| \prod(\mathbf{X}_*) \mathbf{X}_* + \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Lambda}_* = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \mathbf{X}_* - \mathbf{Y} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4-17)$$

解上述方程组<sup>[37]</sup>，可得

$$\mathbf{X}_* = \prod^{-1}(\mathbf{X}_*) \mathbf{\Phi}^H (\mathbf{\Phi} \prod^{-1}(\mathbf{X}_*) \mathbf{\Phi}^H)^{-1} \mathbf{Y} \quad (4-18)$$

可用下面的迭代过程求解  $\mathbf{X}_*$ ，

$$\mathbf{X}_{k+1} = \prod^{-1}(\mathbf{X}_k) \mathbf{\Phi}^H (\mathbf{\Phi} \prod^{-1}(\mathbf{X}_k) \mathbf{\Phi}^H)^{-1} \mathbf{Y} \quad (4-19)$$

式(4-19)中  $\prod^{-1}(\mathbf{X}_k) = \text{diag}(\|\mathbf{x}_k[i]\|^{(2-p)})$ ，令  $\mathbf{W}_{k+1}^2 = \prod^{-1}(\mathbf{X}_k)$ ， $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{W}_{k+1}$  联合式(4-19)可以得到 M-FOCUSS 算法的计算过程。

M-FOCUSS 的算法步骤为

1.  $\mathbf{W}_k = \text{diag}(c_{k-1}[i]^{1-p/2})$ ，其中  $c_{k-1}[i] = \|\mathbf{x}_k[i]\| = \left( \sum_{l=1}^L (\mathbf{x}'_{k-1}[i]) \right)^{1/2}$ ， $p \in (0, 1]$ ，  
 $i = 1, \dots, N$ ；
2.  $\mathbf{A}_k = \mathbf{\Phi} \mathbf{W}_k$ ；
3.  $\mathbf{X}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{Y}$ 。

算法的收敛条件设为

$$\frac{\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_{l_F}}{\|\mathbf{X}_{k-1}\|_{l_F}} < \varepsilon \quad (4-20)$$

对于在包含噪声情况下的 MMV 模型，M-FOCUSS 算法引入了正则化因子  $\gamma$ ，称为正则化 M-FOCUSS 算法，其算法步骤为

1.  $\mathbf{W}_k = \text{diag}(c_{k-1}[i]^{1-p/2})$ , 其中  $c_{k-1}[i] = \left( \sum_{l=1}^L (\mathbf{x}_{k-1}^l[i]) \right)^{1/2}$ ,  $p \in (0,1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;
2.  $\mathbf{A}_k = \Phi \mathbf{W}_k$ ;
3.  $\mathbf{X}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}$ .

### 4.3 MFOCUSS 算法的改进—SVD-MFOCUSS 算法

#### 4.3.1 稀疏信号模型的降维表示

将式 (4-6) 的阵列接收数据矩阵  $\mathbf{Y}$  用 SVD 分解表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{V}^H \quad (4-21)$$

对式 (4-21) 保留一个降维后的  $M \times K$  维矩阵  $\mathbf{Y}_{SV}$ ,  $\mathbf{Y}_{SV}$  保留了信号绝大部分的能量, 且有

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{U} \mathbf{L}_K = \mathbf{Y} \mathbf{V}_K \quad (4-22)$$

式中,  $\mathbf{D}_K = [\mathbf{I}_K, \mathbf{0}]^T$ ,  $\mathbf{I}_K$  为  $K \times K$  维单位矩阵,  $\mathbf{0}$  为  $K \times (T-K)$  维零矩阵。令  $\mathbf{X}_{SV} = \mathbf{X} \mathbf{V}_K$  和  $\mathbf{N}_{SV} = \mathbf{N} \mathbf{V}_K$ , 则有

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{A} \mathbf{X}_{SV} + \mathbf{N}_{SV} \quad (4-23)$$

比较式 (4-6) 和式 (4-23) 可以知道, 阵列接收数据矩阵由  $M \times N_L$  维降低至  $M \times K$  维, 实际情况中, 有  $K \ll N_L$ , 因此通过求解式 (4-23) 进行 DOA 估计比直接求解式 (4-6) 运算量显著降低。此外, SVD 分解本质上是一个信号分量累积的过程, 这使得在低信噪比情况下也可以采用稀疏重构算法进行有效的 DOA 估计。

#### 4.3.2 稀疏信号模型优化求解

实际中, 目标信号在空域是稀疏的, 在  $N$  个快拍期间, 目标信号未跨角度单元移动, 即在式 (4-6) 中有,  $\|\mathbf{x}_i\|_0 = K \ll M$ ,  $\mathbf{x}_i$  与  $\mathbf{x}_j$  ( $i \neq j$ ) 的非零元素位置相同, 故  $\mathbf{X}$  中仅有  $K$  个非零行, 其余的  $M-K$  行为零, 所以  $\mathbf{X}$  为行稀疏矩阵。由于  $\mathbf{X}_{SV} = \mathbf{X} \mathbf{V}_K$  的右乘矩阵为阵列初等变换, 故  $\mathbf{X}_{SV}$  与  $\mathbf{X}$  具有相同的系数特征。类似于信号矢量稀疏性的描述, 稀疏矩阵的行稀疏特性可以用其非零行的个数来描述, 即

$$\|\mathbf{X}_{SV}\|_{r_0} = |\text{supp}(\mathbf{X}_{SV})| \quad (4-24)$$

其中  $\|\bullet\|_{r_0}$  表示矩阵非零行的个数， $|\bullet|$  表示集合的势。

因此，用 MFOCUSS 算法对稀疏问题 (4-23) 中的  $\mathbf{X}_{SV}$  进行估计，得到 SVD-MFOCUSS 算法的谱估计公式为

$$P(\theta_i) = \|\mathbf{X}_{SV}(i, :)\|_2, \quad (i=1, 2, \dots, L) \quad (4-25)$$

### 4.3.3 SVD-MFOCUSS 算法求解步骤

- 1、对接收数据矩阵  $\mathbf{Y}$  进行 SVD 分解，得到降维后的数据矩阵  $\mathbf{Y}_{SV}$ ；
- 2、 $\mathbf{W}_k = \text{diag}(c_{k-1}[i]^{1-p/2})$ ，其中  $c_{k-1}[i] = \left( \sum_{l=1}^L (\mathbf{x}_{SV_{k-1}}^l[i]) \right)^{1/2}$ ， $p \in (0, 1]$ ；
- 3、 $\mathbf{A}_k = \Phi \mathbf{W}_k$ ；
- 4、 $\mathbf{X}_{SV_k} = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{Y}_{SV}$ 。

算法的收敛条件设为：
$$\frac{\|\mathbf{X}_{SV_k} - \mathbf{X}_{SV_{k-1}}\|_{l_f}}{\|\mathbf{X}_{SV_{k-1}}\|_{l_f}} < \varepsilon。$$

### 4.3.4 SVD-MFOCUSS 算法性能分析

对 SVD-MFOCUSS 算法、Beamforming 方法、Capon 方法、MUSIC 算法、ESPRIT 算法、L1-SVD 算法与 MFOCUSS 算法在运算量，估计精度和同等条件算法运行时间等方面进行比较，讨论 SVD-MFOCUSS 算法在这些方面的性能。表 4.1 是对各个算法的计算量和估计精度的分析。从表 4.1 中可以看出，ESPRIT 算法的以运算量只跟阵元个数  $M$  有关，不受空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  的影响，其在所有的算法中运算量是最小的。Beamforming 方法、Capon 方法和 MUSIC 算法的运算量受阵元个数  $M$  和空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  的影响，当阵元个数  $M$  固定时它们的运算量与  $N_\theta$  呈线性关系。MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量与阵元个数  $M$ 、空间角度稀疏化个数  $N_\theta$ 、快拍数  $L$  和空间信号源个数  $K$  有关，当  $L$ 、 $M$  和  $K$  不变时，MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量与空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  成二次方关系；当  $N_\theta$  和  $M$  固定时，MFOCUSS 算法的运算量与快拍数  $L$  成线性关系，而 SVD-MFOCUSS 算法的运算量与空间信号源个数  $K$  成

线性关系, 由于  $L \gg K$ , 因此 SVD-MFOCUSS 算法的运算量要远小于 MFOCUSS 算法; 虽然 SVD-MFOCUSS 算法的运算量比 MFOCUSS 算法小, 但是与 MFOCUSS 算法相比 SVD-MFOCUSS 算法需要用到奇异值分解, 因此需要知道空间信号源的个数, 而空间信号源的个数很难精确地估计道, 因此 SVD-MFOCUSS 算法在减小运算量的同时也损失了一部分的估计精度。L1-SVD 算法的运算量与空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  成三次方关系, 当  $N_\theta$  增大时它的运算量会急剧增加, 因此其算法精度虽高但是运算量也很大。从表 4.1 中还可以看出, 当空间角度间隔为  $\theta$  时, Beamforming 算法的估计精度为  $8\theta$ , 而其余算法的估计精度为  $2\theta$ 。

表 4.1 算法的计算量与估计精度分析表

算法	计算量	估计精度 (度)	角度间隔(度)
Beamforming	$O(N_\theta M^2)$	$8\theta$	$\theta$
Capon	$O(N_\theta (M+1)! M^2)$	$2\theta$	$\theta$
MUSIC	$O(N_\theta M^3)$	$2\theta$	$\theta$
ESPRIT	$O(M^3)$	$2\theta$	$\theta$
L1-SVD	$O(KN_\theta^3)$	$2\theta$	$\theta$
MFOCUSS	$O(N_\theta^2 + N_\theta L + (M+1)! M^2)$	$2\theta$	$\theta$
SVD-MFOCUSS	$O(N_\theta^2 + N_\theta K + (M+1)! M^2)$	$2\theta$	$\theta$

以下的数据是在 windows 系统下主频为 1.58GHz 和 2.95GHz 的双核 pentium (R) 双核 CUP 下用 matlab 实现仿真得到的仿真数据, 在算法仿真中, 除了空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  外, 其它的参数均为固定值。表 4.2 中数据显示的是各算法的运算量和空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  之间的关系。从表 4.2 中的数据可看出在空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  由小到大增加时, ESPRIT 算法的运算量基本保持不变, Beamforming 方法、Capon 方法和 MUSIC 算法的运算量线性增加, L1-SVD 算法、MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量成非线性关系增加, 这都验证了表 4.1 中对各算法性能的分析。

表 4.2 算法运算量与空间角度稀疏化个数的关系表 (时间单位: s)

算法	空间角度稀疏化个数						
	288	576	1200	2250	4500	9000	18000
Bf	3.1	3.4	4.1	5.3	7.7	12.3	23.1
Capon	3.4	4.0	5.2	7.3	12.0	21.2	39.8
MUSIC	3.3	3.7	4.6	6.1	9.4	16.2	30.2
ESPRIT	2.9	3.0	2.9	3.0	2.9	3.0	2.9
L1-SVD	579.4	1226.3	3588.8	9031.8	28861.8	103977.5	420411.9
MFOCUSS	24.0	35.2	52.3	78.3	103.2	239.3	563.2
SVD-MFOCUSS	14.6	15.4	17.0	19.8	24.6	33.7	52.7

表 4.3 反应的是 MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量和快拍数  $L$  之间的关系。从表 4.3 中的数据可以看出, 随着快拍数  $L$  的增加 MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量都在增加, 但是 SVD-MFOCUSS 算法运算量的增加速度明显要小于 MFOCUSS 算法的增加速度, 在相同的快拍数下 MFOCUSS 算法的运算量要明显小于 SVD-MFOCUSS 算法, 且随着快拍数的不断增加这种关系就越发的明显。经过实验仿真验证 SVD-MFOCUSS 算法的估计精度是 0.05 度。

表 4.3 MFOCUSS 和 SVD-MFOCUSS 算法的运算量与快拍数的关系表 (时间单位: s)

算法	快拍数						
	200	400	800	1600	3200	6200	12800
MFOCUSS	14.1	27.0	43.7	84.9	160.8	351.2	658.4
SVD-MFOCUSS	6.4	12.0	19.6	37.8	76.9	152.8	319.4

#### 4.4 仿真实验分析

**实验 1.** 考察两个相邻的非相干信号 DOA 估计情况, 信号的入射角度分别为  $\theta_1 = 20^\circ$ ,  $\theta_2 = 22^\circ$ , 阵元数为 8, 阵列接收快拍数为 200, 信噪比为 10dB。图 4.2 为 Beamforming 算法、Capon 算法、MUSIC 的算法和 SVD-MFOCUSS 算法的空间频谱对比。由图 4.2 可以看出 L1-SVD 算法和 SVD-MFOCUSS 算法能够有效的分辨邻近目标信号, 而 Beamforming 算法、Capon 算法及 MUSIC 算法无法分辨这两个邻近目标, 这说明 SVD-MFOCUSS 算法具有更高的角度分辨力。

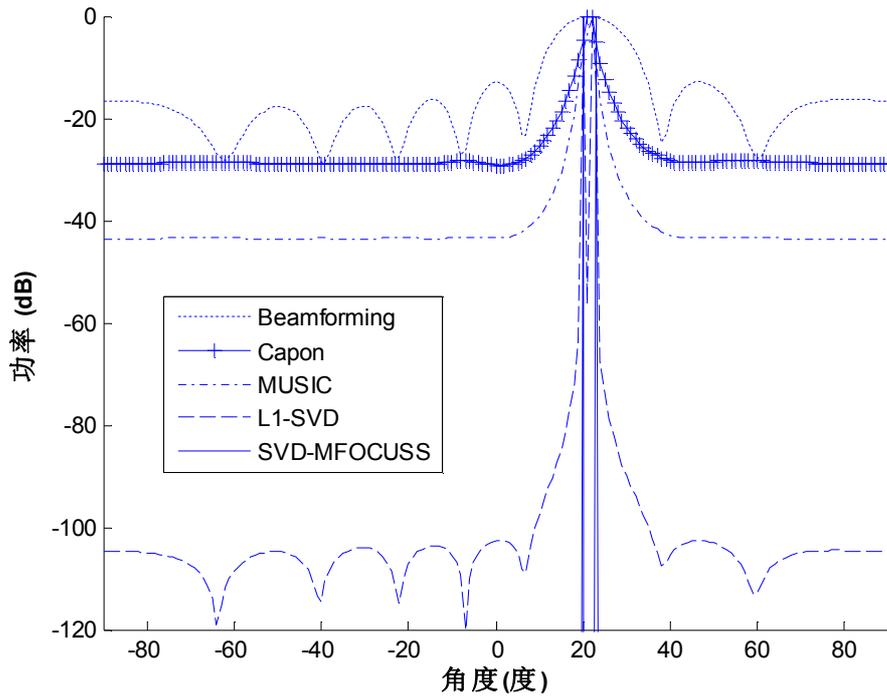


图 4.2 相邻非相干信号的空间谱估计

**实验 2.**比较各个算法在不同信噪比情况下的 DOA 估计性能，信号入射角度分别是  $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，阵列接收快拍数为 200，信噪比分别为 -10dB 和 20dB。图 4.3 为各算法在 -10dB 时的空间谱估计对比。图 4.4 为各算法在 20dB 时的空间谱估计对比。对比图 4.3 和图 4.4 可以看出，在 20dB 情况下，Capon 算法、MUSIC 算法、L1-SVD 算法和 SVD-MFOCUSS 算法可以分辨两个信号，而 Beamforming 算法融合了两个谱峰；在 -10dB 情况下，L1-SVD 算法、SVD-MFOCUSS 算法和 MUSIC 算法可以分辨两个信号，而 Beamforming 算法和 Capon 算法都融合了两个谱峰。这说明 SVD-MFOCUSS 算法在低信噪比情况下也具有良好的 DOA 估计性能。

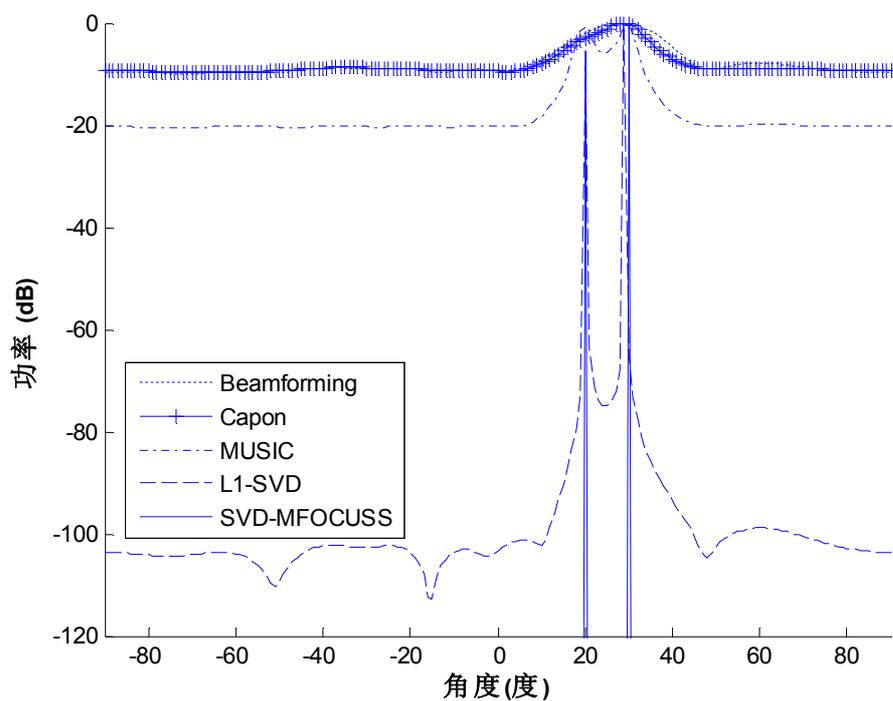


图 4.3 -10dB 时的非相干信号空间空间谱估计

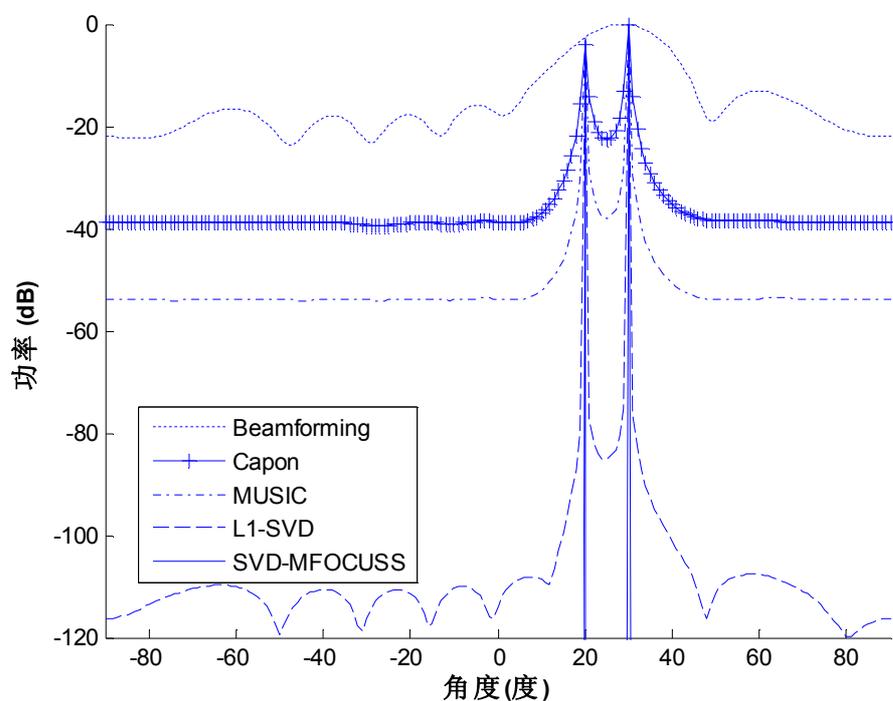


图 4.4 20dB 时的非相干信号空间空间谱估计

**实验 3.** 考察相干信号的 DOA 估计情况，信号入射角度分别是  $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，阵列接收快拍数为 200，信噪比分别为 20dB。比较图 4.5 和图 4.6 可以看出，在非相干信号情况下，Capon 算法、MUSIC 算法和

SVD-MFOCUSS 算法可以分辨出两个信号；在相干信号情况下，L1-SVD 算法和 SVD-MFOCUSS 算法仍然可以精确的分辨出两个信号，而其它算法的 DOA 估计性能显著下降。

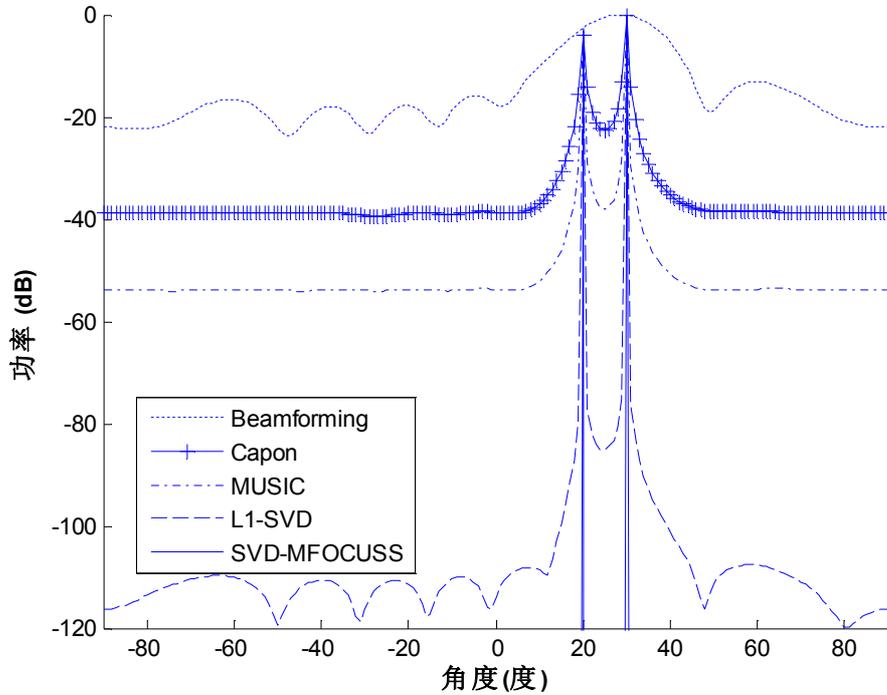


图 4.5 非相干信号空间谱估计

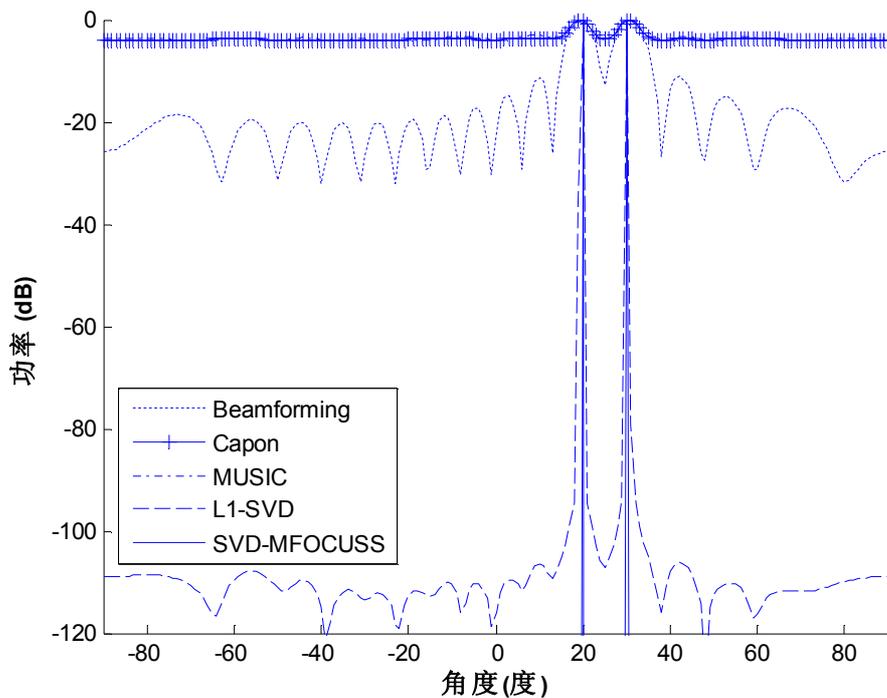


图 4.6 相干信号空间谱估计

**实验 4.** 考虑非相干信号在不同信噪比下的 DOA 估计情况，入射角度为  $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，快拍数为 200，信噪比为 10dB。图 4.7 为各算法的 DOA 估计均方根误差随信噪比变化的关系曲线。通过对比可以看出，在非相干信号的角度间隔较大时，各算法均能对目标角度做出正确的估计，并且具有相近的估计性能，但是由图 4.5 和图 4.6 可以看出 SVD-MFOCUSS 算法比传统 DOA 估计算法具有更窄的主瓣和更低的旁瓣。

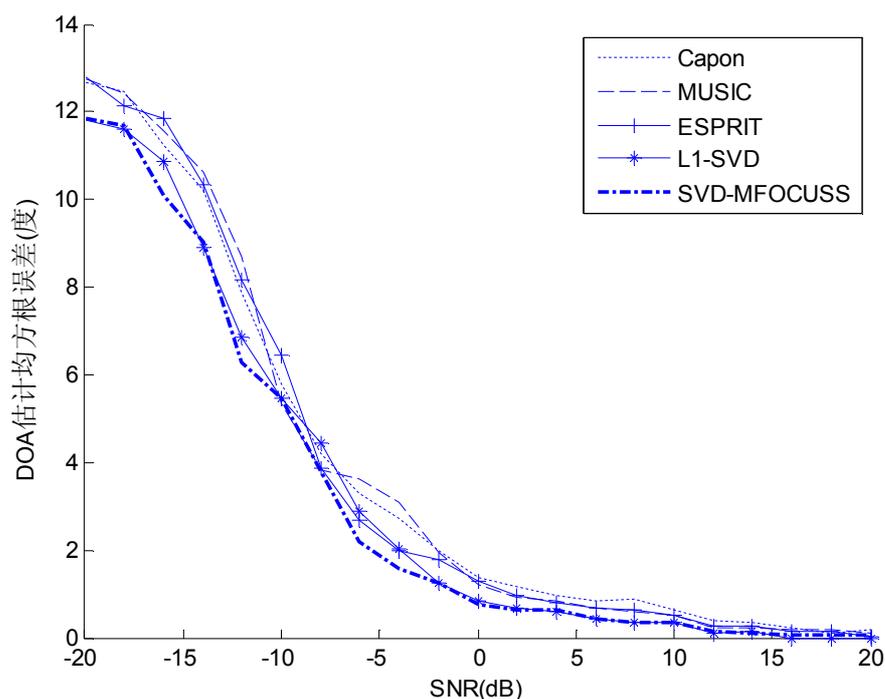


图 4.7 非相干信号 DOA 均方根误差随信噪比变化曲线

**实验 5.** 考虑相干信号在不同信噪比下的 DOA 估计情况，入射角度为  $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，快拍数为 200，信噪比为 10dB。图 4.8 为相干信号情况下各算法的 DOA 估计均方根误差随信噪比变化的关系曲线。由图 4.8 可以看出，SVD-MFOCUSS 算法估计的均方根误差，明显小于传统的 DOA 估计算法，其性能要优于传统算法。

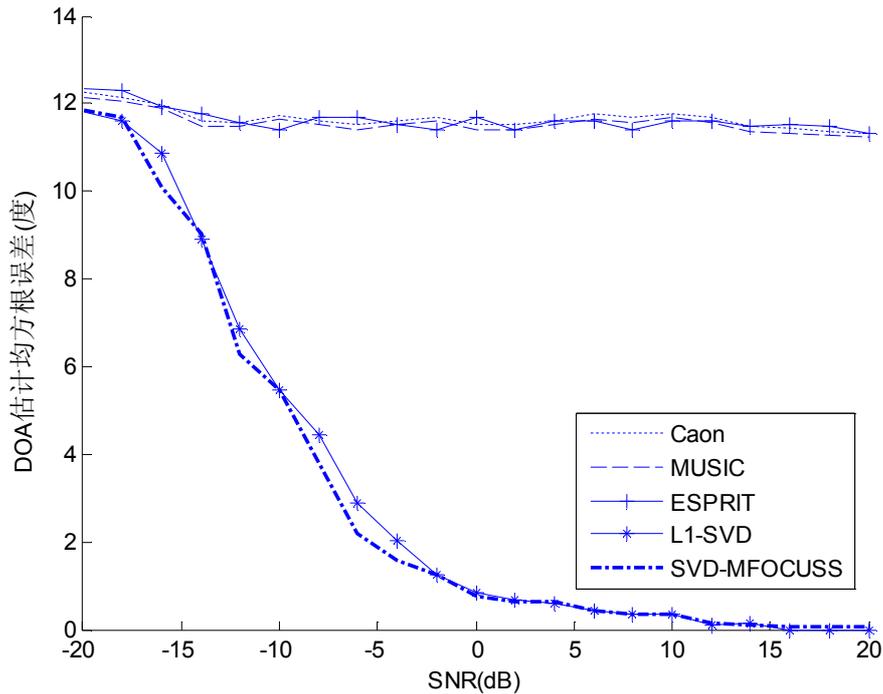


图 4.8 相干信号 DOA 均方根误差随信噪比变化曲线

**实验 6.** 考虑相干信号 DOA 估计情况，入射角度为  $\theta_1 = 20^\circ$ ， $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，快拍数为 400，实验次数为 100。图 4.9 为 MFOCUSS 算法在信噪比分别为 -15dB 和 15dB 时的空间谱估计输出，图 4.10 为 SVD-MFOCUSS 算法在信噪比分别为 -15dB 和 15dB 时的空间谱估计输出，图 4.11 为 MFOCUSS 和 SVD-MFOCUSS 算法在信噪比为 -15dB 时的空间谱估计输出。由图 4.9 可以知道，MFOCUSS 算法适用于高信噪比情况，在信噪比较低时 DOA 估计性能下降。图 4.10 显示 SVD-MFOCUSS 算法在低信噪比情况下的 DOA 估计性能和在高信噪比情况下的 DOA 估计性能同样好。图 4.11 说明，在低信噪比情况下 SVD-MFOCUSS 算法的 DOA 估计性能优于 MFOCUSS 算法。

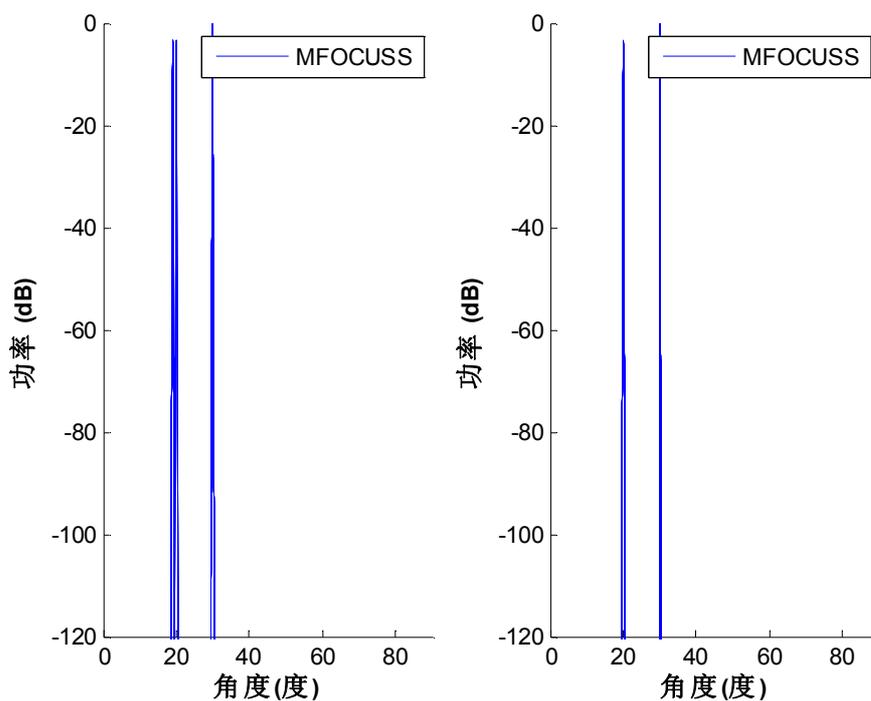


图 4.9 MFOCUSS 算法在信噪比分别为-15dB  
(左)和 15dB (右)时的空间谱估计输出

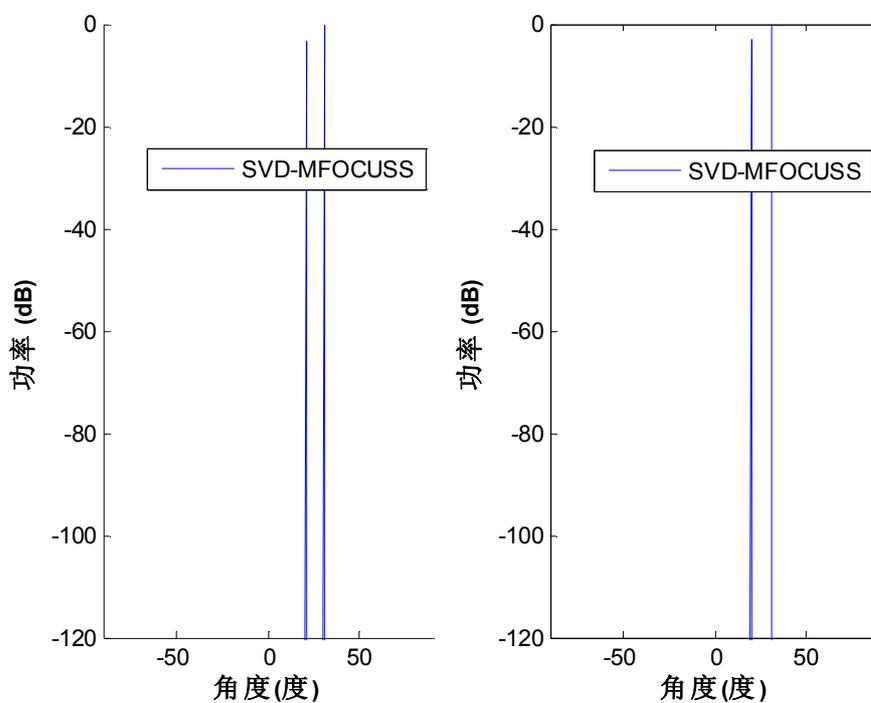


图 4.10 SVD-MFOCUSS 算法在信噪比分别为  
-15dB (左)和 15dB (右)时的空间谱估计输出

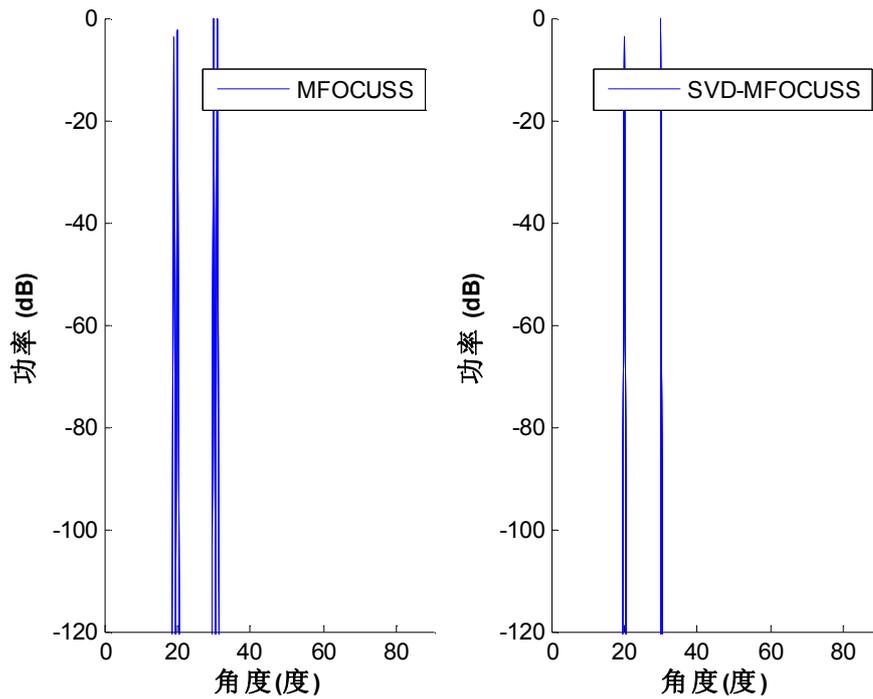


图 4.11 MFOCUSS 和 SVD-MFOCUSS 算法在信噪比为-15dB 时的空间谱估计输出

**实验 7.** 考察 MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法在不同信噪比情况下的均方根误差。信号入射角度为  $\theta_1 = 20^\circ$  和  $\theta_2 = 30^\circ$ ，阵元数为 8，快拍数为 400。图 4.12 为 MFOCUSS 算法和 SVD-MFOCUSS 算法在不同信噪比情况下的均方根误差曲线图。从图 4.12 中可以看出在低信噪比的情况下，SVD-MFOCUSS 算法的均方根误差明显要小于 MFOCUSS 算法。这同样说明 SVD-MFOCUSS 算法适用于信噪比较低的情况，其性能优于 MFOCUSS 算法。

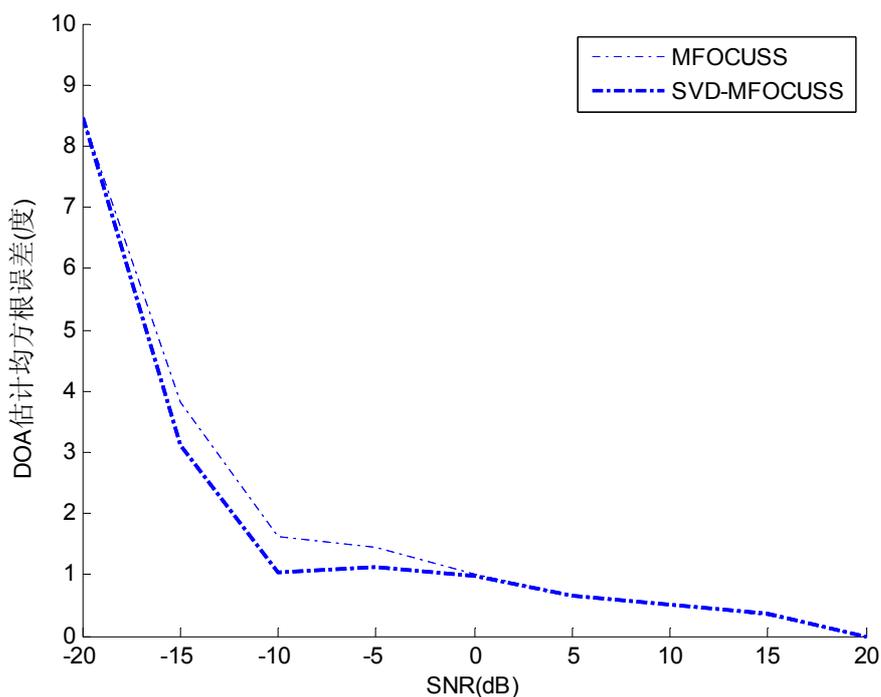


图 4.12 DOA 均方根误差随信噪比变化曲线

**实验 8.** 考察在非相干信号和相干信号两种情况下，当信号的个数较多时各个算法的性能。信号的角度分别为  $-30^\circ$ ， $-15^\circ$ ， $0^\circ$ ， $15^\circ$  和  $30^\circ$ ，阵元数为 8，快拍数为 200，信噪比为 20dB。图 4.13 为多个非相干信号的空间谱估计输出，图 4.14 为多个相干信号的空间谱估计输出。比较图 4.13 和图 4.14 可以看出，Beamforming 算法在信号个数较多时不能正确的对信号进行 DOA 估计。Capon 算法和 MUSIC 算法可以对都多个信号进行 DOA 估计，但是只能用于非相干信号的情况，当空间中存在着相干信号时，Capon 算法和 MUSIC 算法失效。而 L1-SVD 算法和 SVD-MFOCUSS 算法在信号个数比较多时，无论信号是相干信号还是非相干信号，这两种算法都能正确的对信号进行 DOA 估计，且性能不会受到影响。

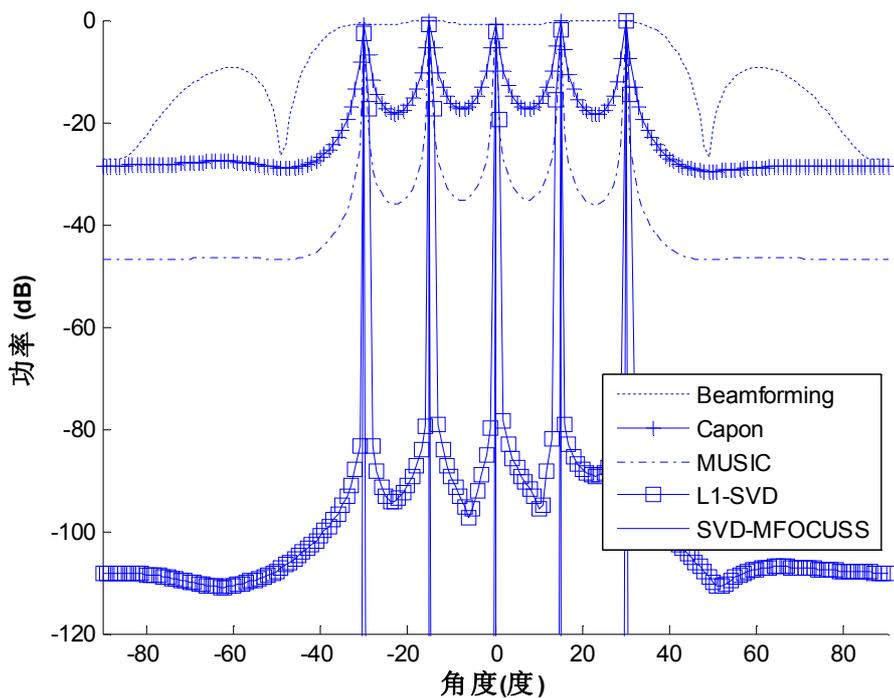


图 4.13 多个非相干信号的空间谱估计输出

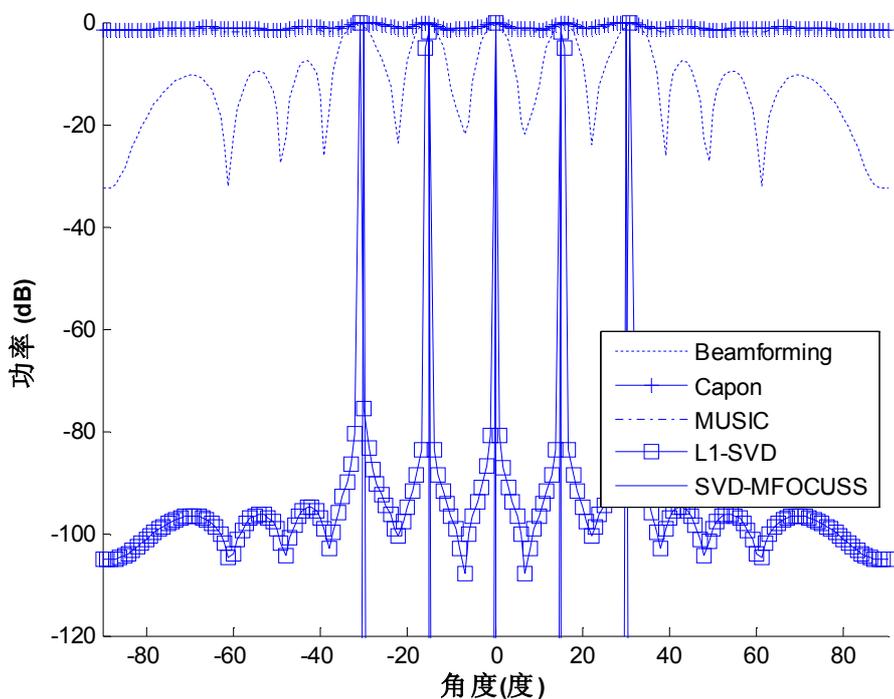


图 4.14 多个相干信号的空间谱估计输出

**实验 9.** 由于SVD-MFOCUSS算法的运算量会随着空间角度稀疏化个数  $N_\theta$  的增加而增加,当  $N_\theta$  较小时这种变化还不太明显,但是当  $N_\theta$  较大时,SVD-MFOCUSS算法的运算量会急剧增加。而有时为了获得较高的精度,必须对空间角度进行细

化, 这就会使得  $N_\theta$  变得很大, 从而增加算法的运算量。由于空间信号都是稀疏信号, 信号源个数并不是很多, 当信号源在空间中的分布较集中时可以把空间信号的 DOA 估计过程分成两步, 首先粗略地估计出空间信号源的分布范围, 然后再在这一个小范围内对信号源进行高精度的 DOA 估计, 这样可以节省很大的运算量, 还可以获得较高的精度, 并且信号源分布越集中运算量节省就越多。由于 Capon 方法较为简单, 我们可以先用 Capon 方法估计出空间信号源的大概分布范围, 然后再用 SVD-MFOCUSS 算法来做精确的 DOA 估计。图 4.15 和图 4.16 是对角度为  $-30.6^\circ$ 、 $-22.6^\circ$ 、 $0.6^\circ$ 、 $15.6^\circ$  和  $30.6^\circ$  的 6 个空间信号的 DOA 估计图。图 4.15 的角度间隔为  $1^\circ$ , 估计范围为  $-90^\circ \sim 90^\circ$ , 从图中可以得出空间信号源的分布范围为  $-31^\circ \sim 31^\circ$ 。图 4.16 的角度间隔为  $0.1^\circ$ , 估计范围为  $-40^\circ \sim 40^\circ$ , 其运算量要比直接在  $-90^\circ \sim 90^\circ$  范围内进行 DOA 估计减少  $5/9$ 。

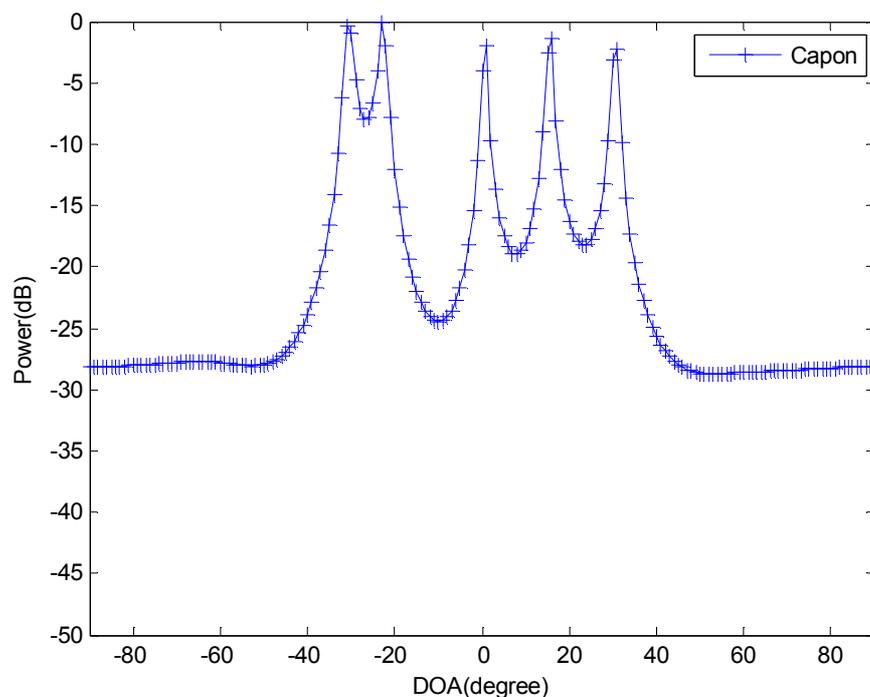


图 4.15 Capon 方法的 DOA 估计图

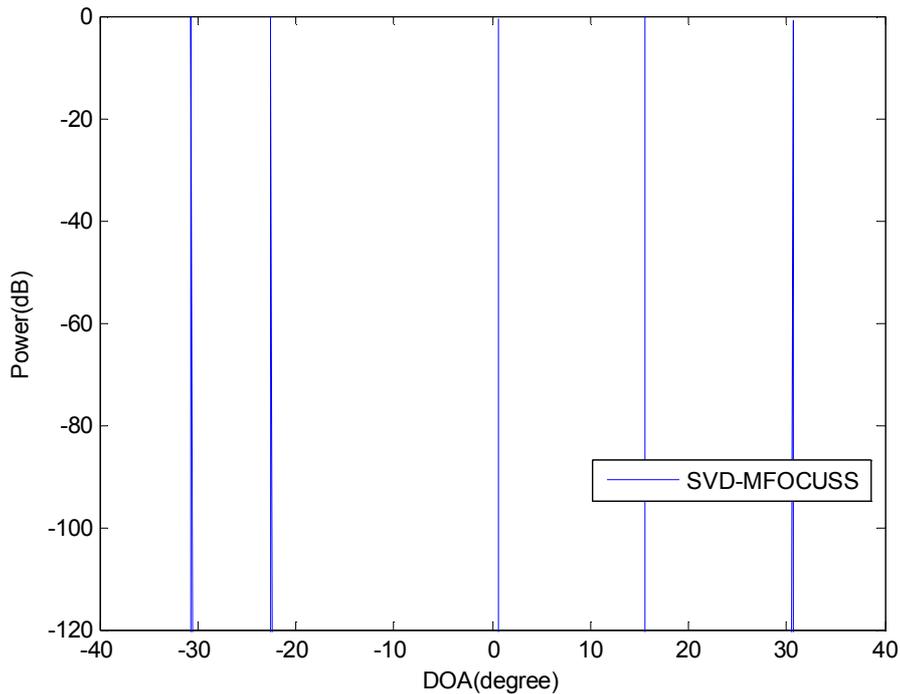


图 4.16 SVD-MFOCUSS 算法的 DOA 估计图

## 4.5 本章小结

本章分析了阵列接收信号的空域稀疏表示形式，介绍了稀疏信号重构算法 L1-SVD 和 MFOCUSS，对传统的 DOA 估计算法以及基于 L1-SVD 和 MFOCUSS 的 DOA 估计算法做了仿真实验分析。为了解决传统的 DOA 估计算法无法用于相干信号源以及 MFOCUSS 算法不适用于低信噪比的情况，提出了一种新的基于 CS 的 DOA 估计算法，SVD-MFOCUSS 算法。SVD-MFOCUSS 算法是对 MFOCUSS 算法的改进，其本质上是采用奇异值分解进行信号降维和能量积累，改善了传统稀疏信号恢复算法的应用范围，能在低信噪比情况下使用，且显著降低了计算量（同样的条件下运行 SVD-MFOCUSS 算法和 MFOCUSS 算法各 1000 次，SVD-MFOCUSS 算法用时 165.9 秒，MFOCUSS 算法用时 258.2 秒）；同传统的 DOA 估计算法相比较，SVD-MFOCUSS 算法能对任意相干信号进行高分辨 DOA 估计，且具有良好的估计性能。

## 第五章 结论

波达方向估计 (DOA) 是阵列信号处理技术一个重要的研究方向, 是近年来迅速兴起来的一门技术, 波达方向估计在雷达、通讯、声纳和地震信号处理等领域有着广阔的应用前景。近年来, 波达方向估计的各种算法取得了丰硕的研究成果, 其理论也在日益完善, 但是应用到实践中, 还是存在着很多的问题, 所以还需要对其进行深入的研究。

### 5.1 本论文总结

本论文主要对阵列信号处理技术中的 DOA 估计算法进行了一定的研究。归纳起来讲, 主要分为以下几方面的工作: 首先, 给出了远场窄带信号的一般数学模型, 对传统的 DOA 估计算法进行了研究, 主要包括延迟-相加法、Capon 最小方差方法、MUSIC 算法、ESPRIT 算法、最大似然法和综合法, 重点研究了子空间分解类算法 MUSIC 和 ESPRIT 算法。其次, 研究了压缩感知理论的基本原理和基本框架, 主要包括时空域下的稀疏信号表示形式和变换域下的稀疏信号表示形式, 投影测量矩阵的设计和稀疏信号的重构算法; 研究了稀疏信号重构的条件, 详细介绍了约束等距条件(RIP)、不一致性条件(MIP)以及二者之间的关系。最后, 分析了阵列接收信号的空域稀疏表示形式, 介绍了稀疏信号重构算法 L1-SVD 和 MFOCUSS。为了解决传统的 DOA 估计算法无法用于相干信号源以及 MFOCUSS 算法不适用于低信噪比的情况, 提出了一种新的基于压缩感知的 DOA 估计算法, SVD-MFOCUSS 算法。SVD-MFOCUSS 算法是对 MFOCUSS 算法的改进, 其本质上是采用奇异值分解进行信号降维和能量积累, 改善了传统稀疏信号恢复算法的应用范围, 能在低信噪比情况下使用, 且显著降低了计算量。

### 5.2 工作展望

1、现有的大多数 DOA 估计算法, 在对信号方向进行估计之前, 一般都需要假定信号源的个数是已知的, 而在实际的工作中, 对信号源个数的精确估计是很困难的, 因此研究如何精确的估计信号源的个数也是一个具有重要意义的工作。

2、现有的具有高分辨率 DOA 估计算法, 都具有很大的运算量, 减少算法的运算量、提高算法在低信噪比情况下的 DOA 估计性能、提高算法的鲁棒性和实时性以及降低算法的实现复杂度, 将是空间谱估计技术需要进一步研究的重要内

容。

3、在压缩感知理论中，要想实现稀疏信号的精确压缩重构，需要测量数、稀疏度和信号长度之间满足一定的关系，因此，在压缩感知理论框架下的 DOA 估计问题，在现有的研究基础上，还需要进一步研究这些参数之间的定量关系，为实际应用提供充分理论支持与指导。

4、目前，大多数的高分辨 DOA 估计算法都是建立在空间白噪声模型的基础上的。但是，在实际环境中，噪声往往都是未知的或不确定的，因此，在实际中白噪声模型的假设就会造成高分辨 DOA 估计算法的性能降低。而高阶累积量具有可以减小高斯白噪声影响的性质，可以为我们在恶劣噪声环境下的 DOA 估计提供极大的方便。因此，基于高阶累积量的 DOA 估计算法也应该是今后的 DOA 估计算法的一个主要研究方向。

## 致谢

在硕士学位论文即将完成之际，我借此机会向许多在学业和生活上关心和帮助过我的各位老师、同学、朋友和亲人表示诚挚的感谢！

首先要感谢我的导师陈建春教授，衷心感谢陈老师对我的教育和培养。回首两年半的研究生学习生活，在我的学业上，陈老师的悉心指导和谆谆教诲，给了我很大的帮助；在生活中，陈老师给了我热情的关怀与帮助，这些都使我难以忘怀。陈老师严谨的治学态度、平易近人的性格以及渊博的知识，都是我今后学习的榜样。在此向陈老师表示最衷心的感谢和崇高的敬意！

感谢肖剑、田海峰师兄，每当我遇到困难时他们总会主动伸出援助之手，帮助我解决问题，在课题研究中给予我许多帮助。感谢刘震、杨东、王民航同学在论文研究中提供的帮助，与他们的讨论让我受益匪浅。

感谢同寝室兄弟们的关心和帮助，和谐活跃的生活环境为我硕士阶段的学习提供了良好的氛围，感谢他们这几年来在生活上给予我的关怀。

最后，特别要感谢我的父母，感谢他们含辛茹苦的把我养大，感谢他们对我无微不至的关怀与呵护，感谢他们为我所做的一切。



## 参考文献

- [1] Krim Hamid, Viberg Mats. Two decades of array signal processing research[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67-94
- [2] Kay S M, Marple S L. Spectrum analysis—a modern perspective. Proc. of the IEEE, 1981, 69(11): 1380-1419.
- [3] Burg J P. Maximum entropy spectral analysis. Proc. of the 37th meeting of the Annual Int, SEG Meeting, Oklahoma City, OK, 1982, 70(9): 963-974.
- [4] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. Proc. of the IEEE, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [5] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans. 1986, AP-34(3): 276-280.
- [6] Rao B D, Hari K V S. Performance analysis of Root-MUSIC. IEEE Trans. On ASSP, 1989, 37(12): 1939-1949.
- [7] Ren Q S, Willis A J. Fast Root-MUSIC algorithm. IEEE Electronics Letters, 1997, 33(6): 450-451.
- [8] Ma C W, Teng C C. Detection of coherent signals using weighted subspace smoothing. IEEE Trans. on AP, 1996, 44(2): 179-187.
- [9] 王布宏, 王永良, 陈辉. 一种新的相干信源 DOA 估计算法: 加权空间平滑协方差矩阵的 Toeplitz 矩阵拟合. 电子学报, 2003, 31(9): 1394-1397.
- [10] Linebarger D A. Redundancy averaging with large arrays. IEEE Trans. on SP, 1993, 41(4): 1707-1710.
- [11] 陈辉, 王永良. 空间谱估计算法结构及仿真分析[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(8): 76~79.
- [12] 肖维民, 彭应宁. 改进的快速 ESPRIT 算法. 第五届全国信号处理学术会议论文集, 第五届全国信号处理学术会议, 武汉, 1994: 9-12.
- [13] Chen Hui, Wang Yongliang. A modified method of frequency and 2-D angle estimation. IEEE antennas and propagation society international symposium, Columbus, OH, USA, 22-27, Jun, 2003: 920-923.
- [14] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, Maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. In Proc. ICASSP, 1988, 2296-2299.
- [15] Cadzow J A. A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources. IEEE Trans. On ASSP, 1988, 36(7): 965-979.

- [16] Clergeot H, Tressens S, Ouamri A. Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the Cramer-Rao bounds. *IEEE Trans. On ASSP*, 1989, 37(11): 1703-1720.
- [17] Ziskind L, Wax M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection. *IEEE Rands. On ASSP*, 1988, 36(10): 1553-1559.
- [18] 丁鹭飞,耿富录,陈建春. 雷达原理. 北京:电子工业出版社,2009.
- [19] M. Cetin, D. M. Malioutov, A. S. Willsky. A variational technique for source localization based on sparse signal reconstruction perspective. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2002.
- [20] D. M. Malioutov, M. Cetin, A. S. Willsky. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010-2022.
- [21] D. Model, M. Zibulevsky. Signal reconstruction in sensor arrays using sparse representation. *Signal Processing*. 2006, 86(3):624-638.
- [22] V. Cevher, M. F. Duarte, R. G. Baraniuk. Distributed target localization via spatial sparsity. *Proceedings Conference of 16th European Signal Processing*, 2008.
- [23] A. C. Gurbuz, V. Cevher, J. H. McClellan. A compressive beamformer method. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing(ICASSP)*, Las Vegas, NV, 2008,2617-2620
- [24] V. Cevher, P. Boufounos, R. G. Baraniuk, A. C. Gilbert, and M. J. Strauss. Near-optimal bayesian localization via incoherence and sparsity. *Int. Conf. on Information Processing in Sensor Networks(IPSAN)*, 2009: 205-216
- [25] V. Cevher, A. C. Gurbuz, J. H. McClellan, R. Chellappa. Compressive wireless arrays for bearings estimation. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing(ICASSP)*, Las vegas, NC, Apr 2008: 2497-2500
- [26] 王永良,陈辉,彭应宁等.空间谱估计理论与算法.清华大学出版社,2004.
- [27] 何振亚.自适应信号处理.北京:科学出版社,2003.
- [28] 张贤达.现代信号处理(第二版).北京:清华大学出版社,2002.
- [29] Bhattacharya S, Blumensath T,Mulgrew B, Davies M.Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing.In:*Proceedings of the 14th Workshop on Statistical Signal Processing*.Washington D.C., USA:IEEE,2007: 448-452.
- [30] Ji Shi-hao, Xue Ya, and Carin L. Bayesian compressive sensing[J]. *IEEE*

- Transachons Signal Processing. 2008, 56(6): 2346-2356.
- [31] 徐伯勋,白旭滨,傅孝毅.信号处理中的数学变换和估计方法.北京:清华大学出版社,2004.
- [32] S S Chen, D L Donoho, and M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [33] 汪学刚,张明友.现代信号理论.北京:电子工业出版社,2005.
- [34] 彭启琮,邵怀宗,李明奇.信号分析.北京:电子工业出版社,2006.
- [35] Mark A. Richards 著.雷达信号处理基础(美).邢孟道,王彤,李真芳等译.北京:电子工业出版社,2008.
- [36] Cotter S F, Rao B D, Engan K ,et al. Sparse Solutions to Linear Inverse Problems With Multiple Measurement Vectors. IEEE Trans. Signal Process. 2005, 53(7): 2477-2488.
- [37] Rao B D, Kreutz-Delgado K. An Affine Scaling Methodology for Best Basis Selection. IEEE Trans. Signal Process. 1999, 47(1): 187-200.
- [38] 罗鹏飞,张文明编著.随机信号分析与处理简明教程.北京:电子工业出版社,2009.
- [39] 张玲华,郑宝玉.随机信号处理.北京:清华大学出版社,2003.
- [40] C. A. Micchelli, Lixin Shen, and Yuesheng Xu, Proximity algorithms for image models: de-noising, Inverse Problems, 2011, 27.
- [41] C. A. Micchelli, Lixin Shen, Yuesheng Xu and Xueying Zeng, Proximity algorithms for the L1/TV image denoising model, Adv. Comput. Math, 2011.
- [42] D. Donoho, X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. IEEE Trans. Inf. Theory, 2001, 47: 2845-2862.
- [43] M. Elad, A. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representations in pairs of bases. IEEE Trans. Inf. Theory, 2002, 48: 2558-2567.
- [44] E. Candès, T. Tao. Decoding by linear programming. IEEE Trans. Inf. Theory. 2005, 51(12): 4203-4215.
- [45] D. Donoho, X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions. IEEE Trans. Inf. Theory, 2001, 47: 2845-2862.
- [46] E. Candès, J. Romberg, T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information.IEEE Trans. Inf. Theory. 2006, 52(2): 489-509.
- [47] 陈怀琛.MATLAB 及其在理工课程中的应用指南.西安:西安电子科技大学出版社,2000.
- [48] 飞思科技产品研发中心.MATLAB7 辅助信号处理技术与应用.北京:电子工业

出版社,2005.

- [49] G Peyré. Best Basis compressed sensing[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4485:80-91.
- [50] T.Cai,G.Xu,Zhang.On recovery of sparse signals via minimization. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 2009: 3388–3397.
- [51] T. Cai, L. Wang, G.Xu. Stable Recovery of Sparse Signals and an Oracle Inequality. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 56, no. 2010: 3516-3522.
- [52] R Baranjuk.A lecture on compressive sensing.IEEE signal processing magazine, 2007, 24(2): 81-121.
- [53] Donoho D L,Elad M,Temlyakov V N.Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise.IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1): 6-18.
- [54] 林波. 基于压缩感知的辐射源 DOA 估计. 国防科技大学研究生院, 2010: 30-39.

## 研究生期间参加科研及论文发表情况

### 一、参加科研项目情况

项目名称：数据处理及通讯电路

参与工作：数据接收和处理算法的设计与实现

### 二、发表论文情况

[1] 郭月强, 陈建春, 王永军. 基于压缩感知的空域信号 DOA 估计. 电子科技. 2013, 26(6). (已录用)