



## 独创性声明

本人声明，所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得武汉理工大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：刘官协 日期：2010.5.31

## 学位论文使用授权书

本人完全了解武汉理工大学有关保留、使用学位论文的规定，即学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权武汉理工大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存或汇编本学位论文。同时授权经武汉理工大学认可的国家有关机构或论文数据库使用或收录本学位论文，并向社会公众提供信息服务。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

研究生(签名)：刘官协 导师(签名)：[Signature] 日期 2010.5.31



## 摘 要

现代控制理论以卡尔曼系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中为标志, 并提出了能控性和能观性这两个表征系统特性的重要概念。实数域上的能控能观理论用于分析系统结构和物理参量的值共同决定的能控能观性能是有效的。但是在工程中, 由于实验条件、制造工艺上的限制、观测上的误差以及人为地对数据的近似处理, 一个实际系统的参数的值只是近似的甚至未知的。只用能控性这个指标, 无法知道系统不满足完全能控条件到底是由于结构上的原因还是由于参数值的选择不当引起的。与传统基于实数域的研究不同, 基于多元有理函数域  $F(z)$  上的研究, 所得到的结论只与系统的结构有关, 而与物理参数的取值无关, 它单独反应了系统的结构性质。

本论文着力于频域方法, 将线性定常系统(实数系统)中的频域理论向多元有理函数系统推广, 以结构能控性的研究为主, 获得了一批  $F(z)$  上频域系统的结构特性的分析结果。本文主要由以下部分组成:  $F(z)$  上的矩阵、多项式和多项式矩阵及其运算、不可约性和标准型矩阵; 一类  $F(z)$  上系统的性质研究; 基于多项式矩阵理论的频域  $F(z)$  上系统结构性质的研究; 频域  $F(z)$  上组合系统结构性质的研究; 结构性质辅助分析软件的研发与设计。

本文的主要结论有:

$F(z)$  上  $\lambda$  的不可约多项式的次数可以任意大,  $F(z)$  上  $\lambda$  的多项式的系数的独立性与其不可约是有关的。对  $F(z)[\lambda]$  上的多项式矩阵做初等变换, 可得到唯一形式的史密斯形和非减次形矩阵。

1-型矩阵满足两种性质: 它的  $F(z)[\lambda]$  环上的特征多项式没有非零的常数特征值; 在  $F(z)[\lambda]$  环上没有非零重根。同时将 1-型矩阵与它的特点应用到实际的控制系统结构分析中。

基于单模阵的定义、Lebesgue 测度、互质的定义得到了  $F(z)$  上的 PBH 结构能控判据、多项式矩阵描述所对应的状态空间描述的结构能控判据和组合系统结构能控判据, 它们都与多项式矩阵的互质性有关。判断  $F(z)$  上多项式矩阵的互质性的子行列式公因式法, 简化了由具有两种性质且相互独立的子系统组成的串、并系统的结构能控性的判断。

推导出了一般组合系统的多项式矩阵描述及其结构能控判别方法。

从软件工程的要求出发, 给出了结构能控能观分析软件的需求分析和详细

设计。使用  $F(z)$  上的理论，以信号流图和方框图为模型研究开发了结构能控能观分析软件。本软件可分析信号流图和方框图的拓扑结构，得到的结果送入 MATLAB 进行符号运算从而分析出结构性质，得到状态空间实现。

**关键词：**多元有理函数域；频域；组合系统；结构能控（观）性；多项式矩阵；互质；

## Abstract

Modern control theory was marked with state space methods introduced into the system and control theory systematically by Kalman, and put forward the controllability and observability of system which are two important concepts of representation. The controllability and observability theories over the real number field are efficacious for the analysis of the controllability and observability that are determined by the system structure and the value of the physical parameters together. Nevertheless a practical system has approximate, even unknown parameter value sometimes because of a limit to experimental conditions or to manufacturing process, the error of observations and the approximate and artificial processing to data. Only with the controllability, we can not know whether it is due to structure or due to inappropriate choice of parameter values when the system does not meet the conditions of complete controllability. Different to the traditional research over the real number field, the research over the multivariate rational function field can have the conclusions that are only about the system structure, but have nothing to do with the values of physical parameters, which reflects alone the structural nature of the system.

This paper focuses on structural controllability and the frequency domain method, promotes the frequency domain theory of linear invariant systems (real number system) to the multivariate rational function system, and derives a number of analysis results about structural characteristics of the system over  $F(z)$  in frequency domain. This paper consists of the following components: The matrix, polynomial and polynomial matrix over  $F(z)$  and their operation, irreducibility and canonical matrix; A class of rational function matrices that satisfy two properties of linear systems and structural controllability; The structural properties of the system over  $F(z)$  in frequency domain based on the polynomial matrix theory; The structural properties of composite system over  $F(z)$  in frequency domain.; The research and design on the structural property analysis software.

The main conclusions of this paper are:

The degree of irreducible polynomials on  $\lambda$  over  $F(z)$  can be arbitrarily large.

The independence of the coefficients of the polynomial on  $\lambda$  over  $F(z)$  is related to its irreducibility. The only available form of Smith matrix and non-derogatory matrix can be derived by the elementary transformation to the polynomial matrix over  $F(z)[\lambda]$ .

Type-1 Matrix satisfies two properties: its characteristic polynomial over the ring of  $F(z)[\lambda]$  has no nonzero constant eigenvalues; and has no non-zero multiple roots over the ring of  $F(z)[\lambda]$ . At the same time these properties are applied to the structure analysis of realistic control systems.

Based on the definition of unimodular matrix, Lebesgue measure, the definition of coprime, the PBH structural controllability criterion over  $F(z)$ , the structural controllability criterion of polynomial matrix description of the corresponding to the state space descriptions and the structural controllability criterion of the composite system are related to the coprimeness of the polynomial matrices. The common factor of sub-determinant method which judges the coprimeness of the polynomial matrix over  $F(z)$ , can simplify the judgement of the structural controllability of the tandem or parallel systems which has two independent subsystems that have two properties.

A universal composite system is proposed and the polynomial matrix description of composite systems and structural controllability estimation is derived.

The requirements of software analyzing the structural controllability and observability are analyzed and the design of that is described in detail in terms of the software engineering. Using the theory over  $F(z)$ , the analysis software is developed by the model of signal flow graphs and block diagrams. The software can analyze the topology of block diagram and the signal flow graph. The topology results are into MATLAB to make the symbolic computation to analyze the structural controllability and observability, and to obtain state-space realization.

**Key words:** multivariate rational function field; frequency domain; composite systems; structural controllability (observability); polynomial matrix; coprime;

# 目 录

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 摘 要.....                                  | I   |
| Abstract.....                             | III |
| 目 录.....                                  | V   |
| 第 1 章 绪 论.....                            | 1   |
| 1.1 结构能控性的发展历程.....                       | 1   |
| 1.1.1 结构能控能观.....                         | 2   |
| 1.1.2 结构能控研究的历史方法.....                    | 5   |
| 1.1.3 多元有理函数域 $F(z)$ 上系统的结构性质.....        | 6   |
| 1.2 结构能控能观与图论.....                        | 8   |
| 1.2.1 仙人掌图.....                           | 9   |
| 1.2.2 电网络图.....                           | 9   |
| 1.2.3 键结图.....                            | 10  |
| 1.3 基于频域的系统结构能控性研究的意义、现状及研究基础.....        | 11  |
| 1.3.1 实数域上频率域能控能观条件.....                  | 11  |
| 1.3.2 实数域上组合系统能控能观条件.....                 | 12  |
| 1.4 系统结构性质分析软件的研究现状.....                  | 13  |
| 1.5 本文的研究思路以及内容安排.....                    | 13  |
| 第 2 章 $F(z)$ 上矩阵与频域结构能控.....              | 15  |
| 2.1 $F(z)$ 上矩阵运算.....                     | 15  |
| 2.2 $F(z)$ 域上的多项式.....                    | 17  |
| 2.2.1 域 $F(z)$ 上 $s$ 的多项式定义及不可约.....      | 17  |
| 2.2.2 域 $F(z)$ 上的独立参量及多项式不可约的一个充分条件.....  | 18  |
| 2.3 $F(z)[\lambda]$ 环上矩阵与 $F(z)$ 上矩阵..... | 23  |
| 2.3.1 $F(z)[\lambda]$ 环上矩阵.....           | 24  |
| 2.3.2 特征矩阵.....                           | 33  |
| 2.3.3 非减次矩阵.....                          | 37  |
| 2.4 $F(z)$ 上频域理论.....                     | 38  |
| 2.4.1 一般系统.....                           | 39  |

|        |                                |     |
|--------|--------------------------------|-----|
| 2.4.2. | 单输入单输出组合系统的结构能控能观.....         | 42  |
| 2.5    | 本章小结 .....                     | 47  |
| 第3章    | 1-型矩阵的两种性质及应用 .....            | 48  |
| 3.1    | 两种性质和 1-型矩阵 .....              | 48  |
| 3.2    | 若干引理 .....                     | 50  |
| 3.3    | 1-型矩阵的两种性质 .....               | 52  |
| 3.4    | 多元有理函数域上系统的一些能控判据.....         | 54  |
| 3.5    | 结构能控性判据的应用 .....               | 56  |
| 3.6    | 本章小结 .....                     | 58  |
| 第4章    | 基于多项式矩阵理论的 $F(z)$ 上系统结构性质..... | 59  |
| 4.1    | $F(z)$ 上频域系统的结构性质 .....        | 59  |
| 4.1.1  | $F(z)$ 上的能控性 PBH 判据 .....      | 59  |
| 4.1.2  | 在一类多元有理函数系统上应用.....            | 62  |
| 4.2    | $F(z)$ 上频域组合系统 .....           | 70  |
| 4.2.1  | $F(z)[s]$ 上多项式矩阵互质的秩判据 .....   | 72  |
| 4.2.2  | 组合系统结构能控性.....                 | 74  |
| 4.2.3  | 更普遍的组合系统.....                  | 76  |
| 4.3    | 本章小结 .....                     | 80  |
| 第5章    | 结构能控能观分析软件开发 .....             | 81  |
| 5.1.   | 结构能控能观分析软件需求分析和开发思路.....       | 81  |
| 5.1.1  | 一般系统的结构能控能观分析.....             | 81  |
| 5.1.2  | 组合系统的结构能控能观分析.....             | 82  |
| 5.1.3  | 软件结构 .....                     | 83  |
| 5.1.4  | 软件功能设计 .....                   | 84  |
| 5.2.   | 软件进一步设计 .....                  | 85  |
| 5.2.1  | 图形编辑程序设计.....                  | 85  |
| 5.2.2  | 软件主界面设计 .....                  | 100 |
| 5.2.3  | 输入的规范 .....                    | 102 |
| 5.2.4  | 图形数据文件 .....                   | 102 |
| 5.3.   | 拓扑分析算法 .....                   | 102 |
| 5.3.1. | 组合系统的关联矩阵.....                 | 103 |
| 5.3.2. | 信号流图的前向通道、回路.....              | 104 |
| 5.3.3. | 信号流图的互不接触的回路、与前向通道无接触的回路.....  | 105 |
| 5.3.4. | 数据结构和流程图.....                  | 105 |
| 5.4.   | 组合系统结构性质分析 (Matlab 算法) .....   | 107 |
| 5.4.1  | 计算子系统的传递函数矩阵.....              | 107 |
| 5.4.2  | 时域模型分析 .....                   | 109 |

|                       |                       |     |
|-----------------------|-----------------------|-----|
| 5.4.3                 | 频域模型分析 .....          | 109 |
| 5.4.4                 | M 函数的编写 .....         | 111 |
| 5.4.5                 | 分析结果显示 .....          | 112 |
| 5.5.                  | 分析例子 .....            | 113 |
| 5.6.                  | 软件改进 .....            | 118 |
| 5.6.1                 | 界面改进 .....            | 118 |
| 5.6.2                 | 符号运算的简化计算.....        | 118 |
| 5.6.3                 | 结合特殊组合系统的分析理论来改进..... | 118 |
| 5.7.                  | 本章小结 .....            | 119 |
| 第 6 章                 | 总结与展望 .....           | 120 |
| 6.1.                  | 研究成果 .....            | 120 |
| 6.2.                  | 展望 .....              | 121 |
| 参考文献                  | .....                 | 123 |
| 致  谢                  | .....                 | 129 |
| 攻读博士学位期间发表的论文及参加的科研项目 | .....                 | 130 |



# 第1章 绪论

## 1.1 结构能控性的发展历程

线性系统理论根据采用的数学工具和系统描述的不同,可分为四个平行的分支:状态空间法、代数理论、几何理论和频域方法<sup>[1]</sup>。

状态空间法(时域方法)的基本描述是:

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du \quad (1.1)$$

其中  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$  分别表示状态、输入和输出向量,  $A, B, C$  和  $D$  分别为  $n \times n, n \times m, p \times n$  和  $p \times m$  的实数域上的矩阵。涉及的计算主要是线性代数中的矩阵运算和变换。

线性系统的代数理论<sup>[2]</sup>用抽象代数工具研究了任意且固定数域  $K$  (通常是实数域  $R$ ) 上的线性系统, 这里状态向量  $x \in K^n$ , 输入向量  $u \in K^m$ , 输出向量  $y \in K^p$ , 且系数矩阵  $F, G, H$  (状态空间法中常表为  $A, B, C$ ) 也都是  $K$  上的  $n \times n, n \times m$  和  $p \times n$  矩阵。线性系统的几何方法<sup>[3]</sup>使用了几何形式的线性代数, 将系统的结构特性表述为不同的状态空间的几何性质, 其理论方法较为抽象, 但理解其数学基础后分析计算所需的矩阵演算量将大大减少。这两种方法与状态空间法和频域法相比所需要的数学基础要求更高。一般工程上状态空间法和频域法更加通用。

频域方法大致上有两个阶段的发展。在上世纪的五十年代, 经典的线性系统理论以拉普拉斯变换为数学基础, 传递函数为数学模型, 采用频率响应法, 分析综合的对象是单输入单输出线性系统。到上世纪的七十年代以状态空间法为基础发展了频率域的系统描述和计算方法来分析综合线性定常系统。其中的一个重要方法是多项式矩阵设计方法, 它采用传递函数矩阵的矩阵分式描述作为系统的数学模型, 在多项式矩阵计算和变换的基础上有完整的一套分析和综合的理论方法。与状态空间法相比, 频域方法物理直观性强, 便于设计调整。与经典的线性系统理论相比, 它是现代线性系统理论的一部分, 可以处理多输入多输出系统, 揭示系统更深刻的特性。

能控和能观性是线性系统理论中最基本的两个概念, 它表征了系统的结构特性, 是在状态空间法的基础上提出来的。能控性的意义在于研究系统这个“黑箱”的内部状态能否由输入来加以影响和控制。如果系统内部的所有状态的运动能够由输入来加以影响和控制, 就称系统是完全能控的, 否则就称为不完全

能控的或不能控的。能观性的意义在于研究系统这个“黑箱”的内部状态能否由输出出来表征。如果系统内部的所有状态的运动能够由输出出来表征，就称系统是完全能观的，否则就称为不完全能观的或不能观的。能控性和能观测性对于系统理论中的两大主题——控制与估计问题的研究，有着重要的意义。

在已知系统的状态空间描述或者多项式矩阵描述后，通过各种能控、能观判据即可得知系统的能控能观性<sup>[1]</sup>。

### 1.1.1 结构能控能观

以图 1.1 所示液位控制系统为例：

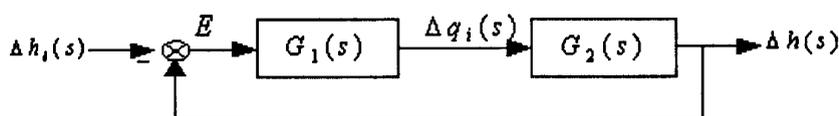


图 1.1 液位控制系统

其中  $G_1(s) = \frac{\Delta q_i(s)}{E(s)} = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$  为控制环节， $G_2(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta q_i(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$  为系统

对象。系统的闭环传递函数是  $\frac{\Delta h(s)}{\Delta h_i(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$ ，其中

$$a_0 = \frac{KK_p}{T_i T}, a_1 = \frac{KK_p + 1}{T}, b_0 = \frac{KK_p}{T_i T}, b_1 = \frac{KK_p}{T}。$$

这个反馈系统的状态方程可以表示为： $\dot{X} = AX + B\Delta h_i$ ， $\Delta h = CX$ ，其中  $X = (\omega, \dot{\omega})'$ ，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{KK_p}{T_i T} & -\frac{1+KK_p}{T} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{KK_p}{T_i T} & \frac{KK_p}{T} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

对于这一给定结构的系统，只有当它所有的物理参量  $K_p, T_i, K$  和  $T$  取值时， $A, B$  和  $C$  才都是实数域上的矩阵，系统才是实数系统。所有实数系统的分析结果(如  $(A, B)$  的能控性、 $(A, C')$  的能观性、特征多项式  $\det(\lambda I - A)$  的可约性等)

取决于系统的物理结构和物理参量的值，而系统结构单独的作用是什么却难以区分。

Lin 在 1974 年首先用图论方法对单输入线性时不变系统引进结构和结构能控性的概念<sup>[4]</sup>。结构矩阵和结构能控定义如下。

**定义 1.1:** 矩阵  $A$  称为结构矩阵，如果它的元素或者固定为零，或者是任意可变的，且这些可变参数彼此独立；系统  $\Sigma = (A, B)$  称为结构系统，如果  $(A, B)$  是有序的结构矩阵时；矩阵  $\bar{A}$  称为结构矩阵  $A$  的取值矩阵，如果  $A$  中的自由参数取某些特定的值后就是  $\bar{A}$ 。 $A$  称为  $\bar{A}$  的结构矩阵指  $\bar{A}$  中不为零的元素变为自由参数后得到的结构矩阵。

**定义 1.2:** 系统  $(A, B)$  称为结构能控的，如果有  $(A, B)$  的一个取值系统  $(\bar{A}_0, \bar{B}_0)$  为完全能控的。

在引入结构能控的概念后，Lin 的第一个结构能控性判据是用图论的方法得到的，当时他仅仅考虑了单输入线性系统，其结构能控性的主要成果可归纳成以下定理<sup>[4]</sup>。

**定理 1.1** 设  $A$  和  $b$  分别是  $n \times n$  和  $n \times 1$  的结构矩阵，下面四个性质是等价的。结构系统  $(A, b)$  是结构能控的； $(A, b)$  不具有形式 I 和形式 II； $(A, b)$  的图不包含“不可达点”和“膨胀”； $(A, b)$  的图是由“掌”生成的；

注：结构系统  $(A, b)$  具有形式 I，指存在置换矩阵  $P$  使得：
$$PAP' = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ，其中  $\dim(A_{11}) = k \times k$ ， $1 \leq k \leq n$ ， $P' = P^{-1}$ 。 $n \times n+1$  矩阵  $(A \ ; \ b)$  具有

形式 II，指存在置换矩阵  $P$  使得  $P(A \ ; \ b)P' = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ ，其中  $P_1$  和  $P_2$  的维数分别是

$k \times n+1$  和  $(n-k) \times n+1$  ( $k \geq 1$ )，且  $P_1$  中至多只有  $k-1$  个非零列向量。

如图 1.2 所示的电路，其时域描述为  $\dot{x} = Ax + bu$ ，
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ R_2 C \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \text{ 显然当 } (A_0 | b_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 时, } \text{rank}(b_0, A_0 b_0) < 2 \text{ 因此 } (A_0, b_0)$$

不能控。但由结构能控的定义知整个系统是结构能控的。

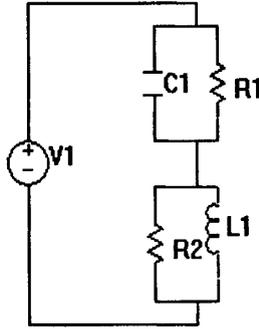


图 1.2 结构能控的电路

在工程中，由于实验条件或者制造工艺上的限制和观测上的误差，以及人为地对数据的近似处理，一个实际系统的参数只是近似的甚至未知的，但其结构是确定的。只用能控性这个指标，无法判断系统结构单独的作用是什么。无法知道系统不满足完全能控条件到底是由于结构上的原因还是由于参数选择不当引起的。此时实数域上的矩阵（元素都是实常数的矩阵）无法分析物理系统的结构性质，如结构能控性。Lin 引入的结构能控性概念使得能控从实际的观点来看更有意义。

结构能观与结构能控的关系和能控与能观的关系相同，都是成对偶的。

结构能控性理论反映了控制机构与被控制对象相匹配的结构和参数特性。能够解决利用输入信号对系统状态实现控制的结构问题，因而在许多大系统控制论有较多的引用<sup>[5,100-102]</sup>。

对于以连续生产为特征的复杂工业过程，其控制结构的选择是控制系统设计的重要环节<sup>[5-8]</sup>。<sup>[6]</sup>在过程控制系统中引入了结构矩阵及有向图来表达系统的结构，还应用系统的结构能控能观的概念作为控制结构是否可行的评价标准。<sup>[7]</sup>构造了过程控制系统的因果图，给出了组合大系统结构能控的充分条件，以及大系统如何分解、系统变量如何配对的有效算法。<sup>[8]</sup>在发展出用类仙人掌判断结构能控能观的基础上给出了控制结构生成的有效方法。

### 1.1.2 结构能控研究的历史方法

基于 Lin 提出的结构矩阵, 及结构矩阵的形式 I 和 II 与结构能控等价的基础上, Shields 和 Pearson 在 1976 年定义了结构矩阵的一般秩, 得到了多输入线性系统结构能控的代数判据 (定理 1.2), 并依据此定理给出了判断结构能控的算法<sup>[9]</sup>。结构矩阵  $A$  的一般秩即  $A$  中的自由参数在参数空间中的变化时使得  $A$  能取得的最大秩数。

定理 1.2 对于系统  $(A, B)$ ,  $n$  为方阵  $A$  的阶数,  $m$  为  $B$  的列数,  $\bar{R}$  的定义如下:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{B} & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{A} & \bar{B} & I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{A} & \bar{B} & I & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \bar{A}, \bar{B} \text{ 为 Lin 定义的结构矩阵, } I$$

为单位矩阵  $\bar{R}$  的维数为  $n^2 \times n(n+m-1)$ 。当且仅当存在一个整数  $k$  且  $n(m-1) < k \leq n(n+m-1)$  使得矩阵  $\bar{R}$  中有一个阶数为  $(n(n+m-1)-k-1) \times k$  全零的子矩阵,  $(A, B)$  结构不能控。

K. Glover 和 L. M. Silverman 在 1976 年用另外一套完备的数学推导对<sup>[4]</sup>和<sup>[9]</sup>中已获得的结构能控等价条件做了更简化的证明<sup>[10]</sup>, 并额外得到了一个结论:

定理 1.3 设结构矩阵  $(A, B)$  由  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$  给出, 其中  $A_{22}$  和

$B_2$  分别是  $(n-k) \times (n-k)$  和  $(n-k) \times r$  的, 如果  $(A_{22}, B_2)$  和  $(A_{11}, (A_{12}, B_1))$  都是结构能控的且  $A_{11}$  的一般秩等于  $k$ , 则结构系统  $(A, B)$  是结构能控的。

之后 Mayeda 把结构能控判别的图论方法推广到多输入情形<sup>[11]</sup>, 得到结论: 系统  $(A, B)$  是结构能控的, 当且仅当  $(A, B)$  的图是“众掌”生成的, 也即“众掌”对应的系统是结构能控的。若  $(A, B)$  结构能控, 它的图中就没有“不可达点”和“膨胀”。

图论的概念直观, 使用也方便。在设计系统的结构时, 只需在一个图中寻找一个“膨胀”或“不可达点”。<sup>[8]</sup>采用类仙人掌的概念研究系统的结构能控性, 获得一些成果。

对应图论的结论, Mayeda 在<sup>[11]</sup>中还得到了等价的结构能控代数判据:  $[A B]$  不可约且矩阵  $(A|B)$  一般秩为  $n$ 。实际上  $[A B]$  不可约意味着系统对应的图输入可达, 即没有“不可达点”, 也表示结构矩阵  $[A B]$  不具有形式 I。而  $(A|B)$  一般秩为  $n$  意味着图中就没有“膨胀”等价于结构矩阵  $[A B]$  不具有形式 II。

文献<sup>[12]</sup>在深入研究结构矩阵  $[A B]$  的可约性条件的基础上进一步简化了系统结构能控判据的证明, 揭露了系统结构能控的本质。文献<sup>[13]</sup>从结构系统的“源”、“汇”、“渡”和“耦合”这些图的概念以及多项式矩阵入手, 研究了系统的完全能控和结构能控。

以上研究者和大系统理论所谈论的结构能控性, 都是针对 Lin 的结构系统而言的, 即前提是“线性系统的系数矩阵中的元素或者固定为零, 或者可以任意变化而且自由参数相互独立”, 所对应的实际的物理线性系统的范围比较狭窄。

当系统参数间存在依赖关系时, 如图 1.1 所示的液位控制系统, 在系数矩阵  $A$  和  $B$  中,  $A_{21}$ 、 $A_{22}$  的变化都不是相互独立的, 前面关于结构能控性的定义和结论就不再适用了, 而且实际系统中固定不变的元不一定是零如  $A_{22} = 1$ 。针对 Lin 的结构矩阵的这些问题使得研究者开始提出一些新类型的结构化矩阵。

文献<sup>[14]</sup>定义了一种列结构矩阵, 这种矩阵的每一列元素中含有一相同参量因子, 且不同列中的参量因子是相互无关的, 如:  $A = \begin{pmatrix} 3z_1 & z_2 \\ 2z_1 & 4z_2 \end{pmatrix}$ 。

文献<sup>[15-16]</sup>引进了元素为独立参量的一次多项式的矩阵, 如:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + 1 & z_1 + 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ 。

文献<sup>[17-18]</sup>定义并研究了混合矩阵  $M=Q+T$ , 这里  $T$  的非零元素在  $Q$  的元素所属的域上是代数独立的, 如:  $A=Q+T = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & x \\ 3 & z_2 \end{pmatrix}$ 。

上述结构矩阵的研究都有重要的数学意义, 但它们定义的结构矩阵不能完全描述物理系统, 如图 1.1 所示的系统。而且从数学上来说其满秩方阵的逆矩阵均不符合其定义, 能表征的线性系统结构也是有限的。

### 1.1.3 多元有理函数域 $F(z)$ 上系统的结构性质

文献<sup>[19-22]</sup>提出用  $F(z)$  上矩阵描述系统的系数矩阵, 把系统描述基于  $F(z)$  上。

定义 1.3 设  $z_1, \dots, z_q$  表示  $q$  个独立参量（或者变量、未定元）而不是参数（常数、数值）。令  $z = (z_1, \dots, z_q)$ ,  $R^q$  是  $z$  的定义域,  $R^q$  也可说成是参量空间。令  $F(z)$  表示一切  $z_1, \dots, z_q$  的有理函数构成的域,  $F(z)[\lambda]$  表示以  $F(z)$  中的元为系数的  $\lambda$  的多项式环。若矩阵  $M$  的每一元素都是  $F(z)$  中的元（即是变量  $z_1, \dots, z_q$  的有理函数），就称  $M$  是  $z$  的有理函数矩阵 RFM（Rational function matrix）或域  $F(z)$  上的矩阵；若系统的系数矩阵都是 RFM，则称该系统为  $F(z)$  上的有理函数系统 RFS（Rational function system）或域  $F(z)$  上的系统。

研究分析系统和电网络  $F(z)$  上的性质（即结构性质）比分析实数域上的性质更有实际意义。从已获得的  $F(z)$  上的时域结论来看，以图 1.1 所示系统的能控能观性为例：当  $K_p = 2, T_i = 1, K = 3, T = 1$  时（或表为：令  $z = (K_p, T_i, K, T)$  取值  $\bar{z} = (2, 1, 3, 1)$ ），代入 (1.2) 式有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

根据实数系统的理论，显然这个系统 (1.3) 是不能观的。但多元有理函数系统的能观性矩阵的行列式  $\det(C', A'C') = \frac{K_p^2 K^2 (T - T_i)}{T_i^2 T^3}$  却是  $F(z)$  上的非零元，系统是  $F(z)$  上能观的，即结构能观的。那么使得系统是实数域上不能观的点（例如： $\bar{z} = (2, 1, 3, 1)$ ）的集合  $\{z \in R^4 \mid \det(C', A'C') = 0\}$  在参量空间  $R^4$  中只是一超曲面。由于  $K_p, T_i, K, T$  是物理参量，取值要想绝对精确到使得  $\det(C', A'C') = 0$  实际是不可能的。至于实数系统 (1.3) 是不能观的，可理解为：人为地或者说数学上地对参量加上了约束  $z = \bar{z} = (2, 1, 3, 1)$  使得  $T - T_i = 0$  即  $\det(C', A'C') = 0$  而造成的。可见对于控制系统（物理系统）而言，如果是  $F(z)$  上

能控能观的（结构能控能观的）就意味着实际上它在实数域上总是能控能观的（或者从鲁棒的观点说是参数全局（对几乎一切  $z \in R^q$ ）鲁棒能控能观的（将其视为结构已知参数不确定的系统））。所以研究分析多元有理函数系统的结构能控能观性比分析实数域上的能控能观性更有实际意义。

对  $F(z)$  上系统的结构性质的研究是有理论价值的。实数域是多元有理函数域  $F(z)$  的子域，结构矩阵、列结构矩阵、一次多项式矩阵、混合矩阵都可视为一种  $F(z)$  上的矩阵， $F(z)$  上研究获得的判据适用的范围更广泛。

在[22]中有这样一  $F(z)$  上的结论：设  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k), B = (B_1', \dots, B_k')$ ，其中  $A_i$  和  $B_i$  分别是  $F(z)$  上  $n_i \times n_i$  和  $n_i \times m$  矩阵， $i=1, \dots, k$ ，且  $\det(\lambda I - A_i)$  与  $\det(\lambda I - A_j)$  互素， $i \neq j$ 。那么  $(A, B)$  是  $F(z)$  上能控的充要条件是  $(A_i, B_i)$  是  $F(z)$  上能控的。相应的实数域上的结论被包含在其中：设实数域上  $n \times n$  矩阵（特殊的有理函数矩阵） $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), B = (b_1', \dots, b_n)'$ 。若  $A$  的特征值互不相等，即  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ ，这意味着  $\lambda - \lambda_i$  与  $\lambda - \lambda_j$  互素，那么由上面的结论有  $(A, B)$  是能控的充要条件是  $(\lambda_i, b_i)$  能控，也即  $b_i \neq 0, i=1, \dots, n$ 。这就是熟悉的实数域上的判据。

在线性系统理论中，能控概念首先是基于状态空间法提出的，后引申至几何理论和频域法中，而结构能控的概念正是基于能控来定义的。在已有的文献中可以看到以往结构能控研究大多是基于时域上的状态空间法，研究状态方程的系数矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$ 。线性系统理论方法中的代数理论所研究的  $K$  是数域，而几何理论也只考虑实数域  $R$  和复数域  $C$  上的线性空间，而不是  $F(z)$  上的线性空间，因而都未能描述物理系统的结构能控性质。

## 1.2 结构能控能观与图论

结构能控能观的一个研究方法是通过直接观察系统的结构直接得到系统的结构能控能观性。在这方面有以下方法及文献。

### 1.2.1 仙人掌图

仙人掌图<sup>[4,8,11]</sup> (结构有向图) 针对  $\text{Lin}$  的结构系统, 前提是“线性系统的系数矩阵中的元素或者固定为零, 或者可以任意变化而且自由参数相互独立”。

仙人掌图包括节点以及连接节点的有向弧线两个元素。它将方程组中的未知量或已知量对应于图的一个节点, 它们之间的线性关系用连接节点的有向支路来表示, 在分析网络系统结构问题中, 这种有向图法特别有用。因为在很多情况下, 无须首先建立有关方程组, 可以通过观察物理系统的结构, 直接建立有向图, 然后通过对有向图进行变换, 找到它与网络状态方程结构图的某种关系, 进而达到分析网络结构能控性的目的。有向图提供了一种看得见的结构, 在其中各变量间的关系可清楚地显示出来并进行对照。

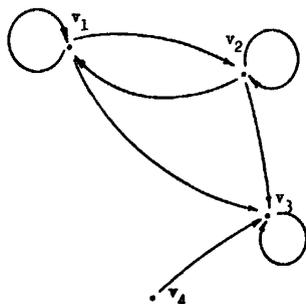


图 1.3 仙人掌图

### 1.2.2 电网络图

文献<sup>[27-31,96-97]</sup>提出了电网络的可断性和结构能控能观的关系。可断性定义: 如果在一个图中至少存在一个这样的子图, 该子图与它的余子图间最多有一个公共节点, 就称该图为可断图, 或可断的; 否则它是不可断的。如果一个可断的图中的一子图与它的余子图最多有一个公共节点并且该子图自己是不可断的, 那么称该子图为不可断子图。显然, 在一可断图中有  $k$  个不可断子图 ( $k \geq 2$ )。若一个电网络的图是可断的就称它是一个可断网络或可断的; 否则它是不可断网络。若可断网络的一子网络的图是不可断子图就称它为不可断子网络。例如图 1.4 (a)所示网络是不可断的。但若令电压源  $e=0$ , 即电压源短路, 则无激励网络如图 1.4(b)所示是可断的, 且有两个不可断子网络  $G_1$  和  $G_2$ 。并有以下结论: 一个有激励的不可断的 RLC 网络, 如果①没有仅含电容器和独立电压源的

回路，②没有仅含电感器和独立电流源的割集，③它的无激励网络（令电压源短路，电流源开路）不可断且不存在只含电容器的割集和只含电感器的回路，那么该网络在  $F(z)$  上总是能控的。

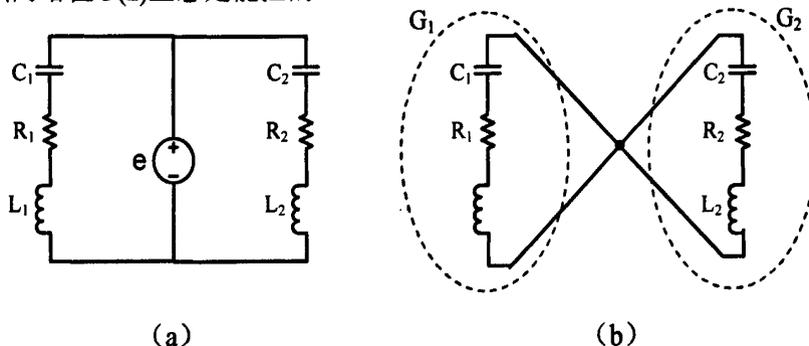


图 1.4 电网络图

以上两种图都可以直接通过观察图的结构得到系统的结构能控能观性。

下面的键结图则是在研究结构能控能观性质时引入的一些新的图的类型，但未得到图的结构与结构能控能观的直接关系。

### 1.2.3 键结图

文献<sup>[32-33]</sup>用键结图来对线性时不变系统建模，文献<sup>[32]</sup>主要研究对象是内模控制的系统，并得到了闭环系统结构能控能观的充要条件。

键结图是一种动态系统模拟的方法，英文名 Bond Graph。键结图是利用能量的观点，以宏观的方式，找出在许多能量系统间运作的共通处。利用能量键定义出势与流。由于势与流的乘积可以得到所通过的能量，因此可以经由能量储存与转换的关系，定义出广义位能储存元件，广义动能储存元件，广义阻抗元件等直接储存或转移能量的三大基本元件。

键结图共定义了 C（储位能元件），I（储动能元件），R（阻尼元件），TF（转能结），GY（回能结），1（共流结），0（共势结），Se（势源），Sf（流源）等九种基本的元件。

由于键结图法可以依需求在推导系统的状态方程式过程中，依实际需求或假设，使用线性或非线性的元件组成方程式，并且当系统元件确立后，就可以依据因果关系的设定，了解系统元件间的能量独立或相依的关系。除了表示能量流动的能量键外，也可以将整个键结图当成另一键结图模式的基本元件，或经由讯号键传递控制线路的讯号。

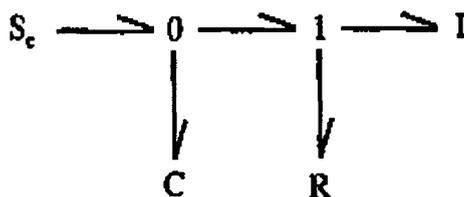


图 1.5 键结图

### 1.3 基于频域的系统结构能控性研究的意义、现状及研究基础

基于时域的  $F(z)$  上系统结构能控的结论较为成熟<sup>[20-22]</sup>。而基于频域的  $F(z)$  上系统目前有以下结构能控的结论。

文献<sup>[19]</sup>研究了  $F(z)$  上频域的结构能控能观条件，包括关于单输入单输出的一般系统的结构能控能观的充要条件、多输入多输出一般系统的充分但非必要条件、单输入单输出组合系统的频域的结构能控能观条件，这些推导的基础是著名的零极点抵消理论。但由<sup>[1]</sup>的第二部分知道多项式矩阵理论对频域上的分析更为成熟且方便直观。<sup>[19]</sup>中对单输入单输出组合系统的研究说明了要研究组合系统的结构能控能观性从频域上着手相对时域上的状态空间法来说可能更为简便直接。这里组合系统指的是以串联、并联和反馈方式连接而成的系统。一个系统通常是由很多个子系统组合构成的。

#### 1.3.1. 实数域上频率域能控能观条件

文献<sup>[1]</sup>的第二部分阐述了实数域上线性定常系统的复频率域理论。罗森布罗克、沃罗维奇等在 70 年代初提出多项式矩阵设计方法，并在随后的发展中得到不断完备和广泛应用，和状态空间法相比，它具有物理直观性强、便于设计调整等优点。多项式矩阵设计方法是以多项式矩阵为基础的线性定常系统的频率域理论设计方法，采用传递函数矩阵的矩阵分式描述作为系统的数学模型。并在多项式矩阵计算和变换的基础上，建立了一整套分析和综合线性定常系统的理论和方法。

以多项式为元组成的矩阵称为多项式矩阵。单模矩阵是一类重要的多项式矩阵，它的行列式的值为独立于变量  $s$  的非零常数。基于单模阵的概念可定义

出多项式矩阵的互质性：两个多项式矩阵的最大左（右）公因子是单模阵，则称它们为左（右）互质。互质性表征出两个多项式矩阵间的不可简约属性。从系统结构特性角度来说，左互质对应系统能控，右互质对应系统能观。

传递函数矩阵反映的只是系统输入与输出的关系，即系统能控能观的部分，不能完全描述系统。除了传递函数矩阵，多项式矩阵描述也是频域上的数学模型，是线性定常系统最为一般的描述。系统其它描述如传递函数矩阵、状态空间描述均可认为是它的特殊情形。在研究组合系统的能控和能观性上，多项式矩阵描述发挥了重要作用。

### 1.3.2. 实数域上组合系统能控能观条件

如果组合系统的所有子系统都是能控能观的，才能讨论在什么样的条件下整个系统是能控能观的。文献<sup>[23]</sup>和<sup>[34]</sup>研究了组合系统的能控能观条件。<sup>[23]</sup>用状态矩阵 $[A \ B]$ 约当块的标准型得到组合系统能控（能观）的充要条件：只需要判定某些常数向量的线性相关性即可；还推导出不需要约当块只需判定传递函数矩阵秩的充分条件。<sup>[34]</sup>给出传递函数矩阵的特征多项式和传递函数矩阵次数 $\delta G(s)$ 的定义，并得到该文献的定理 1：组合系统 $G(s)$ 由能控能观的子系统 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 组成，如果 $\delta G(s) = \delta G_1(s) + \delta G_2(s)$ ，则 $G(s)$ 也能控能观。<sup>[34]</sup>还将子系统的传递函数矩阵化为史密斯—麦克米伦型的和，并与状态矩阵约当块标准型对应，再利用<sup>[23]</sup>的结论得到<sup>[34]</sup>的定理 2~定理 6：根据两个子系统有相同的特征值或特征值完全相异的具体情况，再利用传递函数矩阵的标准史密斯—麦克米伦型来判定能控能观性。

文献<sup>[1]</sup>的第十二章的 1~4 节则是将子系统的传递函数矩阵 $G(s)$ 化为不可简约的矩阵分式描述形式，再根据具体的并联、串联、状态反馈或输出反馈来判断各分子分母矩阵的互质情况从而得到组合系统的能控能观性。

文献<sup>[25]</sup>举出了另一种组合系统，它的子系统之间的关系不只是简单的串、并联。文献<sup>[25]</sup>用关联矩阵表示它们之间的联结关系，并推导了组合系统具有唯一解，能用状态方程完全表示的充要条件是： $\det[I - FH(s)]$ 不是有理函数体 $Q(s, R)$ 上的零元。其中 $H(s)$ 是以各子系统的传递函数矩阵 $H_i(s)(i=1, 2, \dots)$ 为对角线子块的分块对角矩阵。

上述文献表明基于多项式矩阵理论在 $F(z)$ 上研究频域系统的结构性质还尚未有成熟的理论。已获得的时域的 $F(z)$ 上结构能控能观理论<sup>[22]</sup>是可以基于时域

的能控能观理论进行推广的。按照这个思路，由于基于多项式矩阵理论的实数域的频域理论相对比较成熟，在这个基础上进行  $F(z)$  上扩展是可以得到频域系统结构性质判据的。而研究频域上的  $F(z)$  系统的结构性质将对组合系统的结构性质研究将大有益处。本文主要研究频域  $F(z)$  上的结构能控性，结构能观性可由对偶性得到。

## 1.4 系统结构性质分析软件的研究现状

作者所属课题组之前已经开发出了一套  $F(z)$  上电网络辅助分析软件<sup>[26,101]</sup>，主要功能包括：绘制电网络图并以文件的形式存储；对绘制好的电路图形分析其拓扑结构；设置受控源控制端；设置产生互感的电感；输出并保存电网络的状态方程和输出方程；分析电网络的结构能控性和能观性。 $F(z)$  上电网络辅助分析软件根据  $F(z)$  上的矩阵及多元有理函数系统描述的新理论分析方法来分析研究系统的结构性质，实现了对  $F(z)$  上电网络系统的分析，国内外目前还没有进行相关研究的软件。

鉴于编制这套软件的经验，可以将分析的对象由电网络扩展到更一般的控制系统上，这套新的软件的分析对象可以是由多个子系统以并联、串联或更复杂的方式组成的组合系统，其中的子系统以信号流图或方框图的方式输入，分析信号流图或方框图再得到子系统及整个组合系统的状态方程矩阵或其他系统描述方式，从而得到系统的结构性质。

## 1.5 本文的研究思路以及内容安排

从前人的研究经验看，结构能控性研究的图论方法和代数理论的方法往往是密切相关的。在本论文中一方面用多项式矩阵理论对  $F(z)$  上的系统进行理论研究，另一方面开发辅助分析软件辅助理论分析，理论成熟后也可改进软件的算法。

本文研究着力于频域方法，将线性定常系统（实数系统）中的频域理论向多元有理函数系统推广。在线性系统中的能控性与能观性有对偶的关系，本文在研究结构能控能观性时将以能控性的研究为主。

本文的研究内容主要分为四个部份：

- (1) 基于多项式矩阵理论的频域  $F(z)$  上系统结构性质的研究

现有的频域  $F(z)$  上系统的理论只是基于简单的传递函数，并未引入多项式矩阵理论。多项式矩阵理论的引进将会更丰富  $F(z)$  上系统的结构性理论。

### (2) $F(z)$ 上组合系统结构性质的研究

如果有多个子系统结构能控，在什么样的条件下由这些子系统组成的组合系统也是结构能控的，这也是一个重要的研究内容。所以先从频域模型上考虑这点。

### (3) 一类 $F(z)$ 上系统的性质研究

1-型矩阵是一类多元有理函数矩阵，可以表示现实中大多数的线性系统，它是时域的状态方程  $A$  矩阵。两个性质是实际物理系统的重要特征。而 1-型矩阵是具有两个性质的。在讨论频域  $F(z)$  上系统结构性时，利用系统具有两个性质的特点能得到一些结构判据。

### (4) 辅助分析软件的设计、编制

$F(z)$  上系统结构性辅助分析软件，能够输入系统的信号流程图或方框图，分析组合系统的结构性，输入信号流程图可以得到传递函数矩阵及其状态空间实现。能对  $F(z)$  上的传递函数矩阵进行各种变换处理，例如分解为不可约矩阵分式描述；将  $F(z)$  上的多项式矩阵变换为史密斯形，判断互质性得到结构性。

将  $F(z)$  上矩阵理论、系统理论和多项式矩阵理论有机结合于  $F(z)$  上频域系统的能控性研究是完成本文研究内容的主要方法和途径。因此，本文的第 2.1 节~2.3 节首先总结介绍了  $F(z)$  域上的多项式和矩阵这一数学工具的一些性质，该数学方法是研究结构能控的理论基础。第 2.4 节介绍了已有的  $F(z)$  上频域理论。第 3 章论述了 1-型矩阵和两种性质。第 4 章在第 2 章的第一部分和实数域的多项式矩阵理论上推导了基于多项式矩阵的  $F(z)$  上频域结构能控理论，在第 3 章的基础上得到了组合系统结构能控的判据。第 5 章是关于系统辅助分析软件研究与开发，本章主要阐述了构成系统的图元类型及其输入方法的设计、图形拓扑结构分析的算法、MATLAB 的 M 函数编写和程序开发中的一些功能规划，并给出系统分析例子与电网络系统进行了分析结果对比。在第 2 章~第 5 章中，大多数结论都有相关的例子说明或验证其研究、分析和应用的合理性。第 6 章即结束语，对论文工作做了总结，对以后工作做了展望。

## 第 2 章 $F(z)$ 上矩阵与频域结构能控

在讨论  $F(z)$  上频域系统结构能控前, 需要  $F(z)$  上矩阵及运算法则做为数学基础。本章的第 2.1~2.3 节将数域上矩阵的一些数学性质推广到  $F(z)$  上的矩阵, 并讨论了  $F(z)$  上不可约多项式的一些特征以及  $F(z)$  上多项式矩阵的两个变换标准型: 特征矩阵和一种非减次矩阵。第 2.4 节介绍了现有的  $F(z)$  频域结构能控理论。

### 2.1 $F(z)$ 上矩阵运算

第 1 章的定义 1.3 定义了多元有理函数域  $F(z)$ 、多元有理函数域  $F(z)$  上的矩阵。对  $F(z)$  上的矩阵运算, 有以下结论。

任何域 (包括  $F(z)$ ) 上矩阵运算与数域上的矩阵运算规则<sup>[91]</sup>一样。任何域 (包括  $F(z)$ ) 上的方阵的行列式的计算规则与数域上行列式一样, 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

定义 2.1 下面三种对矩阵的演变, 统一称为矩阵的初等变换:

- 1) 用任意  $F(z)$  中非零元  $\alpha \neq 0$  去乘矩阵的第  $i$  行 (列);
- 2) 把矩阵的第  $i$  行 (列) 乘以  $\mu$  加之于第  $j$  行 (列), 其中  $\mu \in F(z)$ ;
- 3) 互换矩阵的第  $i, j$  两行 (列)。

与此相对应有

定义 2.2 下面三种正方形矩阵统一称为初等矩阵:

- 1) 用任意  $F(z)$  中非零元  $a \neq 0$  去乘单位矩阵  $I$  的第  $i$  行 (列) 而得的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

↑  
第  $i$  列

2) 把  $I$  的第  $i$  行 (列) 乘  $\mu$  加于第  $j$  行 (列) 而得的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & \vdots & \ddots \\ & & \mu \cdots 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 \cdots \mu \\ & & \vdots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

↑            ↑  
第  $i$  列        第  $j$  列

3) 互换  $I$  的  $i, j$  两行 (列) 而得的矩阵:



令  $F$  表示任一域(可以是数域或  $F(z)$ )。则有域  $F$  上次数  $\geq 1$  的多项式  $f(s)$  称为域  $F$  上的  $s$  的不可约多项式, 如果它不能表示成  $F$  上的两个次数比  $f(s)$  低的  $s$  多项式的乘积, 否则是可约的。

一次多项式总是不可约多项式。而次数  $> 1$  的多项式, 对于不同的域可能有不同的结论, 例如多项式  $s^2 + 1$  在有理数域上是不可约多项式, 即不能分解成两个具有有理数系数的  $s$  的一次多项式; 在实数域上也是不可约的; 但在复数域上是可约的:  $s^2 + 1 = (s + j)(s - j)$ 。

对于数域上的  $n$  次 ( $n > 1$ ) 多项式, 在复数域上总可分解成  $n$  个一次多项式之积。在复数域上不可约多项式的次数是 1, 在实数域上不可约多项式的次数只可能是 1 或 2<sup>[99]</sup>。

对于  $F(z)$  上  $s$  的  $n$  次多项式 ( $n > 1$ ) 在  $F(z)$  上是否可约是个很复杂的问题, 文献<sup>[20]</sup>研究了一类  $F(z)$  上矩阵的特征多项式在  $F(z)$  上不可约的条件。该条件说明在域  $F(z)$  上可以存在次数任意大的不可约多项式。

对于两个  $F(z)$  上  $s$  的可约多项式的互素性, 文献<sup>[19]</sup>中有引理: 如果  $P(s) = P(z, s) \in F_z[s], Q(s) = Q(z, s) \in F_z[s]$ , 那么  $P(s)$  和  $Q(s)$  互素的充分必要条件是  $m^*\{\bar{z} | (P(\bar{z}, s), Q(\bar{z}, s)) = d(\bar{z}, s) \neq 1\} = 0$ , 其中  $m^*\{\}$  表示点集的 Lebesgue 测度,  $d(\bar{z}, s) = (P(\bar{z}, s), Q(\bar{z}, s))$  表示对于给定  $\bar{z} \in R^q$  的  $P(\bar{z}, s)$  与  $Q(\bar{z}, s)$  的最大公约数,  $d(\bar{z}, s)$  的首系数等于 1。

### 2.2.2 域 $F(z)$ 上的独立参量及多项式不可约的一个充分条件

引理 2.1: 设  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  是  $F(z)$  中的非常数的  $z$  的有理函数,  $z = (z_1, \dots, z_q) \in R^q$ , 若在  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  中至少存在一排列  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}$ ,  $i_k \in \{0, \dots, n-1\}$  使得  $a_{i_k}$  至少有一参量  $z(i_k) \in \{z_1, \dots, z_q\}$  是  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}$  所没有的且  $z(i_k)$  可表示为  $a_{i_k}$  和  $\bar{z}(i_k)$  的有理函数,  $z(i_k) = f_k(a_{i_k}, \bar{z}(i_k))$ , 这里  $\bar{z}(i_k)$  表示  $a_{i_k}$  中除  $z(i_k)$  外的所有参量,  $\bar{z}(i_k)$  可以含  $a_0, \dots, a_{i_{k-1}}$  的参量, 那么  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  可

视为相互独立参量。

证明：显然，只需证明  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_{n-1}}$  是独立参量即可。所谓  $a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}$  是独立参量就是这些参量可在实数域上任意取值，即任意取  $(a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}) = (a_{i_0}^*, \dots, a_{i_{n-1}}^*)$ 。对于  $a_{i_0}$ ，由于  $z(i_0) = f_0(a_{i_0}, \bar{z}(i_0))$  是  $a_{i_0}$  和  $\bar{z}(i_0)$  的有理函数，故在实数域上任意取  $a_{i_0}^*, \bar{z}^*(i_0)$  都有  $z^*(i_0) = f_0(a_{i_0}^*, \bar{z}^*(i_0)) \in R$  成立，这意味着  $a_{i_0}$  可任取实数。 $z(i_0)$  的独立性保证了  $a_{i_0}$  的独立性。设  $a_{i_0}$  的参量已取值，对于  $a_{i_1}$  由于  $z(i_1) = f_1(a_{i_1}, \bar{z}(i_1))$  是  $a_{i_1}$  和  $\bar{z}(i_1)$  的有理函数且  $z(i_1)$  不含于  $a_{i_0}$ ，所以  $z(i_1)$  仍是变化参量，没有取值。

任取  $a_{i_1}^*$  和  $\bar{z}(i_1)$  中不含于  $a_{i_0}$  的参量的值（ $a_{i_0}$  中的参量已取定），有  $z^*(i_1) = f_1(a_{i_1}^*, \bar{z}^*(i_1)) \in R$ ，此时  $a_{i_0}$  和  $a_{i_1}$  中的参量已取值。 $z(i_1)$  的独立性保证了  $a_{i_1}$  的独立性。同理可证  $a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}$  的独立性。最后，对于  $a_{i_{n-1}}$  由于  $z(i_{n-1}) = f_{n-1}(a_{i_{n-1}}, \bar{z}(i_{n-1}))$  是  $a_{i_{n-1}}$  和  $\bar{z}(i_{n-1})$  的有理函数且  $z(i_{n-1})$  不含于  $a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-2}}$  所以  $z(i_{n-1})$  仍为参量，还未取值。任取  $a_{i_{n-1}}^*$  和  $\bar{z}(i_{n-1})$  中不含于  $a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-2}}$  的参量的值，有  $z^*(i_{n-1}) = f_{n-1}(a_{i_{n-1}}^*, \bar{z}^*(i_{n-1})) \in R$ ，此时  $a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}$  中所有参量已取值  $z = z^* \in R^q$ ， $z(i_{n-1})$  的独立性保证了  $a_{i_{n-1}}$  的独立性。

$F(z)$  上系统的独立参量反应了系统的结构，决定着系统的结构性质(如系数矩阵  $A$  及其特征多项式  $\det(\lambda I - A)$  的可约性， $F(z)$  上能控能观性等)。

例 2.1 (1)  $a_0 = z_1 z_2$ ， $a_1 = z_1 + z_2$ ，不存在一排列  $a_{i_0}, a_{i_1}$  满足引理 2.1 的条件，若选  $a_0 = a_{i_0}$  则  $a_{i_1} = a_1 = z_1 + z_2$  没有任何不同于  $a_{i_0} = a_0 = z_1 z_2$  的参量。若选  $a_{i_0} = z_1 + z_2$ ，则  $a_{i_1} = z_1 z_2$  没有任何不同于  $a_{i_0}$  的参量。

$$(2) a_0 = z_1 z_2^2, a_1 = z_3^2 z_2$$

选  $a_{i_0} = a_0 = z_1 z_2^2$ ,  $z_1 = \frac{a_0}{z_2^2}$ ,  $a_{i_1} = a_1$ ,  $z_3 = f_1(a_{i_1}, z_2) = \pm \sqrt{\frac{a_{i_1}}{z_2}}$  是  $a_{i_0}$  中没有的,

但  $f_1$  不是有理函数。

选  $a_{i_0} = a_1 = z_3^2 z_2$ , 有  $z_2 = \frac{a_{i_0}}{z_3^2} = f_0(a_{i_0}, z_3)$ , 那么  $a_{i_1} = z_1 z_2^2$ , 有

$z_1 = \frac{a_{i_1}}{z_2^2} = f_1(a_{i_1}, z_2)$  是  $a_{i_0}$  中没有的参量。由引理 2.1 知  $a_0$  和  $a_1$  可视为两独立参量。

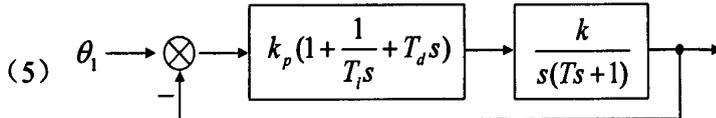
$$(3) \quad a_0 = z_1 z_2, \quad a_1 = z_3^2$$

选  $a_{i_0} = a_0 = z_1 z_2$ ,  $z_1 = \frac{a_{i_0}}{z_2}$  或  $z_2 = \frac{a_{i_0}}{z_1}$ ; 但  $a_{i_1} = a_1 = z_3^2$ ,  $z_3 = \pm \sqrt{a_{i_1}} = f_1(a_{i_1})$

不是  $a_{i_0}$  的有理函数,  $a_{i_1}$  不能任取实数, 如  $a_{i_1}^* < 0$  时,  $z_3 \notin R$  不满足引理 2.1 的条件, 称  $a_1$  是不独立的。

$$(4) \quad a_0 = 3z_1 z_2 + 1, \quad a_1 = 6$$

因为  $a_1 = 6$  是非零常数, 不含  $z$  的参量,  $a_1$  不是独立系数。



闭环系统的特征多项式为  $\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ , 其中系数  $a_0 = \frac{kk_p}{T_i T}$ ,

$$a_1 = \frac{kk_p}{T}, \quad a_2 = \frac{1 + T_d kk_p}{T}, \quad z = (k, k_p, T_i, T, T_d), \quad \text{那么系数有一排列 } a_{i_0} = a_1,$$

$$a_{i_1} = a_0, \quad a_{i_2} = a_2, \quad z(i_0) = T = \frac{kk_p}{a_1}, \quad z(i_1) = T_i = \frac{kk_p}{a_0 T}, \quad z(i_2) = T_d = \frac{a_2 T - 1}{kk_p} \text{ 或者}$$

$$a_{i_0} = a_1, \quad a_{i_1} = a_2, \quad a_{i_2} = a_0, \quad \text{这时 } z(i_0) = T = \frac{kk_p}{a_1}, \quad z(i_1) = T_d = \frac{a_2 T - 1}{kk_p},$$

$$z(i_2) = T_i = \frac{kk_p}{a_0 T}, \quad \text{故 } a_0, a_1, a_2 \text{ 可视为独立参量。}$$

定理 2.5  $F(z)[s]$  上多项式  $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$  是不可约多项式

当  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  可视为  $n$  个相互独立的参量。

证明：设  $p(s)$  是系统

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{k}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{k/a_0}{T_n s^n + T_{n-1}s^{n-1} + \dots + T_1s + 1}$$

式

写成微分方程

$$k/a_0 u(t) = T_n x_1^{(n)}(t) + \dots + T_2 \ddot{x}_1(t) + T_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t) \quad (2.1)$$

其中

$$T_n = \frac{1}{a_0}, \quad T_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0}, \quad \dots, \quad T_1 = \frac{a_1}{a_0} \quad (2.2)$$

令

$$T_1 \dot{x}_1 = x_2, \quad T_2 \ddot{x}_1 = x_3, \quad T_3 \dddot{x}_1 = x_4, \quad \dots, \quad T_{n-2} x_1^{(n-2)} = x_{n-1}, \quad T_{n-1} x_1^{(n-1)} = x_n, \quad \dot{x}_n = T_{n-1} x_1^{(n)} \quad (2.3)$$

那么对 2.3 式中第 1 式两边对时间求导并乘以  $T_2$  再将第 2.2 式代入得

$$T_2 \dot{x}_2 = T_2 T_1 \ddot{x}_1 = T_1 x_3, \quad \frac{T_2}{T_1} \dot{x}_2 = x_3;$$

对第 2 式两边求导并乘以  $T_3$  再代入第 3 式有  $T_3 \dot{x}_3 = T_3 T_2 \ddot{x}_1 = T_2 x_4$ ,

$$\frac{T_3}{T_2} \dot{x}_3 = x_4; \quad \dots; \quad \text{对 } T_{n-2} x_1^{(n-2)} = x_{n-1} \text{ 两边求导并乘以 } T_{n-1} \text{ 有}$$

$$T_{n-1} \dot{x}_{n-1} = T_{n-1} T_{n-2} x_1^{(n-1)} = T_{n-2} x_n, \quad \frac{T_{n-1}}{T_{n-2}} \dot{x}_{n-1} = x_n; \quad \text{代 (2.3) 到 (2.1) 有}$$

$$k/a_0 u(t) = \frac{T_n}{T_{n-1}} \dot{x}_n + x_n + x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1$$

故状态方程可写成（考虑到 (2.2) 式）



的, 否则  $p(s)$  不可约。

$$(2) \quad p(s) = s^2 + a_1s + a_0, \text{ 其中 } a_0 = z_1z_2^2, \quad a_1 = z_3^2z_2$$

由例 2.1 (2) 知  $a_0, a_1$  是独立的, 根据定理 2.5 得  $p(s)$  是  $F(z)[s]$  上不可约多项式。

$$(3) \quad p(s) = s^2 + a_1s + a_0, \text{ 其中 } a_0 = z_1z_2, \quad a_1 = z_3^2$$

由例 2.1 (3) 知  $a_0, a_1$  不满足引理 2.1 的条件,  $a_1$  不是独立系数, 由于定理 2.5 不是充分必要条件, 所以  $p(s)$  不一定是可约的, 由根的表达式

$$s_{1,2} = \frac{-z_3^2 \pm \sqrt{z_3^4 - 4z_1z_2}}{2} \notin F(z) \text{ 知 } p(s) \text{ 是 } F(z)[s] \text{ 上不可约多项式。}$$

$$(4) \quad p(s) = s^2 + a_1s + a_0, \text{ 其中 } a_0 = 3z_1z_2 + 1, \quad a_1 = 6$$

$$a_1 \text{ 不是独立系数, 但 } p(s) \text{ 的两个根 } s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(3z_1z_2 + 1)}}{2} \notin F(z), \text{ 故}$$

$p(s)$  仍是  $F(z)[s]$  上不可约多项式。

$$(5) \quad p(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \text{ 其中 } a_0 = \frac{kk_p}{T_iT}, \quad a_1 = \frac{kk_p}{T}, \quad a_2 = \frac{1 + T_dkk_p}{T},$$

$$z = (k, k_p, T_i, T, T_d) \in R^5$$

由例 2.1 (5) 知  $a_0, a_1, a_2$  是 3 个独立系数, 故  $p(s)$  是  $F(z)[s]$  上不可约多项式。

判断结构性质时, 矩阵的特征多项式是否可约是一个条件, 若矩阵不可约则可做迅速判定<sup>[22]</sup>。本节获得的结论是一个不可约性的充分条件, 基于此充分条件可写出一个判断多项式可约的算法来加快对结构能控能观性的判断。

### 2.3 $F(z)[\lambda]$ 环上矩阵与 $F(z)$ 上矩阵

### 2.3.1. $F(z)[\lambda]$ 环上矩阵

以环  $F(z)[\lambda]$  中  $\lambda$  的多项式为元素作成的矩阵  $(f_{ij}(\lambda))_{m \times n}$  叫做  $F(z)[\lambda]$  上矩阵, 也称为  $F(z)$  上  $\lambda$  的多项式矩阵<sup>[99]</sup>, 简记为  $A(\lambda)$ 。因为  $F(z)$  上的元 (包括常数) 也可以看成  $\lambda$  的零次多项式, 故  $F(z)[\lambda]$  上矩阵是  $F(z)$  上矩阵的推广。由于  $\lambda$  的多项式的和、差、积仍为  $\lambda$  的多项式, 故对  $F(z)[\lambda]$  上矩阵自然就可以定义各种运算; 正方  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的行列式、子式、代数余子式以及一般  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的子块、子式等也是自然就有了。正方  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的行列式, 一般来说, 算出来是一个多项式  $f(\lambda)$ , 但有时也可能是  $F(z)$  中一个元。例如

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda + \frac{z_1}{z_2} \\ \lambda + \frac{z_1}{z_2} & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \frac{z_1}{z_2} - \frac{z_1^2}{z_2^2}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + z_1 \\ \lambda - z_1 & \lambda \end{vmatrix} = z_1^2, \quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

由此也可以推出  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的“秩”的概念。

对于  $F(z)[\lambda]$  上矩阵同样可进行初等变换以简化之。不过第 2 种初等变换应把第 2.1 节的  $F(z)$  上的  $\mu$  换成  $F(z)[\lambda]$  上多项式  $\mu(\lambda)$ , 而第 1、3 种初等变换则和第 2.1 节的完全一样。现在看一下这些初等变换相应的初等矩阵的行列式为何? 第 1 种显然仍为  $\alpha \neq 0$ , 第 2 种仍为 1, 第 3 种仍为  $-1$ 。总之, 均为  $F(z)$  上非零元。于是有

**定义 2.4** 行列式为  $F(z)$  上非零元的正方  $F(z)[\lambda]$  上矩阵统称为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵, 或者称为  $F(z)[\lambda]$  上的单模矩阵。

2.1 节的  $F(z)$  上非奇异矩阵也就是特殊的初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵。此外, 初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵之积与直和  $(P(\lambda) + Q(\lambda))$  仍均为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵。

因为正方  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda)$  自然就有伴随矩阵  $A^*(\lambda)$ ，它仍为  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，故特别当  $A(\lambda)$  为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵时， $|A(\lambda)| = a \neq 0$ ， $a \in F(z)$ ，就知  $\frac{1}{a}A^*(\lambda)$  仍为  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，而且  $A(\lambda)\frac{1}{a}A^*(\lambda) = \frac{1}{a}A^*(\lambda)A(\lambda) = I$ 。也就是说：初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵恒有逆，且其逆仍为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵。对于一般的正方  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，根本不考虑它有无逆的问题，即使它的行列式等于一个非 0 多项式  $f(\lambda)$ ，也不考虑，除非  $f(\lambda) = a \neq 0$ ，即它是初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵时。

**定义 2.5** 设  $A(\lambda), B(\lambda)$  为两个  $m \times n$  的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵。如果有初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $P(\lambda), Q(\lambda)$  使得  $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$ ，则说  $A(\lambda)$  等价于  $B(\lambda)$ ，并记为  $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ 。

**命题 2.1**  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的等价关系具有反身性、对称性和传递性。

事实上，因为  $I_m$  与  $I_n$  均为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，故由  $I_m A(\lambda) I_n = A(\lambda)$  即知  $A(\lambda) \cong A(\lambda)$ ；如果  $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ ， $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$ ，则由  $P(\lambda)^{-1}B(\lambda)Q(\lambda)^{-1} = A(\lambda)$ ，即知  $B(\lambda) \cong A(\lambda)$ ；如果  $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ ， $B(\lambda) \cong C(\lambda)$ ，则由  $P_1(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda) = B(\lambda)$ ， $P_2(\lambda)B(\lambda)Q_2(\lambda) = C(\lambda)$  可得  $P_2(\lambda)P_1(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)Q_2(\lambda) = C(\lambda)$ ，而初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵之积仍为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，故有  $A(\lambda) \cong C(\lambda)$ 。

**命题 2.2** 如果  $A_1(\lambda) \cong B_1(\lambda)$ ， $A_2(\lambda) \cong B_2(\lambda)$ ，则直和

$$(A_1(\lambda) + A_2(\lambda)) \cong (B_1(\lambda) + B_2(\lambda))$$

因由  $P_1(\lambda)A_1(\lambda)Q_1(\lambda) = B_1(\lambda)$  及  $P_2(\lambda)A_2(\lambda)Q_2(\lambda) = B_2(\lambda)$  可得：

$$(P_1(\lambda) + A_2(\lambda))(A_1(\lambda) + A_2(\lambda))(Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda)) = (B_1(\lambda) + B_2(\lambda))，$$

而初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵之直和仍为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，故命题成立。

此外，由命题 2.1 显然可得

**命题 2.3** 对一个  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda)$ ，无论进行哪一种初等变换，无论是对行或对列，无论进行多少次，所得  $F(z)[\lambda]$  上矩阵恒等价于  $A(\lambda)$ 。

**定理 2.6** 秩数为  $r$  的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda)$  恒可由若干次初等变换而变成这样一个对角  $F(z)[\lambda]$  上矩阵：

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \varphi_r(\lambda) & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\varphi_1(\lambda) | \varphi_2(\lambda) | \cdots | \varphi_r(\lambda)$ ，诸  $\varphi_i(\lambda)$  的首项系数均为 1。

此处的记号“ $|$ ”表示“能被整除”的意思。 $A(\lambda)$  和  $D(\lambda)$  不一定是正方的，称  $D(\lambda)$  为史密斯形。

**证明** 对秩数用归纳法。当  $A(\lambda)$  的秩数为 0 时，它是零矩阵，就已是对角阵了。假定对于秩数为  $r-1$  的矩阵，定理已证明了。现在来看秩数为  $r$  的  $A(\lambda)$ 。

考虑  $A(\lambda)$  经过各种各次的初等变换，而得到的所有  $F(z)[\lambda]$  上矩阵，从这些矩阵的所有非 0 元素（即非 0 多项式）中，总可找到一个次数最小的，设为  $\varphi_1(\lambda)$ 。对  $\varphi_1(\lambda)$  所在的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵进行第三种初等变换，可把此  $\varphi_1(\lambda)$  移到左上角去，于是  $A(\lambda)$  便可由若干次初等变换化为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & f(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

如果  $\varphi_1(\lambda)$  的首项（即  $\lambda$  的最高次项）系数不是 1 而是  $a$ ，则可用  $\frac{1}{a}$  去乘第 1 行，这样等于再用一次初等变换（第 1 种）就可把  $\varphi_1(\lambda)$  的首项系数化为 1。故不妨

设  $\varphi_1(\lambda)$  的首项系数已经是 1 了。现在断言  $\varphi_1(\lambda) | f(\lambda)$ 。假若不然, 则可用  $\varphi_1(\lambda)$  去除  $f(\lambda)$ , 设得商式  $q(\lambda)$  和余式  $r(\lambda)$ , 则  $r(\lambda)$  非 0 而其次数小于  $\varphi_1(\lambda)$  的次数, 且  $f(\lambda) = q(\lambda)\varphi_1(\lambda) + r(\lambda)$  若把上面矩阵第一列的  $-q(\lambda)$  倍加于第 2 列, 则等于再进行一次初等变换 (第 2 种) 就把  $A(\lambda)$  化成这样一个矩阵, 其第 1 行第 2 列的元素为  $r(\lambda)$ , 但  $r(\lambda)$  的次数小于  $\varphi_1(\lambda)$  的次数, 此为矛盾。故必有  $\varphi_1(\lambda) | f(\lambda)$ 。同理,  $\varphi_1(\lambda)$  能整除第 1 行和第 1 列的所有元素。于是再用若干次第 2 种初等变换便化  $A(\lambda)$  为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & 0 \\ 0 & A_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

由于上边矩阵的秩数仍为  $r$ , 故秩  $A_1(\lambda) = r - 1$ 。根据归纳法假设, 便知  $A_1(\lambda)$  可由若干次初等变换而化为

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(\lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \varphi_r(\lambda) & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $\varphi_2(\lambda) | \varphi_3(\lambda) | \cdots | \varphi_r(\lambda)$ , 且首项系数均为 1。所以  $A(\lambda)$  就可由若干次初等变换而化为

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & 0 \\ & \varphi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_r(\lambda) \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

最后只要再指出  $\varphi_1(\lambda) | \varphi_2(\lambda)$  就完了。这是容易看出的, 只要把上边矩阵的第 2 行的 1 倍加于第 1 行, 再用上面已经断言过的事实就知必有  $\varphi_1(\lambda) | \varphi_2(\lambda)$ 。归纳法完成, 证毕。

由定理 2.6 还可以有结论: 任何初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵恒可经若干次初等变换

而化为  $I$ 。

因为  $n$  阶初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $P(\lambda)$  的秩数为  $n$ ，故由定理 2.6 知  $P(\lambda)$  可由初

等变换化为  $\begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n(\lambda) \end{pmatrix}$ ，其中  $\varphi_i(\lambda)$  的首项系数为 1。由于用第 1、2、3

种初等变换去变  $P(\lambda)$  时，所得矩阵之行列式分别为  $a|P(\lambda)|, |P(\lambda)|, -|P(\lambda)|$ 。而  $|P(\lambda)|$  又是  $F(z)$  上非 0 元，故  $P(\lambda)$  经若干次初等变换后，所得矩阵之行列式仍为  $F(z)$  上非 0 元，不含  $\lambda$ 。又因  $\varphi_i(\lambda)$  的首项系数为 1，所以必有  $\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\cdots\varphi_n(\lambda)=1$ ，即  $\varphi_1(\lambda)=\cdots=\varphi_n(\lambda)=1$ ，否则  $\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\cdots\varphi_n(\lambda)$  是  $\lambda$  的非 0 次多项式，矛盾。故此矩阵为  $I$ 。

对  $F(z)[\lambda]$  上矩阵进行初等变换时，同  $F(z)$  上矩阵一样，等于用初等矩阵去左或右乘该  $F(z)[\lambda]$  上矩阵。只是第二种初等矩阵中有一个多项式  $\mu(\lambda)$ ，而第 1、3 两种初等矩阵则与过去的完全一样。故有：

初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵恒等于若干个初等矩阵（特殊的初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵）之积。如果  $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ ，则  $A(\lambda)$  必可由若干次初等变换化为  $B(\lambda)$ 。

下面将讨论定理 2.6 中  $\varphi_i(\lambda)$  和  $A(\lambda)$  的内在联系，先有

**定义 2.6** 设  $A(\lambda)$  的秩数为  $r$ 。于是，只要  $1 \leq s \leq r$ ， $A(\lambda)$  中必然有非 0 的  $s$  阶子式存在。令  $D_s(\lambda)$  为  $A(\lambda)$  中所有非 0 的  $s$  阶子式的最大公因式，且首项系数为 1。则一共可得  $r$  个多项式  $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_r(\lambda)$ 。这些多项式是由  $A(\lambda)$  所确定的，叫做  $A(\lambda)$  的行列式因子。

**命题 2.4** 秩数为  $r$  的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda)$  的行列式因子具有性质  $D_1(\lambda) | D_2(\lambda) | \cdots | D_r(\lambda)$ 。

因为  $D_{s-1}(\lambda)$  能整除每个  $s-1$  阶子式，故从  $s$  阶子式按行或按列展开来看，

就知  $D_{s-1}(\lambda)$  能整除每个  $s$  阶子式，从而就有

$$D_{s-1}(\lambda) | D_s(\lambda)$$

由此命题便知：

$$D_1(\lambda), \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)}, \dots, \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)} \quad (2.4)$$

都是多项式且首项系数均为 1。于是这  $r$  个多项式也就是由  $A(\lambda)$  所唯一确定的。

故有

**定义 2.7** 式 2.4 中的  $r$  个多项式叫做  $A(\lambda)$  的不变因子。其中  $r$  是  $A(\lambda)$  的秩数。

下面将要证明定理 2.6 中的  $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_r(\lambda)$  正好就是  $A(\lambda)$  的不变因子。先有

**命题 2.5** 设  $C(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda)$ 。从秩数来看便知：如果  $C(\lambda)$  有  $t$  个行列式因子  $D_1(\lambda)_C, \dots, D_t(\lambda)_C$  (即秩  $C(\lambda) = t$ )，则  $A(\lambda)$ ， $B(\lambda)$  至少各有  $t$  个行列式因子  $D_1(\lambda)_A, \dots, D_t(\lambda)_A; D_1(\lambda)_B, \dots, D_t(\lambda)_B$ 。而且必有  $D_s(\lambda)_A | D_s(\lambda)_C$  与  $D_s(\lambda)_B | D_s(\lambda)_C, s = 1, \dots, t$ 。

由矩阵乘法规则，不难知  $C(\lambda)$  的每个  $s$  阶子式必等于  $\sum a(\lambda)b(\lambda)$ ， $a(\lambda)$  与  $b(\lambda)$  分别为  $A(\lambda)$  和  $B(\lambda)$  的  $s$  阶子式。故  $D_s(\lambda)_A$  与  $D_s(\lambda)_B$  均能整除  $C(\lambda)$  的每个  $s$  阶子式，从而均能整除  $D_s(\lambda)_C$ 。

**命题 2.6** 等价的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵不仅同秩数，而且有完全一致的行列式因子，从而又有完全一致的不变因子。

这只要指出，用初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $P(\lambda)$  去左乘或右乘一个  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda)$ ，所得的  $B(\lambda)$  与  $A(\lambda)$  有完全一致的行列式因子就够了。

设  $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)$ 。则有  $D_s(\lambda)_A | D_s(\lambda)_B$ ，但又由

$$A(\lambda) = P(\lambda)^{-1} B(\lambda)$$

知  $D_s(\lambda)_B \mid D_s(\lambda)_A$ 。由于首项系数均为 1，故必有  $D_s(\lambda)_A = D_s(\lambda)_B$ 。右乘时同理。

**定理 2.7** 定理 2.6 中的  $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_r(\lambda)$  恰好是  $A(\lambda)$  的  $r$  个不变因子。

根据定理 2.4，故有完全一致的不变因子。

**证明** 由命题 2.6 知  $A(\lambda)$  的不变因子与右边等价的对角  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的不变因子完全一致。看定理 2.6 易知其行列式因子为（注意到  $\varphi_1(\lambda) \mid \dots \mid \varphi_r(\lambda)$ ）：

$$D_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda), D_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda), \dots, D_r(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\cdots\varphi_r(\lambda),$$

由此立即知其不变因子为  $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_r(\lambda)$ 。证毕。

由此可知，定理 2.6 中的  $F(z)[\lambda]$  上对角矩阵是由  $A(\lambda)$  所唯一确定，即多项式矩阵的史密斯形是唯一的。

下面就在  $F(z)$  域上来分解  $A(\lambda)$  的不变因子  $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_r(\lambda)$ 。设为：

$$\varphi_1(\lambda) = [e_1(\lambda)]^{n_{11}} [e_2(\lambda)]^{n_{21}} \cdots [e_k(\lambda)]^{n_{k1}},$$

$$\varphi_2(\lambda) = [e_1(\lambda)]^{n_{12}} [e_2(\lambda)]^{n_{22}} \cdots [e_k(\lambda)]^{n_{k2}},$$

.....

$$\varphi_r(\lambda) = [e_1(\lambda)]^{n_{1r}} [e_2(\lambda)]^{n_{2r}} \cdots [e_k(\lambda)]^{n_{kr}}.$$

其中  $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_k(\lambda)$  是首项系数为 1 且在此域  $F(z)$  上不能再分解的不同的多项式；指数  $n_{ij} (i=1, \dots, k; j=1, \dots, r)$  是非负整数（自然有些可以是 0，但最后一排指数  $n_{1r}, \dots, n_{kr}$  都不是 0）。这样记是为了便于陈述起见。

由不变因子的“依次能整除”性，可知

$$n_{11} \leq n_{12} \leq \dots \leq n_{1r}; \dots; n_{k1} \leq n_{k2} \leq \dots \leq n_{kr}$$

**定义 2.7** 这些因子  $[e_i(\lambda)]^{n_{ij}}$ ，除去指数为 0 的以外，均称为  $A(\lambda)$  的初等因子，计初等因子的个数时，应包括重复的在内。全部初等因子之整体叫做  $A(\lambda)$  的初等因子组。

例如在有理数域（是  $F(z)$  的子域）上，设  $r=2$ ，

$$\varphi_1(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2 + \lambda + 3)^3,$$

$$\varphi_2(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2 + \lambda + 3)^5,$$

则说  $A(\lambda)$  共有 4 个初等因子， $(\lambda-1), (\lambda-1)^2, (\lambda^2 + \lambda + 3)^3, (\lambda^2 + \lambda + 3)^5$ 。它们构成  $A(\lambda)$  的初等因子组。

显然  $A(\lambda)$  的初等因子组是由  $A(\lambda)$  所确定。给出  $A(\lambda)$  的初等因子组后，由上面的指数大小规则并根据  $A(\lambda)$  的秩数，很容易反过来求出  $A(\lambda)$  的不变因子。

总结以上内容可得：

**定理 2.8**  $m \times n$  的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $A(\lambda) \cong B(\lambda) \Leftrightarrow$  它们的史密斯形相同  $\Leftrightarrow$  它们的行列式因子完全一致  $\Leftrightarrow$  它们的不变因子完全一致  $\Leftrightarrow$  它们的秩数相同，初等因子组相同（参看下面的注意） $\Leftrightarrow$  两者可由若干次初等变换互相变换。

[注意] 两个不等价的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵可能有同样的初等因子组。如

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}, B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

就有同样的初等因子组： $(\lambda+1), (\lambda-1)$ 。但它们显然不能等价，因秩  $A(\lambda)=2$ ，而秩  $B(\lambda)=1$ 。

从上面看来，欲求定理 2.6 中的  $A(\lambda)$  的初等因子组，似乎就应先把  $A(\lambda)$  化为史密斯形，然后再求初等因子，但这样较为麻烦。事实上，只要用初等变换把  $A(\lambda)$  化为对角形式（这比化成史密斯形要简单），再分解因子即可求出初等因子。这就需要证明

**定理 2.9** 如果  $A(\lambda)$  等价于对角  $F(z)[\lambda]$  上矩阵

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(\lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & g_r(\lambda) & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中诸  $g_i(\lambda)$  的首项系数均为 1, 但未必是  $A(\lambda)$  的不变因子, 而且

$$g_i(\lambda) = [f_1(\lambda)]^{m_i} [f_2(\lambda)]^{l_i} \cdots [f_i(\lambda)]^{n_i}, (i = 1, \dots, r)$$

其中  $f_1(\lambda), \dots, f_i(\lambda)$  是首项系数为 1、彼此不同的、不能再分解的多项式。则所有的  $[f_1(\lambda)]^{m_i}, \dots, [f_i(\lambda)]^{n_i} (i = 1, \dots, r)$ , 除去指数为 0 外, 就恰好组成  $A(\lambda)$  的初等因子组。

证明 先看  $f_1(\lambda)$  的诸幂。由于调整主对角线上诸  $g_i(\lambda)$  的次序并不失去等价性, 故不妨设经过调整已经有  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$ 。于是  $[f_1(\lambda)]^{m_1 + \dots + m_s} (s \leq r)$  能整除  $B(\lambda)$  的任意  $s$  阶子式, 从而能整除行列式因子  $D_s(\lambda)$ 。但是  $[f_1(\lambda)]^{m_1 + \dots + m_{s-1}}$  不能整除左上角那个  $s$  阶子式, 从而不能整除  $D_s(\lambda)$ , 故必有

$$D_s(\lambda) = [f_1(\lambda)]^{m_1 + \dots + m_{s-1} + m_s} h(\lambda), f_1(\lambda) \text{ 不能整除 } h(\lambda)$$

同理有

$$D_{s-1}(\lambda) = [f_1(\lambda)]^{m_1 + \dots + m_{s-1}} k(\lambda), f_1(\lambda) \text{ 不能整除 } k(\lambda)$$

所以不变因子  $\varphi_s(\lambda)$  的分解中恰含  $f_1(\lambda)$  的  $m_s$  次幂, 当  $s = 1, \dots, r$  时均一样。这不仅说明  $[f_1(\lambda)]^{m_1}, \dots, [f_1(\lambda)]^{m_r}$ , 除指数为 0 以外, 都是  $A(\lambda)$  的初等因子, 而且就  $f_1(\lambda)$  的诸幂来说,  $A(\lambda)$  只能有这样一些初等因子。

同理, 对  $f_2(\lambda), \dots, f_i(\lambda)$  的诸幂来说,  $A(\lambda)$  恰好只有定理中分解出来的, 除指数为 0 以外的那些初等因子。

最后只要再指出, 任意一个异于诸  $f_j(\lambda)$  的多项式  $f(\lambda)$  的任何幂都不可能都是  $A(\lambda)$  的初等因子, 定理就证完了。这是显然的, 因为  $f(\lambda)$  不能整除  $g_1(\lambda)g_2(\lambda)\cdots g_r(\lambda) = D_r(\lambda)$ , 从而不能整除任何不变因子。证毕。

### 2.3.2. 特征矩阵

研究  $F(z)$  上矩阵  $A$  的标准形式, 要用到  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的理论, 这是因为它和下面这种特殊的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵有着密切的关系, 所以先来讨论这种特殊的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵:

定义 2.8 设  $A=(a_{ij})$  为任意  $n$  阶矩阵, 下面这个特殊的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为  $A$  的特征矩阵。

$A$  的特征矩阵  $\lambda I - A$  的行列式  $|\lambda I - A|$  展开后, 就是  $A$  的特征多项式  $f(\lambda)$ 。现在就利用特征矩阵先来证明

定理 2.10 (Cayley-Hamilton 定理)  $n$  阶矩阵  $A$  恒满足其特征多项式  $f(\lambda)$ ,

即  $f(A) = 0$

证明 令

$$f(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n$$

因为  $(\lambda I - A)$  的伴随矩阵  $(\lambda I - A)$  的元素至多是  $\lambda$  的  $n-1$  次多项式, 故可把它表示为

$$(\lambda I - A) = C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1} \lambda + C_n$$

其中  $C_1, \dots, C_n$  都是由常数组成的  $n$  阶矩阵。再看

$$(\lambda I - A)(C_1 \lambda^{n-1} + \cdots + C_n) = f(\lambda)I = I\lambda^n - a_1 I\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n I$$

比较两边的  $\lambda$  的同次幂系数矩阵, 即得

$$C_1 = I, C_2 - AC_1 = -a_1 I, C_3 - AC_2 = a_2 I, \dots, -AC_n = (-1)^n a_n I$$

用  $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$  分别左乘上面各式再相加, 得左边为:

$$A^n C_1 + A^{n-1}(C_2 - AC_1) + A^{n-2}(C_3 - AC_2) + \cdots + A(C_n - AC_{n-1}) - AC_n = 0$$

而右边则为:

$$A^n - a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n I = f(A)$$

证毕。

$F(z)[\lambda]$ 上矩阵也可以认为是“矩阵多项式”，即其系数为矩阵的多项式。

考虑  $F(z)[\lambda]$ 上矩阵的除法问题有

**命题 2.7** 仿定理 2.10 中的矩阵考虑两个正方的  $F(z)[\lambda]$ 上矩阵如下:

$$B(\lambda) = B_0 \lambda^m + B_1 \lambda^{m-1} + \cdots + B_m, B_0 \neq 0, \text{ 此时可说次 } B(\lambda) = m;$$

$C(\lambda) = C_0 \lambda^{m'} + C_1 \lambda^{m'-1} + \cdots + C_{m'}, C_0$  非奇异, 次  $C(\lambda) = m'$ 。于是必有唯一的

$Q_1(\lambda), R_1(\lambda)$ , 使

$$B(\lambda) = Q_1(\lambda)C(\lambda) + R_1(\lambda)$$

其中  $R_1(\lambda)$  或为 0 或次  $R_1(\lambda) <$  次  $C(\lambda)$ 。

又有唯一的  $Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ , 使

$$B(\lambda) = C(\lambda)Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

其中  $R_2(\lambda)$  或为 0 或次  $R_2(\lambda) <$  次  $C(\lambda)$ 。

这和普通多项式的带余子除法定则类似, 只不过在相除时, 要注意系数矩阵相乘的因子次序, 所以左商、右商不同, 而有两个等式, 两个余式。

**定义 2.9** 设  $A, B$  均为  $n$  阶矩阵。如果有  $F(z)$  上非奇异矩阵  $P$  使  $P^{-1}AP = B$ , 则说  $A$  相似于  $B$ , 记为  $A \sim B$ ; 也可以说用相似变换把  $A$  化为  $B$ 。

**命题 2.8** 正方矩阵的相似关系具有反身性、对称性和传递性。

因由  $I^{-1}AI = A$  知  $A \sim A$ ; 若  $A \sim B$ , 则由  $P^{-1}AP = B$  得  $(P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A$  知  $B \sim A$ ; 又若  $A \sim B, B \sim C$ , 则由  $P^{-1}AP = B, Q^{-1}BQ = C$  得  $(PQ)^{-1}A(PQ) = C$  知  $A \sim C$ 。

**命题 2.9** 相似矩阵的秩数、特征多项式以及特征根都相同。

**定理 2.11**  $A \sim B \Leftrightarrow (\lambda I - A) \cong (\lambda I - B)$

证明 如果  $A \sim B$ , 则有  $P^{-1}AP = B$ , 从而有  $P^{-1}(\lambda I - A)P = \lambda I - B$ , 且  $P^{-1}, P$  均为初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵, 故  $(\lambda I - A) \cong (\lambda I - B)$ 。反过来, 如果  $(\lambda I - A) \cong (\lambda I - B)$ , 则有初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $P(\lambda), Q(\lambda)$ , 使  $P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = (\lambda I - B)$ 。由命题 2.7 知有

$$P(\lambda) = (\lambda I - B)P_1(\lambda) + R, Q(\lambda) = Q_1(\lambda)(\lambda I - B) + S$$

其中  $R, S$  或为 0 或为  $F(z)$  上矩阵 (因其次数  $<$  次  $(\lambda I - B) = 1$  故也)。为简便, 暂不写出  $\lambda$  并把  $(\lambda I - A)$  与  $(\lambda I - B)$  分别记为  $A_0$  与  $B_0$ 。于是有

$$B_0 = PA_0Q = (B_0P_1 + R)A_0(Q_1B_0 + S) = B_0P_1A_0Q_1B_0 + B_0P_1A_0S + RA_0Q_1B_0 + RA_0S$$

把最后一项移到左边, 再把  $S$  换成  $Q - Q_1B_0$ , 把  $R$  换成  $P - B_0P_1$  即得

$$\begin{aligned} B_0 - RA_0S &= B_0P_1A_0Q_1B_0 + B_0P_1A_0(Q - Q_1B_0) + (P - B_0P_1)A_0Q_1B_0 \\ &= B_0P_1A_0Q_1B_0 + B_0P_1A_0Q - B_0P_1A_0Q_1B_0 + PA_0Q_1B_0 - B_0P_1A_0Q_1B_0 \\ &= B_0P_1A_0Q + PA_0Q_1B_0 - B_0P_1A_0Q_1B_0 \end{aligned}$$

由于  $B_0 = PA_0Q$ , 故  $A_0Q = P^{-1}B_0, PA_0 = B_0Q^{-1}$ 。代入上式得

$$B_0 - RA_0S = B_0P_1P^{-1}B_0 + B_0Q^{-1}Q_1B_0 - B_0P_1A_0Q_1B_0 = B_0(P_1P^{-1} + Q^{-1}Q_1 - P_1A_0Q_1)B_0$$

现在把括号内的  $F(z)[\lambda]$  上矩阵记为  $G(\lambda)$ , 并恢复原来的记号即有

$$(\lambda I - B) - R(\lambda I - A)S = (\lambda I - B)G(\lambda)(\lambda I - B)$$

观察两边  $\lambda$  的次数: 左边应  $\leq 1$ ; 如果  $G(\lambda) \neq 0$ , 则右边应  $\geq 2$ , 此为矛盾。故必有  $G(\lambda) = 0$ , 从而得

$$\lambda I - B = R(\lambda I - A)S = \lambda RS - RAS$$

由此即知必有  $RS = I, R = S^{-1}$  以及  $B = RAS = S^{-1}AS$ 。故  $A \sim B$ 。证毕。

现在来看  $\lambda I - A$  的史密斯形。因  $|\lambda I - A| = f(\lambda)$  为  $n$  次多项式，故  $\lambda I - A$  的秩数为  $n$ 。由定理 2.6 知有初等  $F(z)[\lambda]$  上矩阵  $P(\lambda), Q(\lambda)$ ，使

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_n(\lambda) \end{pmatrix}, \varphi_1(\lambda) | \cdots | \varphi_n(\lambda)$$

如果两边取行列式，则可由  $|P(\lambda)| = a \neq 0, |Q(\lambda)| = b \neq 0$ ，及  $f(\lambda)$  与诸  $\varphi_i(\lambda)$  的首项系数均为 1，而知必有

$$f(\lambda) = \varphi_1(\lambda) \cdots \varphi_n(\lambda), \quad (\text{此时必有 } ab = 1)$$

因  $f(\lambda)$  为  $n$  次的，而右边有  $n$  个因子，且依次能整除下去，所以在一般情形下，前面若干个（例如是  $n-k$  个）不变因子均为 1，而后面的  $k$  个才是真正含  $\lambda$  的多项式。即有

$$(\lambda I - A) \cong \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \varphi_1(\lambda) & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \varphi_k(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\lambda) | \cdots | \varphi_k(\lambda), \varphi_1(\lambda) \cdots \varphi_k(\lambda) = |\lambda I - A|$$

进一步，还有

**定理 2.12** 如果  $(\lambda I - A)$  的初等因子组为  $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_l(\lambda)$ ，则有



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

而  $C$  仍为属于  $\varphi(\lambda)$  的非减次矩阵, 并称为属于  $\varphi(\lambda)$  的典型非减次型(I)。

证明 首先有

$$\lambda I - C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

考虑  $|\lambda I - C|$ , 把第 2, 3, ...,  $m$  行的  $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1}$  倍均加于第 1 行, 则行列式之值不变, 而有

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \varphi(\lambda) \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

所以  $(\lambda I - C)$  的第  $m$  个行列式因子为  $\varphi(\lambda)$ 。但是  $(\lambda I - C)$  的左下角那个  $m-1$  阶子式为  $(-1)^{m-1}$ , 从而知第  $m-1$  个行列式因子为 1。故  $(\lambda I - C)$  的不变因子必为  $1, \dots, 1, \varphi(\lambda) = |\lambda I - C|$ , 即知  $C$  为属于  $\varphi(\lambda)$  的非减次矩阵。再由  $(\lambda I - A) \cong (\lambda I - C)$  即知  $A \sim C$ 。由于  $C$  是由  $\varphi(\lambda)$ , 从而是由  $A$  所唯一确定的。证毕。

## 2.4 $F(z)$ 上频域理论

在本节中, 将介绍文献<sup>[19]</sup>中频率域结构能控能观的主要判据或定理。尽管系统模型同为  $F(z)$  上的传递函数矩阵, 与第 4 章的频域结构能控能观判据不同,

文献<sup>[19]</sup>的所有结论均是基于零极点抵消理论得出，定理的具体推导或证明过程略过，同时也给出几个实例说明它们的应用。

### 2.4.1. 一般系统

$F(z)$ 上系统  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$  称为有理函数系统 RFS (Rational function system), 其传递函数矩阵表为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{U(s)}{\det(sI - A)} = \frac{Q(s)U^*(s)}{P(s)},$$

其中  $P(s) = \det(sI - A) \in F(z)[s]$ ,  $U(s) = Q(s)U^*(s)$  是环  $F(z)[s]$  上的多项式矩阵,

$Q(s) \in F(z)[s]$  是  $U(s)$  中所有元素的最大公因式。

对于给定的  $\bar{z} \in R^q, U^*(s)$  的所有元素间仍然可能存在公因式, 但这些点的集合的测度为零。因此当实数域上系统已知的零极点抵消理论用于建立结构能控能观性 (简称为 SC-SO) 判据时, 这些判据仅仅取决于  $P(s)$  和  $Q(s)$ , 不依赖于  $U^*(s)$

**定理 2.14** 如果  $P(s) = \det(sI - A)$  与  $Q(s)$  互素, 那么系统是结构能控能观的 (SC-SO), 即  $F(z)$  上能控能观。

证明: 由结构能控能观定义、已知的零极点抵消理论和 2.7.1 节的引理 2, 定理 2.14 可立即获得。

由定理 2.14 意味着如果一个系统仅在具有零测度的子集  $E \subset R^q$  上有零极点抵消, 那么这个系统是结构能控能观。

**定理 2.15** 如果系统是单输入单输出, 那么系统是结构能控能观的 (SC-SO) 当且仅当  $P(s)$  和  $Q(s)$  是互质的。

**例 2.3:** 考虑如图 3.1 所示的电路图, 图中  $u$  是输入电压,  $u_c$  是输出电压, 并且具有状态方程  $\dot{X} = AX + bu, y = \tilde{c}X$ , 其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = (1, 0)$$

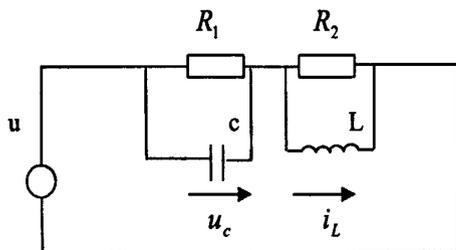


图 3.1 RLC 电路图

令  $z = (R_1, R_2, C, L) \in R^4$ 。显然这个系统是多元有理函数系统。它的传递函数

是  $G(s) = \frac{s + R_2/L}{R_2 C (s^2 + \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2 C} s + 1/LC)}$  显然，在  $F(z)[s]$  上

$$((s + R_2/L), (s^2 + \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2 C} s + 1/LC)) = 1。$$

由定理 2.14 或 2.15 可知这个系统是结构能控能观的 (SC-SO)。

根据多输入多输出系统理论可知，如果相等的极点从它们的传递函数中全部被抵消，那么这个系统不是能控能观的。一个具有性质 1 (参见第 3 章定义 3.1) 的 RFS 在参量空间的几乎任何地方没有非零重特征值，而在原点可能有多重特征值。那么由 SC-SO 定义以及两个多项式互素的充要条件知下面的两个定理显然成立。

**定理 2.16** 对  $F(z)$  上的系统，在  $F(z)[s]$  中存在两个分解  $P(s) = [\phi(s)]^\alpha P^*(s)$  和  $Q(s) = [\phi(s)]^\beta Q^*(s)$ ，这里  $\phi(s)$  和  $P^*(s)$  互素， $\phi(s)$  和  $Q^*(s)$  互素。如果  $1 \leq \alpha \leq \beta$ ，那么系统不是 SC-SO

如果  $f(s) \in F(z)[s]$ ， $f(s) = s^\lambda \phi(s)$  且  $s$  不能整除  $\phi(s)$ ，那么称  $\phi(s)$  为  $f(s)$  的非零部分。

**定理 2.17** 假定系统是具有性质 1 的 RFS，且有  $P(s) = s^\alpha P^*(s)$ ， $Q(s) = s^\beta Q^*(s)$ ，

这里  $P^*(s)$  和  $Q^*(s)$  分别是  $P(s)$  和  $Q(s)$  的非零部分。如果  $1 \leq \alpha \leq \beta$  或  $(P^*(s), Q^*(s)) \neq 1$ ，那么系统不是 SC-SO。

定义 2.11<sup>[34, 35]</sup> 令 RFS 的传递函数矩阵是  $G^*(s) = (G_{ij}(s)), 1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq g$ ， $G_{ij}(s) = N_{ij}(s)/D_{ij}(s)$ ， $N_{ij}(s)$  和  $D_{ij}(s) \in F(z)[s]$ ， $\det(D_{ij}(s)) \geq \det(N_{ij}(s))$ ， $(N_{ij}(s), D_{ij}(s)) = 1$ 。令  $w_h(s) \in F(z)[s]$  是  $G^*(s)$  中阶数小于或等于  $h$  的所有子行列式的最小公分母。

$w(s) = \Delta w_e(s) = w_g(s)$  称为  $G^*(s)$  的特征多项式。

定理 2.18 假定系统是一个 RFS。系统为 SC-SO 当且仅当系统的特征多项式  $P(s) = \det(sI - A)$  等于传递函数矩阵  $G^*(s)$  的特征多项式  $w(s)$ 。

定理 2.19 假定系统是一个具有性质 1 的 RFS，并且  $P(s) = \det(sI - A) = s^\alpha P^*(s)$ ， $Q(s) = s^\beta Q^*(s)$ ， $w(s) = s^\gamma w^*(s)$ ，这里  $w(s)$  是传递函数矩阵  $G^*(s)$  的特征多项式， $P^*(s)$ ， $Q^*(s)$ ， $w^*(s)$  分别是  $P(s)$ ， $Q(s)$ ， $w(s)$  的非零部分。系统是 SC-SO 当且仅当  $(P^*(s), Q^*(s)) = 1$  且  $\alpha = \gamma$ 。

例 2.4 考虑一个多输入多输出的 RFS， $q$  个参量  $z = (z_1, z_2, \dots, z_q)$ ，其状态方程为  $\dot{X} = AX + BU, Y = CX$ ，这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

系统的传递函数是

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)^2(s-4)} \begin{pmatrix} 2 & s-4 \\ s-4 & 0 \end{pmatrix}$$

系统有零极点抵消。因为  $\alpha = 2, \beta = 1, \alpha > \beta$  不满足定理 3 的条件，所以不能确定系统不是 SC-SO。

因为对于任何  $z \in R^q$ ， $\det(T(z)T'(z)) \neq 0$  和  $\det(T'_0(z)T_0(z)) \neq 0$ ，所以这个系统是 SC-SO。

## 2.4.2. 单输入单输出组合系统的结构能控能观

考虑两个单输入单输出 RFS 子系统  $\Sigma_i: \dot{X}_i = A_i X_i + B_i u_i, y_i = C_i X_i + D_i u_i$ 。

$A_i, B_i, C_i$  和  $D_i$  是域  $F(z)$  上的矩阵,  $i=1,2, X_i \in R^n, u_i \in R, y_i \in R, i=1,2$ 。  $\Sigma_i$  的

传递函数是  $G_i(s) = \frac{Q_i(s)}{P_i(s)}$ , 其中  $P_i(s) = \det(sI - A_i), i=1,2$ 。

令  $G_i(s), G_p(s), G_f(s)$  分别是串联, 并联和反馈组合系统  $\Sigma_i, \Sigma_p$  和  $\Sigma_f$  的传递函数。那么有

$$G_i(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P_1(s)P_2(s)}$$

$$G_p(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{Q_1(s)P_2(s) + Q_2(s)P_1(s)}{P_1(s)P_2(s)}$$

$$G_f(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{Q_1(s)P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) + Q_1(s)Q_2(s)}$$

$\Sigma_2$  在反馈路径中。

### 2.4.2.1 一般情况: 子系统具有相同参量

**定理 2.20:**  $\Sigma_i$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_i$  是 SC-SO 且  $(P_i(s), Q_j(s))=1, i, j=1,2, i \neq j$ 。

**定理 2.21:**  $\Sigma_p$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_i$  是 SC-SO 和  $(P_1(s), P_2(s))=1$ 。

**定理 2.22:**  $\Sigma_f$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_i$  是 SC-SO 且  $(Q_1(s), P_2(s))=1$

备注: 很明显, 定理 2.20, 2.21 和 2.22 可用数学归纳法推广到有限数量的 RFS 子系统。考虑一个总的组合系统  $\Sigma, \Sigma$  由  $m$  个 RFS 子系统  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m (m > 3)$  组成。不失一般性, 假定  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  以串联、并联或反馈方式连接, 且将它们组成的系统表为  $\Sigma_{12}$ ; 用  $\Sigma_{123}$  表示由  $\Sigma_{12}$  和  $\Sigma_3$  连接成的系统;  $\dots$ ; 最后,  $\Sigma_{123 \dots m-1}$  和  $\Sigma_m$

连接成  $\Sigma_{123\dots m}$ 。  $\Sigma = \Sigma_{123\dots m}$  是 SC-SO 当且仅当对于每个  $i=1,2,3,\dots,m$ ,  $\Sigma_i$  是 SC-SO, 并且对于每个  $j=1,2,3,\dots,m$ ,  $\Sigma_{123\dots j}$  的传递函数的分子与分母是互素的。

#### 2.4.2.2 子系统有不同参量的情况

从工程的观点看, 一个组合系统通常由两个无负载效应的子系统组成。子系统因此可以认为是独立的, 它们的参量也是独立的。

**引理 2.2:** 令  $R^n$  和  $R^m$  是两个相互独立的参量空间。如果  $f(s) = f(\xi; s) \in F(\xi)[s], \xi \in R^n; g(s) = g(\eta; s) \in F(\eta)[s], \eta \in R^m$ ; 那么  $f(s)$  和  $g(s)$  的最大公因式是一个系数是实数的  $s$  的多项式。

由引理 2.2 和两个 RFS 子系统  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的参量是独立的假设, 定理 2.20—2.22 的条件具有更简单的形式。组合系统是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_i (i=1,2)$  是 SC—SO 且组合系统的传递函数的分母和分子没有系数都是实数的  $s$  的多项式公因式。

对于两个具有性质 2 (参见第 3 章定义 3.1) 的子系统组成的组合系统的结构性质有以下定理。

**定理 2.23:** 令  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是有性质 2 的两个 RFS 子系统, 它们的参量是互相独立的。串联组合系统  $\Sigma_i$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是 SC-SO 并且  $P_i(0) = 0$  和  $Q_j(0) = 0$  不同时成立, 这里  $i \neq j, i, j = 1, 2$ 。

定理 2.23 说明如果每个子系统都是 SC-SO (一般地, 这种假设是能够满足的), 那么由两个具有性质 2 的 RFS 子系统串联而成的组合系统是 SC-SO 的唯一的条件是当  $i \neq j$  时,  $G_i(s)$  和  $G_j(s)$  之间不存在在原点的零极抵消 ( $G_i(s) (i=1,2)$  是否有在原点的零点或极点是很容易检查的), 所以不必考虑  $P_i^*(s)$  和  $Q_j^*(s)$  的互素问题, 这里  $P_i^*(s)$  和  $Q_j^*(s)$  分别是  $P_i(s)$  和  $Q_j(s)$  的非零部分,  $i \neq j, i, j = 1, 2$ 。因此当两个 RFS 子系统具有性质 2 且 SC-SO 时, 判据的条件明显减化了。

**例 2.5:** 考虑一个有两个子系统  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的串联组合系统  $\Sigma$ , 这里

$$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 z_1 \\ z_3 z_2 & z_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 a_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = (1 \ 0)$$

$i=1,2; a_1, a_2, a_3, z_1, z_2, z_3$  是六个独立变量,  $\Sigma_i$  是 SC-SO;

$$G_1(s) = \frac{s - z_2}{s^3 - (z_1 + z_2)s + z_1 z_2 (1 - z_3^2)}, \quad G_2(s) = \frac{s - a_2}{s^2 - (a_1 + a_2)s + (a_1 - a_3)a_2}.$$

检查  $\Sigma$  是否 SC-SO。

检查系统  $\Sigma_i$  得知  $\Sigma_i$  具有性质 2。很明显,  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的参量是相互独立的。

因为  $\Sigma_i$  是 SC-SO, 故只需考虑在原点的零点和极点。因为在原点  $G_i(s) (i=1,2)$  没有零点和极点, 因此在原点不可能有零极抵消。因此由定理 2.23 可知  $\Sigma$  是 SC-SO。很明显, 这个方法是简捷的。

对于没有性质 2 的 RFS 的子系统来说, 定理 2.23 不成立, 但定理 2.20 仍然成立。然而检查  $(P_i^*(s), Q_i^*(s))=1$  是否成立比较困难, 特别是当  $\deg(P_i^*(s))$  和  $\deg(Q_i^*(s))$  是 3 或者更大时。考虑两个没有性质 2 的 RFS 子系统

$\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_i$  是 SC-SO,  $i=1,2$ 。  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的传递函数是

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + (c_1 + 3)s^2 + (c_2 + 3c_1)s + 3c_2}, \quad G_2(s) = \frac{a_3(s + a_2)}{s^3 + (a_1 + 1)s^2 + (a_1 a_2 + a_1)s + a_1 a_2},$$

$a_1, a_2, a_3, c_1, c_2$  是 5 个独立参量。检查  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的串联组合系统  $\Sigma_i$  是否是 SC-SO。虽然在原点  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  没有零极点抵消, 但  $(Q_1(s), P_2(s)) = (s+1)$ , 根据定理 3.20 知  $\Sigma_i$  不是 SC-SO。求  $Q_1(s)$  和  $P_2(s)$  的最大公因  $\gcd(s+1)$  依然是费事的。

从设计的观点看用两个具有性质 2 的 SC-SO 子系统设计一个 SC-SO 串联系统是容易的, 因为它只要求设计者避免在原点的零极抵消。

**定理 2.24:** 令  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是两个有性质 2 的子系统, 它们的参量是互相独立的。

那么  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的并联组合系统  $\Sigma_p$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是 SC-SO 且  $P_1(0)=0$  和  $P_2(0)=0$  不同时成立。

**定理 2.25:** 令  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是具有性质 2 的两个 RFS 子系统, 它们的参量是相互

独立的。那么  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的反馈组合系统  $\Sigma_f$  是 SC-SO 当且仅当  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是 SC-SO 且  $P_2(0) = 0$  和  $Q_1(0) = 0$  不同时成立。

由两个具有性质 2 的子系统串联（或并联）组合而成的系统的特征多项式是  $\det(sI - A) = \det(sI - A_1)\det(sI - A_2) = P_1(s)P_2(s)$ ，因此组合系统也有性质 2。应用数学归纳法定理 2.23 和 2.24 可以推广到有限数量的具有性质 2 的 RFS 子系统。而定理 2.25 一般不能推广：虽然每个  $P_i(s)$  具有性质 2 ( $i = 1, 2$ )，而反馈系统  $\Sigma_f$  不具有性质 2。例如，每个  $\Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是一个 SC-SO 的 RFS 子系统，它的传递函数是  $G_i(s) = 1/s$ ， $\Sigma_i$  是一个不显含独立参量的 RFS 子系统。因为  $P_i(s)$  的根不可能是任何非零常数，故  $\Sigma_i$  具有性质 2。 $\Sigma_f$  的传递函数求得是

$G_f(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ ，并且非零常数  $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$  是  $P_f(s)$  的根。因此  $\Sigma_f$  不具有性质

2。

例 2.6: 考虑一个如图 3.2 所示的伺服控制系统， $\theta_r$  和  $\theta_c$  分别是系统的输入输出。

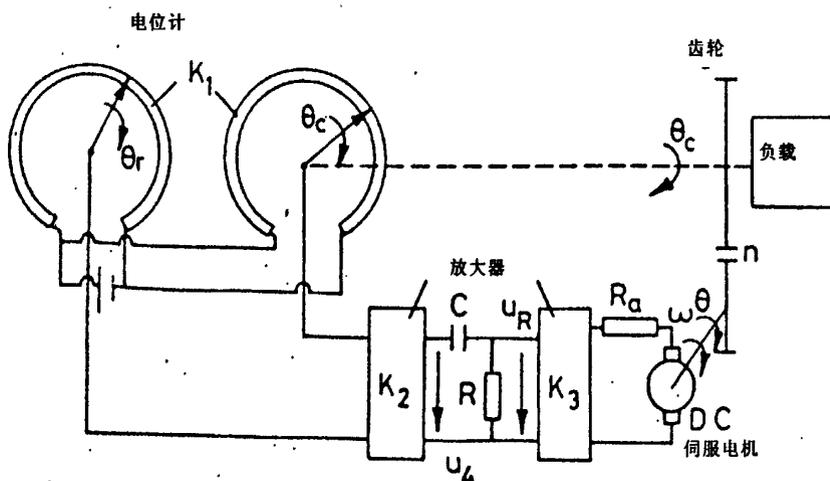


图 3.2 伺服控制系统

忽略电动机和齿轮的非线性，这个系统可以看成包含三个子系统的组合系统，三个子系统是：具有输入  $\Delta\theta = \theta_r - \theta_c$  和输出  $u_R$  的  $\Sigma_1$ ；具有输入  $u_R$  和输出  $\theta_c$

的  $\Sigma_2$  和 在反馈路径上的具有输入  $\theta_c$  和输出  $\theta_c$  的  $\Sigma_3$ 。选择如图 3 所示的  $u_c, \omega$  和  $\theta$  为状态变量。那么

$$\Sigma_1: \dot{u}_c = -a_0^{(1)}u_c + a_0^{(1)}d_1\Delta\theta, \quad u_R = -u_c + d_1\Delta\theta,$$

其中 
$$a_0^{(1)} = \frac{1}{RC}, d_1 = k_1k_2, a_0^{(1)}d_1 = \frac{k_1k_2}{RC}.$$

$$\Sigma_2: \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0^{(2)} \end{pmatrix} u_R, \quad \theta_c = (n, 0) \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix},$$

其中 
$$a_1^{(2)} = \frac{f_m R_a + k_b C_m}{J_m R_a}, b_0^{(2)} = \frac{k_3 C_m}{J_m R_a}.$$

$$\Sigma_3: \theta_c = \theta_c$$

$\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$  的参量显然是相互独立的。令  $z^{(1)} = (C, R, k_1, k_2) \in R^4$  和  $z^{(2)} = (J_m, R_a, f_m, k_b, C_m, k_3, n) \in R^7$ ,  $\Sigma_3$  没有物理参量。那么这个总的系统  $\Sigma$  有 11 个参量  $z = (z^{(1)}, z^{(2)}) \in R^{11}$ 。很明显  $\Sigma_3$  是 SC-SO。因为

$$G_1(s) = \frac{d_1 s}{s + a_0^{(1)}}, G_2(s) = \frac{b_0^{(2)} n}{s(s + d_1^{(2)})}, \text{所以}$$

$(P_i(s), Q_i(s)) = 1 (i = 1, 2)$ , 即  $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 是SC-SO。因为  $\Sigma_i (i = 1, 2)$  的储能元件的初始条件是独立的, 所以  $\Sigma_i$  具有性质 2。因此串联组合系统  $\Sigma_{12}$  的SC-SO 仅仅取决于在原点的零点和极点。但是  $P_2(0) = Q_1(0) = 0$ , 因此  $\Sigma_{12}$  不是SC-SO。由定理 2.23 可知  $\Sigma$  不是SC-SO。

因为在原点存在抵消, 所以总的组合系统是临界不稳定的。只有当  $\Sigma$  的物理结构改变时 (例如  $\Sigma_1$  变成如图 3.3 所示的结构时),  $\Sigma$  才可能成为稳定的。

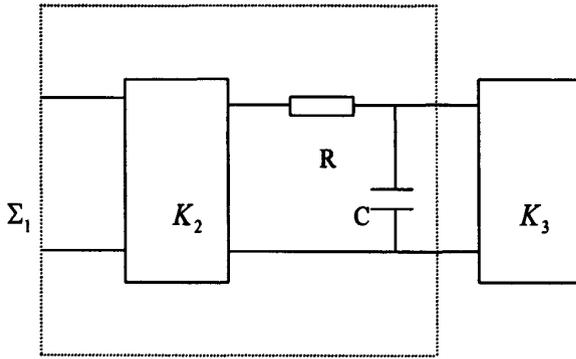


图 3.3 新的稳定的网络结构

## 2.5 本章小结

$F(z)$  上的矩阵和数域上的矩阵一样, 可以在矩阵的元所在域上做初等变换。与数域上的关于  $\lambda$  的多项式不同的是  $F(z)$  上  $\lambda$  的不可约多项式的次数可以任意大。  $F(z)$  上  $\lambda$  的多项式的系数的独立性与其不可约是有关的。  $F(z)$  上的多项式矩阵具有唯一的史密斯形和非减次形矩阵。

对于由单输入单输出子系统构成的频域的串、并联系统, 定理 2.23—2.25 表明如果组合系统的子系统是 SC-SO, 而它不是 SC-SO, 那么它的传递函数在原点存在零极点抵消。这样的组合系统是结构上临界不稳定的, 不能工作。这意味着在这样的组合系统中, SC-SO 和稳定之间存在着直接明显的联系。

### 第 3 章 1-型矩阵的两种性质及应用

为了研究结构性性质例如结构能控性，文献<sup>[20]</sup>提出和利用了一类有理函数矩阵具有如下的形式：

$$A = a_{ij} = (C + V)^{-1}U,$$

其中  $C = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ， $V$  和  $U$  是两个  $F(z_{n+1}, \dots, z_q)$  上的  $n \times n$  矩阵， $F(z_{n+1}, \dots, z_q)$  表示  $z_{n+1}, \dots, z_q$  上的有理函数域， $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_q$  是  $q$  个独立参量。因为  $C = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  且  $V$  不包含  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ，所以  $\det(C + V)$  是  $z_1, z_2, \dots, z_n$  上的  $n$  次多项式，且它的最高次数项是  $z_1 z_2 \dots z_n$ 。设  $g_{ij} = \bar{g}_{ij} / \det(C + V)$  是  $(C + V)^{-1}$  的任意的非零部分。 $\bar{g}_{ij}$  也是  $z_1, z_2, \dots, z_n$  上的  $n$  次多项式，且有  $\deg(\bar{g}_{ij}) < n$ 。所以  $(C + V)^{-1}$  和  $(C + V)^{-1}U$  ( $U$  不包含  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ) 没有非零的常数元。文献<sup>[20]</sup>用这类矩阵描述和研究了一类线性物理系统（电网络）的一些结构性性质（可约性，可断性和结构能控能观性）。但是由于  $(C + V)^{-1}U$  的每个元都不是非零常数，由  $(C + V)^{-1}U$  描述的线性物理系统是有限。例如，在一个伺服系统里，位移（角位移）和速度（角速度）都是状态变量，那么系数矩阵  $A$  有一个非零的常数元为 1（见例 3.2）。为消除此类困难，本章定义了 1-型矩阵  $A = (a_{ij})$ ，当  $i < j$  时， $a_{ij}$  是一个常数或  $a_{ij} = a'_{ij} z_i$ ，当  $i \geq j$  时。

#### 3.1 两种性质和 1-型矩阵

定义 3.1<sup>[19]</sup> 令  $A$  是  $F(z)$  上的  $n \times n$  矩阵。那么它的特征多项式为  $\det(\lambda I - A) \in F(z)[\lambda]$ ，如果  $m^*\{z \in R^q \mid \det(\lambda I - A) = 0 \text{ 有非零重根}\} = 0$ ，称矩阵  $A$  具有性质 1；如果  $m^*\{z \in R^q \mid \det(rI - A) = 0\} = 0$ ，称矩阵  $A$  具有性质 2；其中  $r$  是一个非零常量， $m^*\{\dots\} = 0$  表示点集  $\{\dots\}$  的勒贝格测度为零。

性质 1 表明对几乎所有的  $z \in R^q$  矩阵  $A$  的非零特征值的重数为 1, 即  $A$  矩阵没有非零的重根。性质 2 表明对几乎所有的  $z \in R^q$  非零常数  $r$  不是  $A$  的特征值, 即  $A$  矩阵没有非零的常复数根。

物理系统特征根的模式是可以有重根的。例如有质量的质点运动的牛顿第二定律  $m\ddot{y} = f$  是一个简单的系统, 这里  $m$  为质点质量,  $y$  为位移,  $f$  是作用于质点的外力的合力。令  $y = x_1, \dot{y} = x_2$ , 那么有状态方程  $\dot{x} = Ax + Bf$ , 其中  $x = (x_1, x_2)'$ ,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}$ 。故  $\det(\lambda I - A) = \lambda^2$  有两重零根。如果设  $\dot{y} = x_1$  那么有状态方

程  $\dot{x} = Ax + Bf$ , 其中  $x = (x_1, x_2, x_3)'$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \end{pmatrix}$ ,  $f$  是  $f$  的变化率。系

统不增加独立参量(还是一个参量  $m$ )却增加了零根的重数, 这是因为零模式与参量无关( $A$  不含参量)。但是物理系统的非零模式不能有非零重因式, 应具有性质 1, 否则系统非零模式的维数因为非零重因式的重数在数学上可任意大而造成系统非零模式的维数可任意大却不需要新增加任何物理元件(仅需一个非零因式里的那些元件参量), 从数学逻辑(理论)讲这是很合理自然的, 但从物理系统结构(可实现性)讲这是不可能的。

线性物理系统具有性质 2 的物理理由是显然的: 因为研究的对象是动态系统, 所以系统的特征根不是一个纯数, 而是有物理量纲(常常是秒分之一)。因此系统的非零根只能是系统独立物理参量的非零常数的函数。

所有物理参量都视为独立参量的线性物理系统(如线性电网络)应该具有这两个基本性质, 但是如果物理系统的部分独立参量被固定为常数时和/或存在数学约束时就可能不具有这两性质。从数学的观点看  $F(z)$  上的方阵一般都不具有两种性质, 即特征多项式具有重因式(包括非零重因式和非零常数特征根的重因式)的矩阵才是  $F(z)$  上方阵的一般情况, 但从物理的观点上看具有两种性质的系统确是普遍情况。

定义 3.2 称  $n \times n$  矩阵  $A = a_{ij}$  包含  $q$  个独立参量  $z_1, \dots, z_i, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_q$  为 1-型矩阵如果当  $i < j$ ,  $a_{ij}$  是一个常数或  $a_{ij} = a'_{ij}z_i$ , 当  $i \geq j$ ,  $a_{ij} = a'_{ij}z_i$ , 这里  $a'_{ij} = a'_{ij}(z_{n+1}, \dots, z_q)$  是  $z_{n+1}, \dots, z_q$  上的有理函数当  $i < j$  和  $i \geq j$ 。

线性系统的很多重要性质如稳定性和能控性都取决于他们的特征多项式。由于性质 1 和 2 都是  $F(z)[\lambda]$  上的  $\det(\lambda I - A)$  的性质, 它们在结构能控性上有重

要的应用(参看第2章的2.4节和<sup>[22]</sup>)。尽管1-型矩阵只是一类有理函数矩阵但它描述大多数的线性物理系统(参看例子3.1和3.2)。因此有必要证明1-型矩阵的性质1和2来分析线性物理系统的结构能控和能观性。工程上应用的线性系统即是物理系统,因此从物理的观点来看这种研究具有一定的意义。

另外,在第1.1节中总结了在结构性质的研究历史中,学者曾引入结构矩阵<sup>[4]</sup>、一次多项式矩阵<sup>[15-16]</sup>、列结构矩阵<sup>[14]</sup>和混和矩阵<sup>[17]</sup>。根据它们的定义,结构矩阵和列结构矩阵都不包含任何非零的常数元,但1-型矩阵包含。1-型矩阵可能不是独立参量的一次多项式矩阵,但它一定是有理函数矩阵。最后1-型矩阵也不是混和矩阵。

$$\text{例如, 考虑一个 1-型矩阵 } A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} (z_3+1)z_1 & 8 \\ \frac{z_5+z_6}{z_3+2}z_2 & \frac{z_3+3z_5}{z_4+9}z_2 \end{pmatrix}.$$

由于1-型矩阵 $A$ 含有一个元 $a_{12}=8$ 是非零的常数, $A$ 不是结构矩阵、列结构矩阵或者 $(C+V)^{-1}U$ 。元 $a_{11}$ ,  $a_{21}$ 和 $a_{22}$ 是独立参量 $z_1, z_2, \dots, z_6$ 的有理函数,不是 $z_1, z_2, \dots, z_6$ 的一次多项式,所以 $A$ 也不是一次多项式矩阵。 $A$ 不可能写成 $A=T+G$ ,其中 $T$ 的每个元都在 $G$ 的元所属的域上独立,因此也不是混和矩阵。

### 3.2 若干引理

在证明1-型矩阵的两个性质之前需要一些引理。

令 $R$ 表示所有的实数域, $R[z_1, \dots, z_q]$ 表示 $q$ 个参量 $z_1, z_2, \dots, z_q$ 的实系数多项式的环。 $R[z_1, \dots, z_q]$ 可以简写为 $R_z$ 或 $R[z]$ ,这里 $z=(z_1, \dots, z_q)$ 。令 $R_z[\lambda]$ 表示 $\lambda$ 的 $R_z$ 系数多项式的环。在代数理论上有以下引理成立。

**引理 3.1** 如果 $R_z[\lambda]$ 上的多项式 $P(\lambda)$ 可以在 $F(z)[\lambda]$ 上分解,那么 $P(\lambda)$ 可以在 $R_z[\lambda]$ 上分解。

令 $P(\lambda)$ 是 $F(z)[\lambda]$ 上的 $n$ 次多项式。如果 $P(\lambda)=\lambda^m\varphi(\lambda)$ ,  $0 \leq m < n$ ,  $(\lambda, \varphi(\lambda))=1$ ,  $\varphi(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)\dots\varphi_s(\lambda)$ ,  $\varphi_j(\lambda) \in F(z)[\lambda]$ ,  $\deg \varphi_j(\lambda) \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq s$ , 那么称 $\varphi(\lambda)$ 是 $P(\lambda)$ 的非零部分,  $\varphi_j(\lambda)$ 是非零因子。如果 $\varphi_1(\lambda)=\varphi_2(\lambda)$ , 那么称 $\varphi_1(\lambda)$ 和 $\varphi_2(\lambda)$ 是非零重因子。

引理 3.2 如果  $P(\lambda)$  是  $F(z)[\lambda]$  上的不可约多项式 (也就是说在  $F(z)[\lambda]$  上不能分解), 那么  $m^*\{z \in R^q \mid P(\lambda)=0 \text{ 有重根}\}=0$ 。

证明 因为  $P(\lambda)$  不可约,  $P(\lambda)$  在  $F(z)[\lambda]$  上没有重因式。那么  $(P(\lambda), \dot{P}(\lambda))=1$ , 其中  $\dot{P}(\lambda) \in F(z)[\lambda]$  表示  $P(\lambda)$  的导数。由文献<sup>[19]</sup>的引理 2 知  $m^*\{z \in R^q \mid (P(\lambda), \dot{P}(\lambda)) \neq 1\}=0$ , 这就意味着  $m^*\{z \in R^q \mid P(\lambda)=0 \text{ 有重根}\}=0$ 。

引理 3.3 设  $P(\lambda) \in F(z)[\lambda]$ 。  $P(\lambda)$  在  $F(z)[\lambda]$  上没有重因式当且仅当  $m^*\{z \in R^q \mid P(\lambda)=0 \text{ 有重根}\}=0$ 。

证明 充分性是显然的。只需证必要性。因为  $P(\lambda)$  没有重因式, 设  $P(\lambda)$  不可约, 那么由引理 3.2 知必要性成立。设  $P(\lambda)=\phi_1(\lambda)\cdots\phi_h(\lambda)$ , 其中  $h \geq 2$ ,  $\deg(\phi_j(\lambda)) \geq 1$ ,  $\phi_j(\lambda) \in F(z)[\lambda]$  不可约, 且有  $(\phi_i(\lambda), \phi_j(\lambda))=1, i \neq j, 1 \leq i, j \leq h$ 。由文献<sup>[19]</sup>的引理 2 知  $m^*\{z \in R^q \mid (\phi_i(\lambda), \phi_j(\lambda)) \neq 1\}=0$ , 这意味着  $m^*\{z \in R^q \mid P(\lambda)=0 \text{ 有重根}\}=0$ 。

引理 3.4 (i)  $m^*\{z \in R^q \mid \det(\lambda I - A) = 0 \text{ 有非零重根}\} = 0$  当且仅当  $\det(\lambda I - A)$  在  $F(z)[\lambda]$  上有非零的重因式; (ii)  $m^*\{z \in R^q \mid \det(rI - A) = 0\} = 0$  当且仅当  $\det(rI - A)$  是  $F(z)$  上的非零成员, 其中  $r$  是非零常数。

证明 (i) 显然, 这是引理 3.3 的特殊情况。(ii) 必要性, 如果  $\det(rI - A)$  是  $F(z)$  上的零成员, 那么  $m^*\{z \in R^q \mid \det(rI - A) = 0\} \neq 0$ 。充分性, 如果  $\det(rI - A)$  是  $F(z)$  上的非零成员, 那么  $m^*\{z \in R^q \mid \det(rI - A) = 0\} = 0$ 。

根据引理 3.4, 如果  $\det(\lambda I - A)$  在  $F(z)[\lambda]$  上没有非零的重因式, 可以说矩阵  $A$  具有性质 1; 如果  $\det(rI - A)$  是  $F(z)$  上的非零元, 其中  $r$  是非零常数, 矩阵  $A$  具有性质 2。

### 3.3 1-型矩阵的两种性质

定理 3.1 考虑  $\lambda$  的多项式  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^{n-k} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ , 其中系数  $a_k = a_k(z)$  是  $q$  个参数  $z_1, z_2, \dots, z_q$  的多项式, 在  $a_k(z)$  中没有非零的常数项,  $1 \leq k \leq n$ . 那么  $P(r)$  是  $F(z)$  的非零元, 其中  $r$  是非零常数。

证明 i) 如果  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ,  $P(r) = r^n$ , 任何非零的常数都不是它的根。

ii) 设  $P(\lambda) = \lambda^m \phi(\lambda)$ , 其中  $\phi(\lambda) = \lambda^{n-m} + a_1\lambda^{n-m-1} + \dots + a_{n-m}$ ,  $a_{n-m} \neq 0$ ,  $0 \leq m < n$ . 那么  $P(r) = r^m \phi(r) = r^m (r^{n-m} + a_1 r^{n-m-1} + \dots + a_{n-m})$ . 因为  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  不包含任何的非零常数项,  $a_1 r^{n-m-1} + \dots + a_{n-m}$  不是非零的常数。因为  $r^{n-m}$  是非零的常数但是  $a_1 r^{n-m-1} + a_2 r^{n-m-2} + \dots + a_{n-m+1} r + a_{n-m}$  不是一个常数, 所以  $P(r) = r^m \phi(r) \neq 0$ 。

定理 3.2 考虑  $\lambda$  的多项式  $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^{n-k} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ , 其中系数  $a_k = a_k(z)$ ,  $1 \leq k \leq n$  是  $q$  个参量  $z_1, \dots, z_q$  的多项式。如果  $a_k$  的任意项  $b_r z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_q^{r_q}$  满足  $r_i \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i \leq q$ ,  $\sum_{i=1}^q r_i \geq 1$ , 且  $b_r$  是包括零的常数, 那么  $P(\lambda)$  在  $F(z)[\lambda]$  上没有非零重因式。

证明 i) 如果  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ,  $P(\lambda) = \lambda^n$ , 定理成立。

ii) 设  $P(\lambda) = \lambda^m \phi(\lambda)$ , 其中  $\phi(\lambda) = \lambda^{n-m} + a_1\lambda^{n-m-1} + \dots + a_{n-m}$ ,  $a_{n-m} \neq 0$ ,  $0 \leq m < n$ ,  $\phi(\lambda)$  是  $P(\lambda)$  的非零成员。如果  $\phi(\lambda)$  不可约, 定理成立。如果  $\phi(\lambda)$  是  $F(z)[\lambda]$  上的可约多项式, 由引理 1 知  $F(z)[\lambda]$  在  $R_z(\lambda)$  上可约。设  $\phi(\lambda) = \phi_1(\lambda) \dots \phi_h(\lambda)$ , 其中  $2 \leq h \leq n-m$ ,  $\phi_j(\lambda) \in R_z[\lambda]$  不可约,  $1 \leq j \leq h$ 。因为  $\phi(\lambda)$  的首系数是 1,  $\phi_j(\lambda)$  的

首系数为非零常数。显然由假设  $1 \leq r_1 + r_2 + \dots + r_q$  知  $a_k(z)$  没有非零的常数项。所以不可能  $\phi_j(\lambda)$  的每个系数都是常数。相反地, 设  $\phi(\lambda)$  有非零的重因式。那么至少存在两个整数  $i, j, 1 \leq i, j \leq h, i \neq j$  使得  $\phi_i(\lambda) = \phi_j(\lambda)$ , 意味着  $P(\lambda)$  至少有一个非零的系数  $a_k(z), 1 \leq k \leq n$ , 至少包含一项不满足  $r_i \in \{0, 1\}$ 。与假设矛盾。

引理 3.5 设  $n \times n$  的矩阵  $A = (a_{ij})$  满足当  $i < j$  时,  $a_{ij}$  为常数或者  $a_{ij} = a'_{ij} z_i$ , 当  $i \geq j$  时,  $a_{ij} = a'_{ij} z_i$ , 其中  $a'_{ij}$  是非零的常数,  $z_1, \dots, z_n$  是  $n$  个参量 ( $q = n$ )。那么它的特征多项式  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$  中, 系数  $a_k = \sum b_{i_1 i_2 \dots i_k} z_{i_1}^{r_{i_1}} z_{i_2}^{r_{i_2}} \dots z_{i_k}^{r_{i_k}}$ , 其中  $1 \leq k \leq n$ ,  $i_j \in \{1, \dots, n\}, i_j \neq i_h (j \neq h), 1 \leq j, h \leq k, b_{i_1 i_2 \dots i_k}$  是常数,  $r_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq k, \sum_{j=1}^k r_j \geq 1$ 。

证明 已知  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k D_k \lambda^{n-k}$ , 其中  $D_k$  是  $A$  的  $k$  阶子式的和,

$1 \leq k \leq n$ ;  $D_k$  的每个  $k$  阶子式可表示为

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix} = \sum (\pm a_{i_1 s_1} a_{i_2 s_2} \dots a_{i_k s_k}),$$

其中  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ;  $s_1, s_2, \dots, s_k$  是  $i_1, i_2, \dots, i_k$  的排列变换;  $\pm a_{i_1 s_1} a_{i_2 s_2} \dots a_{i_k s_k}$  是展开行列式的一项。显然, 它的每一项包括零和非零项至少有一个因子  $a_{i_u s_u}$  使得  $i_u \geq s_u, 1 \leq u \leq k$ 。因为  $a_{i_j i_h} = a'_{i_j i_h} z_{i_j} (i_j \geq i_h)$  且当  $i_j < i_h, a_{i_j i_h}$  是常数或  $a_{i_j i_h} = a'_{i_j i_h} z_{i_j}$ , 所以结论显然成立。

显然引理 3.5 的系数  $a_k$  不包含任何的非零常数项。由定理 3.1、3.2 和引理 3.5 知, 定理 3.3 立即成立。

定理 3.3 引理 3.5 中  $n$  个参数  $z_1, \dots, z_n (q=n)$  的  $n \times n$  的矩阵  $A$  具有性质 1 和性质 2。

定理 3.4  $q$  个参数  $z_1, \dots, z_q (q > n)$  的  $n \times n$  的 1-型矩阵  $A$  具有性质 1 和性质 2。

证明 任意的取  $(z_{n+1}, \dots, z_q) = (z_{n+1}^*, \dots, z_q^*)$  为常数向量, 定理 3.3 成立。这表示定理 3.4 也成立。

许多矩阵具有性质 1 和性质 2。文献<sup>[36]</sup>中得出结论: 如果混合矩阵有在子域  $K$  上降秩的特征值, 那么它是单根, 这与性质 1 类似。又结构矩阵和列结构矩阵具有性质 1, 也不难证明他们满足性质 2。矩阵  $(C+V)^{-1}U$  也具有两种性质。1-型矩阵满足两种性质且可以描述大多数的线性物理系统。那么可以提出疑问: 任何的线性物理系统都满足这两种性质吗 (如果它的物理参数都被认为是独立的参量)? 这两种性质是否只取决于线性物理系统的结构?

### 3.4 多元有理函数域上系统的一些能控判据

本节介绍了文献<sup>[22]</sup>中的多元有理函数域上系统的一些结构能控判据, 这些判据的研究对象限于时间域模型 (即状态方程和输出方程)。这些判据可用来对 1-型矩阵系统的做结构性质的判定。

考虑多元有理函数域上的线性系统  $\dot{X} = AX + BU, Y = CX + DU,$

$T = (B, AB, \dots, A^{n-1}B), T_0 = (C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T)^T$  分别是它的能控和能观矩阵。因为他们都在  $z$  上独立,  $T$  和  $T_0$  可以表示为  $T(z)$  和  $T_0(z)$ 。设

$$N_1 = \{z \in R^q \mid \det(T(z)T^T(z)) = 0\}, N_2 = \{z \in R^q \mid \det(T_0^T(z)T_0(z)) = 0\}$$

设  $S$  为点集,  $m^*S$  表示点集  $S$  的勒贝格测度。文献<sup>[19]</sup>中有如下两个定义和一个引理。定义: 如果  $m^*N_1 = 0$  那么系统结构能控的; 否则不是结构能控的。如果  $m^*N_2 = 0$  那么系统是结构能观的; 否则不是结构能观的。

定义: 因为  $T(z)$  和  $T_0(z)$  是  $F(z)$  上的两个矩阵, 且有  $\det(T(z)T^T(z)) \in F(z)$  和  $\det(T_0^T(z)T_0(z)) \in F(z)$ 。那么如果  $\det(T(z)T^T(z))$  是  $F(z)$  上的非零元 (即  $T(z)$  有  $n$  列在  $F(z)$  上线性独立) 则 RFS (1.1)  $F(z)$  上能控; 否则为  $F(z)$  上不能控。如果  $\det(T_0^T(z)T_0(z))$  是  $F(z)$  上的非零元则 RFS 在  $F(z)$  上能观; 否则为  $F(z)$  上不能观。

引理: 设  $f(z) \in F(z)$ 。如果  $f(z)$  是  $F(z)$  的零元 (即  $f(z) = 0$ )，那么对所有的  $z \in R^q$  都有  $f(z) = 0$ ；如果  $f(z)$  是  $F(z)$  的非零元 (即  $f(z) \neq 0$ )，那么  $m^* \{z \in R^q | f(z) = 0\} = 0$ 。

由以上定义和引理知系统的结构能控性 (结构能观性) 与  $F(z)$  上的能控性 (能观性) 是等价的。

设  $M$  是  $F(z)$  上的  $n \times n$  矩阵。 $M$  在  $F(z)$  上是可约的或者  $M$  是  $F(z)$  上的可约矩阵如果存在  $F(z)$  上的非奇异矩阵  $P$  使得

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_{21} & M_2 \end{pmatrix}$$

其中  $M_i$  是  $n_i \times n_i$  的矩阵,  $i = 1, 2, 1 \leq n_i < n$ ；否则  $M$  在  $F(z)$  上是不可约的或者  $M$  是  $F(z)$  上的不可约矩阵 (为简约  $F(z)$  上常省略掉)。

定理 3.5 设  $A$  是  $F(z)$  上的  $n \times n$  矩阵, 当且仅当  $A$  不可约时, 对任意的非零的  $n \times m$   $F(z)$  上矩阵  $B$  都有系统  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控。

尽管检查  $F(z)$  上的任意的  $n \times n$  矩阵的不可约性是个复杂的问题 ( $n > 3$ )，定理 3.5 可以应用在大多数的系统理论研究上例如电网络。文献<sup>[37-38]</sup>证明了实际的不可断的 RLC 网络的等价网络的系数矩阵  $A$  是  $F(z)$  上不可约的。所以由定理 3.5 知当且仅当  $B \neq 0$  时电网络能控。

定理 3.6 设  $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ ,  $B = (B_1^T, B_2^T)^T$ , 其中  $A_i$ 、 $B_i$  分别是  $F(z)$  上的  $n_i \times n_i$ 、 $n_i \times m$  的矩阵,  $i = 1, 2$ , 多项式  $\det(\lambda I - A_1)$  和  $\det(\lambda I - A_2)$  互素。当且仅当  $(A_i, B_i)$  在  $F(z)$  上能控,  $i = 1, 2$ ,  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控。

推论 3.1 考虑  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ ,  $B = (B_1^T, \dots, B_k^T)^T$ , 其中  $A_i$  和  $B_i$  分别是  $F(z)$  上的  $n_i \times n_i$  和  $n_i \times m$  矩阵,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\det(\lambda I - A_i)$  和  $\det(\lambda I - A_j)$ ,  $i \neq j$  互素。

那么  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控当且仅当  $(A_i, B_i)$  在  $F(z)$  上能控,  $i=1, \dots, k$ 。

如果矩阵的特征值为零那么说这个矩阵是幂零矩阵。

定理 3.7 设  $n \times n$  的矩阵  $A$  具有性质 1,  $B$  是  $F(z)$  上的  $n \times m$  矩阵。那么存在  $F(z)$  上的不可逆的矩阵  $P$  使得  $PAP^{-1} = \text{diag}(A_0, A_1, \dots, A_k)$ ,  $PB = (B_0^T, B_1^T, \dots, B_k^T)^T$ , 其中  $A_0$  是  $n_0 \times n_0$  的幂零矩阵,  $A_i (1 \leq i \leq k)$  是  $F(z)$  上的  $n_i \times n_i$  不可约矩阵,  $B_i (0 \leq i \leq k)$  是  $F(z)$  上  $n_i \times m$  的矩阵,  $n = n_0 + n_1 + \dots + n_k$ 。那么当且仅当  $(A_0, B_0)$  能控时,  $(A, B)$  能控,  $B_i \neq 0, 1 \leq i \leq k$ 。

由对偶性容易得知  $F(z)$  上能观性的结果。

定理 3.7 具有实际意义: 如果线性物理系统的物理参数是数学上的独立变量则它具有性质 1。

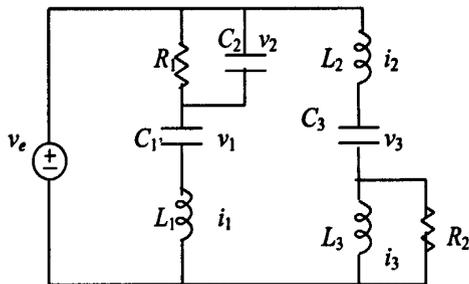


图 3.1 RLC 电网络

### 3.5 结构能控性判据的应用

例 3.1 考虑图 3.1 所示的 RLC 电网络, 状态方程为  $\dot{X} = AX + Bv_e$ , 其中

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, v_e \text{ 是电压源的电压, } A = \text{diag}(A_1, A_2),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1^{-1} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{-1}{C_2 R_1} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_3} & 0 \\ \frac{-1}{L_2} & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_2} \\ 0 & \frac{R_2}{L_3} & \frac{-R_2}{L_3} \end{pmatrix}.$$

因为实际当中电容、电感和电阻的参量值都是单独确定的，所以有理由认为它们是独立的参量。设  $z = (z_1, \dots, z_8) = (C_1^{-1}, C_2^{-1}, L_1^{-1}, C_3^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, R_1, R_2)$ ，那么有

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & -z_7^{-1} z_2 & z_2 \\ -z_3 & -z_3 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & z_4 & 0 \\ -z_5 & -z_8 z_5 & z_8 z_5 \\ 0 & z_8 z_6 & -z_8 z_6 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

显然， $A = \text{diag}(A_1, A_2)$  和  $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$  是  $F(z)$  上的矩阵，且由定义知  $A$  是 1-型矩阵。

所以  $A$  具有性质 1 和性质 2。显然  $\det(\lambda I - A_i)$  是  $F(z)[\lambda](i=1,2)$  上的不可约多项式。因此  $A_1$  和  $A_2$  是  $F(z)$  上的不可约矩阵。因为  $A$  是具有性质 1 的 1-型矩阵， $A_i$  在  $F(z)$  上不可约且  $B_i \neq 0 (i=1,2)$ ，由定理 3.7 知  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控（即结构能控）。

例 3.2 考虑如图 3.2 所示的两个伺服系统，其中  $\theta$  是单输入， $\theta_1$  和  $\theta_2$  是两个输出。选择状态变量为  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2)^T$ ，那么状态方程是  $\dot{x} = Ax + B\theta$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ (-z_5 z_6) z_2 & -z_2 & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & (-z_7 z_8) z_4 & -z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ z_5 z_6 z_2 \\ 0 \\ z_7 z_8 z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

$z = (z_1, z_2, z_3, z_4; z_5, z_6, z_7, z_8) = (z_1, \frac{1}{T_1}, z_3, \frac{1}{T_2}; k_1, k_{p1}, k_2, k_{p2})$ 。  $A$  是 1-型矩阵其中  $a_{12} = 1$  ,  $a_{34} = 1$  ;  $a'_{ij} = 0$  ,  $a'_{ij} z_1 = 0, j = 1, 3, 4$ ;  $a'_{3j} = 0$  ,  $a'_{3j} z_3 = 0, j = 1, 2, 3$  。显然  $\det(\lambda I - A_i)$  是  $F(z)[\lambda], i = 1, 2$  上的不可约多项式。所以  $A_i$  在  $F(z)$  上不可约。因为  $A$  具有性质 1 且  $B_i \neq 0$  , 由定理 3.7 知  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控。

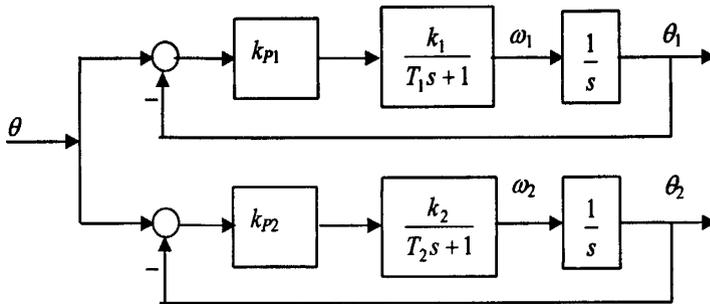


图 3.2 两个伺服系统

### 3.6 本章小结

本章证明了 1-型矩阵满足两种性质：它的  $F(z)[\lambda]$  环上的特征多项式没有非零的常数特征值；在  $F(z)[\lambda]$  环上没有非零重根，并得到了一些特征多项式在  $F(z)[\lambda]$  环上没有非零重根的线性系统的能控标准，表明了 1-型矩阵和系统在结构能控性判断上的应用。

## 第4章 基于多项式矩阵理论的 $F(z)$ 上系统结构性质

在第2章中定义了  $F(z)$  上  $\lambda$  的多项式矩阵即环  $F(z)[\lambda]$  上的矩阵及其矩阵运算规则，并用  $F(z)[\lambda]$  上矩阵的史密斯形研究了  $F(z)$  上矩阵  $A$  的特征矩阵。在实数域上的线性系统的频域理论中，多项式矩阵的互质性是一个重要的概念，表征了两个多项式矩阵的不可简约属性。如果线性系统的描述方式为多项式矩阵描述 PMD (Polynomial matrix description)，其系数矩阵的互质性与系统的能控能观性有内在的联系。本章将利用这种内在的联系和环  $F(z)[s]$  上的多项式矩阵理论把实数域系统的基于多项式矩阵理论的能控性判据推广至  $F(z)$  上的系统。

### 4.1 $F(z)$ 上频域系统的结构性质

#### 4.1.1 $F(z)$ 上的能控性 PBH 判据

为得到  $F(z)$  上的能控性 PBH 判据，回顾第2章中关于多项式矩阵的若干定义如下。令环  $F(z)[s]$  表示以  $F(z)$  上的元为系数的  $s$  的多项式的环。多项式  $d(s) = d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_n \in F(z)[s]$ ，其中  $d_i = d_i(s) \in F(z), i = 1, \dots, n$ ， $d(s)$  表示以  $s$  为变量的带有  $n$  个系数  $d_0, \dots, d_n$  的多项式，因此  $d(s)$  也可以表示为  $d(z, s)$ 。如果一个多项式矩阵  $M(z, s)$  的元素均在环  $F(z)[s]$  上，则称  $M(z, s)$  为环  $F(z)[s]$  上的多项式矩阵。本章中的  $M(z, s)$  均简写为  $M(s)$ 。

**定义 4.1** 如果  $F(z)[s]$  上的  $n \times n$  方多项式矩阵  $P(z, s)$  的行列式  $\det P(z, s) = c$  为非零且不含  $s$  的元 (即  $c \in F(z)$ ， $c$  也可以为实数)，称  $P(z, s)$  为  $F(z)[s]$  上的单模阵。

**引理 4.1**<sup>[19]</sup> 如果  $f(z)$  是  $F(z)$  上的元，则有  $f(z) \equiv 0$  或者  $m * \{z | f(z) = 0\} = 0$ 。

如果  $P(z, s)$  为  $F(z)[s]$  上单模阵，由引理 4.1 知：令

$M_1 = \{\bar{z} \in R^q \mid \text{rank}P(\bar{z}, s) = n, \forall s \in C\}$ ,  $M_2 = \{\bar{z} \in R^q \mid \det P(\bar{z}, s) = 0, \forall s \in C\}$ , 则有  $m^*M_1 = 1$ ,  $m^*M_2 = 0$ 。

实数域上的 PBH 判据是联系时域和频域的一个桥梁, 表述为: 线性时不变系统能控当且仅当  $\text{rank}[sI - A, B] = n, \forall s \in C$ , 其中  $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}$ ,  $C$  表示复数域<sup>[2]</sup>中的结论 4.3)。当  $A, B$  都是  $F(z)$  上的矩阵时, 引入 Lebesgue 测度。

引理 4.2  $F(z)$  上的能控性 PBH 判据的测度表示:  $F(z)$  上的  $n$  维线性系统  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$  在  $F(z)$  上能控 (简称结构能控) 的充要条件是对集合  $E = \{z \in R^q \mid \text{rank}[sI - A, B] = n, \forall s \in C\}$ , 有  $m^*E = 1$ 。

证明 必要性:

$(A, B)$  在  $F(z)$  上能控也即结构能控<sup>[19-20]</sup>, 所以取  $E_1 = \{z \in R^q \mid (A(z), B(z)) \text{能控}\}$ , 则  $m^*E_1 = 1$ , 取任意的点  $\bar{z} \in E_1$ , 则  $A(\bar{z}), B(\bar{z})$  在实数域上能控, 那么根据 PBH 判据有  $\text{rank}[sI - A(\bar{z}), B(\bar{z})] = n, \forall s \in C$ , 又因为  $m^*E_1 = 1$ , 所以  $m^*\{z \in R^q \mid \text{rank}[sI - A, B] = n, \forall s \in C\} = 1$ 。

充分性:

取任意的  $\bar{z} \in E$ , 则有  $\text{rank}[sI - A(\bar{z}), B(\bar{z})] = n, \forall s \in C$ , 由实数域上的 PBH 判据得  $(A(\bar{z}), B(\bar{z}))$  在实数域上能控。又  $m^*E = 1$ , 即  $m^*\{z \in R^q \mid (A(z), B(z)) \text{能控}\} = 1$ , 有  $(A, B)$  结构能控也即  $F(z)$  上能控。

定义 4.2  $F(z)[s]$  上左互质: 称行数相同的多项式矩阵  $D_L(s) \in F^{n \times n}(z)[s]$  和  $N_L(s) \in F^{n \times m}(z)[s]$  为左互质, 如果其最大左公因子  $\text{gld}$  为  $F(z)[s]$  上单模阵。

引理 4.3  $F(z)[s]$  上左互质秩判据: 对行数相同  $n \times n$  和  $n \times m$  多项式矩阵  $D_L(z, s)$  和  $N_L(z, s)$ , 其中  $D_L(z, s)$  为非奇异, 则有  $D_L(z, s)$  和  $N_L(z, s)$  为左互质的当且仅当对于集合  $E = \{\bar{z} \in R^q \mid \text{rank}[D_L(\bar{z}, s) \ N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in C\}$ , 有  $m^*E = 1$

证明 必要性: 因为  $D_L(z,s)$  和  $N_L(z,s)$  为左互质, 所以设  $R(z,s)$  为  $D_L(z,s)$  和  $N_L(z,s)$  的一个最大左公因子,  $R(z,s)$  为单模阵, 则引理 4.2 知有  $m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid \text{rank} R(\bar{z}, s) = n, \forall s \in C \} = 1$ 。取  $\bar{z} \in R^q$ , 由最大左公因子构造定理和“线性系统理论”的互质秩判据<sup>[1]</sup>知对于一切  $s \in C$  都有  $\text{rank} R(\bar{z}, s) = \text{rank} [D_L(\bar{z}, s) \ N_L(\bar{z}, s)]$ , 代入前式得  $m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid \text{rank} [D_L(\bar{z}, s) \ N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in C \} = 1$ 。由于秩判据是充要条件, 故充分性是显然的。

由定义 4.1、引理 4.2、定义 4.2 和引理 4.3 得:

定理 4.1:  $F(z)$  上的结构能控性 PBH 判据:  $F(z)$  上的  $n$  维线性系统(1.1)在  $F(z)$  上能控 (简称结构能控) 的充要条件是环  $F(z)[s]$  上的非奇异多项式矩阵  $sI - A$  与  $B$  左互质, 其中  $sI - A$  与  $B$  分别对应于  $D_L(z,s)$  和  $N_L(z,s)$ 。

由定理 4.1 知, 判断  $F(z)$  上的  $n$  维线性系统  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$  的能控性, 需知  $sI - A$  与  $B$  左互质性, 而判断左互质性可使用列初等变换得到  $sI - A$  与  $B$  的最大左公因子, 再来判断其是否是单模阵, 从而得出系统的结构能控性。

例 4.1 考虑如下图所示的电网络。状态变量  $x = (v_{c_1}, i_{L_1})'$ , 输入为电压源  $E_1$  的电压  $v_{E_1}$ , 其中  $v_{c_1}$  是电容  $C_1$  上的电压,  $i_{L_1}$  是电感  $L_1$  上的电流。状态方程  $\dot{X} = AX + Bv_{E_1}$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & C_1^{-1} \\ -L_1^{-1} & \frac{-\Delta_1}{\Delta L_1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4,$$

$\Delta = R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4$ ,  $C_1, L_1, R_1, R_2, R_3$  和  $R_4$  是六个独立的参量。

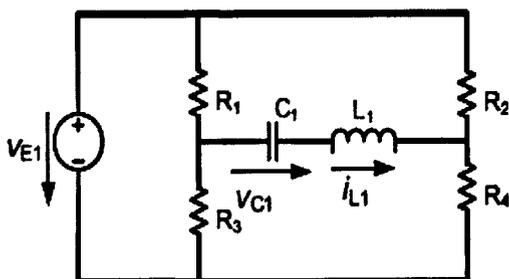


图 4.1 电网络图

变换矩阵得

$$\begin{aligned}
 (sI - A, B) &= \begin{pmatrix} s & C_1^{-1} & 0 \\ -L_1^{-1} & s + \frac{\Delta_1}{\Delta L_1} & \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\cong} \begin{pmatrix} s & C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(2)}{\cong} \begin{pmatrix} 0 & C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\cong} \begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

其中列变换(1)将  $\frac{\Delta}{R_2 R_3 - R_1 R_4} \times$  第三列加到第一列三, 将  $\frac{L_1 \Delta \times (-s - \frac{\Delta_1}{\Delta L_1})}{R_2 R_3 - R_1 R_4} \times$  第

三列加到第二列上, 列变换(2)将  $-C_1 s \times$  第二列加到第一列上, 列变换(3)交换列。

最大左公因子  $\text{gclid} \begin{pmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{L_1 \Delta} \end{pmatrix}$  是  $F(z)[s]$  环上的单模阵, 电网络结构能控。

例 4.1 中的矩阵阶数较小。用列变换得到最大左公因子  $\text{gclid}$  很容易。但对于高阶的矩阵, 列变换较复杂。文献<sup>[39]</sup>中提出了用系数矩阵表示多项式矩阵再对多项式矩阵进行基本变换得到最大左公因子, 这是实数域的方法, 也可以用在  $F(z)$  上的系统上。然而如下定理 4.2 的证明所示, 有些  $F(z)[s]$  环上的特殊多项式矩阵可以先做行变换, 再做列变换得出最大左公因子。

#### 4.1.2 在一类多元有理函数系统上应用

本部分用  $F(z)$  上的 PBH 判据证明了某一类多元有理函数系统结构能控, 这一类系统的系数矩阵  $A$  是不可约的。

引理 4.4 设  $\varphi_1(s)$  和  $\varphi_2(s)$  是  $F(z)[s]$  环上的多项式, 且  $\deg(\varphi_1(s)) > \deg(\varphi_2(s))$ ,  $\varphi_1(s)$  和  $\varphi_2(s)$  互素. 设  $\varphi_1(s) = \rho_1(s) \times \varphi_2(s) + m_1(s)$ , 其中  $\rho_1(s)$  是  $\varphi_1(s)$  除以  $\varphi_2(s)$  得到的商,  $m_1(s) \neq 0$  是余式且  $\deg(m_1(s)) < \deg(\varphi_2(s))$ . 如果  $\deg(m_1(s)) > 0$ , 则有  $m_1(s)$  和  $\varphi_2(s)$  互素. 设  $\varphi_2(s) = \rho_2(s) \times m_1(s) + m_2(s)$ , 如果  $\deg(m_2(s)) > 0$ , 则有  $m_2(s)$  和  $m_1(s)$  互素. 对  $m_1(s)$  和  $m_{i+1}(s)$  做辗转相除直到  $\deg(m_{i+1}(s)) = 0$ . 则有  $m_{i+1}(s)$  是非零常数当  $\deg(m_{i+1}(s)) = 0$  时.

证明 上述结论显然成立. 否则  $\varphi_1(s)$  和  $\varphi_2(s)$  有公因子, 不互素.

定理 4.2<sup>[22]</sup>: 设  $\bar{A}$  是  $F(z)$  上的  $n \times n$  矩阵.  $\bar{A}$  不可约, 当且仅当对任意的  $F(z)$  上的  $n \times m$  的非零矩阵都有  $(\bar{A}, \bar{B})$  能控.

证明 必要性: 已知对状态方程作线性非奇异变换不改变系统能控性, 且由定理 2.13 可知则通过线性非奇异变换可将不可约矩阵  $\bar{A}$  化为非减次型 (I):

$$A = P\bar{A}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \text{同时化} \quad B = P\bar{B}, \quad \text{且}$$

$\det(sI - \bar{A}) = \det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$ ,  $a_i \in F(z)$  为环  $F(z)[s]$  上的不可约多项式. 再对  $(sI - A, B)$  进行以下初等变换: 将  $s \times$  第二行,  $s^2 \times$  第三行,  $\dots$ ,  $s^{n-1} \times$  第  $n$  行加到矩阵的第一行得到

$$(sI - A, B) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(s) & f_1(s) & \cdots & f_m(s) \\ -1 & s & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{(n-1)1} & \cdots & b_{(n-1)m} \\ 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & s & a_2 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & s+a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \end{pmatrix} = (J, B_1).$$

对  $(J, B_1)$ , 分别将  $s \times$  第一列,  $s \times$  第二列,  $\dots$ ,  $s \times$  第  $n-2$  列加到下一列上得到

$$(J, B_1) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(s) & f_1(s) & \cdots & f_m(s) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{(n-1)1} & \cdots & b_{(n-1)m} \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & a_2 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & s+a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \end{pmatrix}$$

用列变换将行号大于 1 且列号大于等于  $n-1$  的元变为 0.

$$(J, B_1) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(s) & f_1(s) & \cdots & f_m(s) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (J, \bar{B}_1), \text{ 其中}$$

$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$  是  $F(z)$  上的素多项式,  $f_1(s) = b_{11} s^{n-1} + \cdots + b_{(n-1)1} s + b_{n1}, \dots, f_m(s) = b_{1m} s^{n-1} + \cdots + b_{(n-1)m} s + b_{nm}$ ,  $B$  是非零矩阵. 所以至少存在一个  $f_i(s) \neq 0, i = 1, \dots, m$ .

$\varphi(s)$  和  $f_i(s) \neq 0$  互素. 取任意的第  $n+i$  列且  $f_i(s) \neq 0$ , 然后对第  $n$  列和第  $n+i$  列进行重复的列变换, 根据引理 4.4 得

$$(J_1, \bar{B}_1) \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m & 0 \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} = [R(s), 0], \text{ 其中}$$

$$R(s) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & m \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 是 } n \times n \text{ 矩阵且 } m \neq 0.$$

$$(sI - A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -s & -s^2 & \cdots & \cdots & -s^{n-1} \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \times (J, B_1) \text{ 前面有}$$

$(J, B_1) \times U(s) = [R(s), 0]$ , 其中  $U(s)$  是列基本变换矩阵。 所以有

$$(sI - A, B) \times U(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s & -s^2 & \cdots & \cdots & -s^{n-1} \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \times (J, B_1) \times U(s)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & -s & -s^2 & \cdots & \cdots & -s^{n-1} \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \times [R(s), 0] \\
 &= \begin{pmatrix} s & s^2 & \cdots & \cdots & s^{n-1} & m & 0 \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m & 0 \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad sI - A \text{ 和 } B \text{ 的最大左公因子 } R(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m \\ -1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{。显然}
 \end{aligned}$$

$R(s)$  是  $F(z)$  上的单模矩阵, 因此  $sI - A$  和  $B$  左互质, 由定理 4.1 知  $(A, B)$  在  $F(z)$  上能控,  $(\bar{A}, \bar{B})$  在  $F(z)$  上能控。证毕。

与第 3.4 节中的时域判据相比较, PBH 判据较容易执行, 时域判据要算秩或者判断多项式的可约性, 而 PBH 判据需要判定多项式矩阵的互质性, 这可以通过第 2.3.1 节中的初等变换求取  $(sI - A, B)$  的史密斯形, 判断史密斯形是否为单模阵从而得到  $sI - A$  与  $B$  的互质性<sup>[1,53]</sup>。下面以倒立摆为例分析其结构性质。

**例 4.2** 在忽略了空气阻力, 各种摩擦之后, 可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和均匀杆组成的系统, 如下图 4.1 所示。

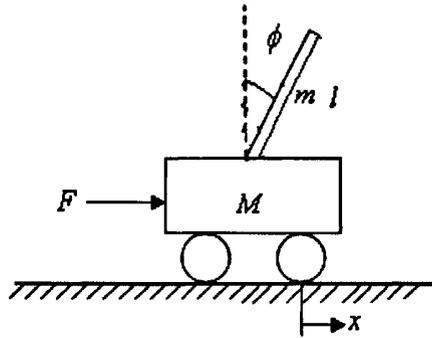


图 4.1 直线一级倒立摆系统

设小车的质量为  $M$ ，摆杆质量为  $m$ ，小车摩擦系数为  $b$ ，摆杆转动轴心到杆质心的长度为  $l$ ，摆杆惯量为  $I$ ，加在小车上的力为  $F$ ，小车的位置为  $x$ ，摆杆与垂直向上方向的夹角为  $\phi$ ，摆杆与垂直向下方向的夹角为  $\theta$ 。

图 4.2 是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中， $N$  和  $P$  为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

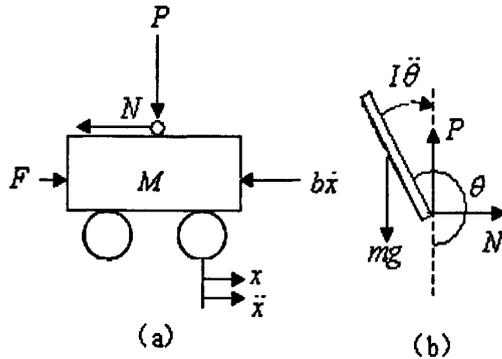


图 4.2 (a) 小车隔离受力图 (b) 摆杆隔离受力图  
根据牛顿定理，小车在水平方向上所受的合力可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (4.1)$$

摆杆在水平方向上所受的合力可以得到以下方程：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta \quad (4.2)$$

将式 (4.2) 代入式 (4.1) 中，就得到系统的第一个运动方程：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \sin\theta = F \quad (4.3)$$

为了推出系统的第二个运动方程，对垂直摆杆方向上的合力进行分析，可以得到下面方程：

$$P - mg = -ml\ddot{\theta} \sin\theta - ml\dot{\theta}^2 \cos\theta \quad (4.4)$$

力矩平衡方程如下：

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (4.5)$$

合并方程 (4.4) 和 (4.5), 约去  $P$  和  $N$ , 得到第二个运动方程:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (4.6)$$

设  $\theta = \pi + \phi$  ( $\phi$  是摆杆与垂直向上方向的夹角), 假设  $\phi$  与 1 (单位弧度) 相

比很小, 即  $\phi \ll 1$ , 则可以进行近似处理:  $\cos \theta = -1$ ,  $\sin \theta = -\phi$ ,  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$ 。

用  $u$  来代表被控对象的输入力  $F$ , 线性化 (4.3)、(4.6) 后两个运动方程如下:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \end{cases} \quad (4.7)$$

由方程 (4.7) 得到:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} \phi \\ \quad + \frac{(I + ml^2)}{I(M + m) + Mml^2} u \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \phi \\ \quad + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u \end{cases} \quad (4.8)$$

整理 (4.8) 后得到系统状态空间方程:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{pmatrix} u \quad (4.9)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (4.10)$$

令  $I = z_1$ ,  $m = z_2$ ,  $l = z_3$ ,  $b = z_4$ ,  $M = z_5$ ,  $g = z_6$  为六个独立的物理参量,

$Z = (z_1, \dots, z_6)$ , 令  $\Delta = I(M+m) + Mml^2$ , 则小车倒立摆系统的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(z_1+z_2z_3^2)z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_4z_6}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{z_2z_3z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_3(z_2+z_5)z_6}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z_1+z_2z_3^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{z_2z_3}{\Delta} \end{pmatrix} \text{ 是 } F(z) \text{ 上的矩阵。}$$

如果用时域上的结构判据, 则需要求取  $A$  的特征多项式 (定理 3.5), 如其不可约因  $B \neq 0$  则直接得知系统结构能控。如果可约则更麻烦, 根据<sup>[22]</sup>中的定理 3 和定理 4, 需要求  $A$  的约当块  $\bar{A}$  及对应的  $B$  的变换矩阵  $\bar{B}$  通过判断  $\bar{B}$  对应约当块元素的值来得到系统结构性质。 $A$  不可约时, 若  $A$  的维数稍大, 含有的参数稍多则求取  $A$  的约当块变换是相当麻烦的。

可以由直接计算能控性矩阵的秩来得到其结构性质, 但当  $A, B$  的维数较大, 含有的参数较多时计算秩也不是很容易。由此可见时域上的判据较难应用。

应用 PBH 判据, 使用史密斯算法<sup>[1,53]</sup>变换  $(sI - AB)$  为史密斯形

$$(sI - AB) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{(z_1+z_2z_3^2)z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_4z_6}{\Delta} & 0 & \frac{z_1+z_2z_3^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & \frac{z_2z_3z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_3(z_2+z_5)z_6}{\Delta} & s & \frac{z_2z_3}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(1)}{\cong} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{(z_1+z_2z_3^2)z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_4z_6}{\Delta} & 0 & \frac{z_1+z_2z_3^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & s \frac{z_2z_3z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_3(z_2+z_5)z_6}{\Delta} & s & \frac{z_2z_3}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{\cong} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_2z_4z_6}{\Delta} & s + \frac{(z_1+z_2z_3^2)z_4}{\Delta} & \frac{z_1+z_2z_3^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & s^2 \frac{z_2z_3(z_2+z_5)z_6}{\Delta} & s \frac{z_2z_3z_4}{\Delta} & \frac{z_2z_3}{\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \stackrel{(3)}{\cong} & 0 & 0 & \frac{z_2 z_3}{\Delta} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & s^2 \frac{z_1 + z_2 z_3^2}{z_2 z_3} s^2 + \frac{(z_2 + z_3)(z_1 + z_2 z_3^2) z_6 - z_2 z_4 z_6}{\Delta} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \stackrel{(4)}{\cong} & 0 & 0 & \frac{z_2 z_3}{\Delta} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{(z_2 + z_3)(z_1 + z_2 z_3^2) z_6 - z_2 z_4 z_6}{\Delta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中变换(1)是将第一列与第二列互换,然后将第一行 $\times(s + \frac{(z_1 + z_2 z_3^2) z_4}{\Delta})$ 加

在第二行、第一行 $\times \frac{z_2 z_3 z_4}{\Delta}$ 加在第四行,再将第一列 $\times s$ 加在第二列;变换(2)

是将第二列与第四列互换,然后将第三行与第二行互换,再将第二行 $\times s$ 加在第四行,将第二列 $\times s$ 加在第三列;变化(4)是将第三列与第五列互换,然后将

第三行与第四行互换,再将第三行 $\times(-\frac{z_1 + z_2 z_3^2}{z_2 z_3})$ 加在第四行,将第三列 $\times(-z_4 s)$ 加

在第四列,第三列 $\times(-s^2 - \frac{z_2 z_3 (z_2 + z_3) z_6}{\Delta} \frac{\Delta}{z_2 z_3})$ ;变化(4)是将第四列 $\times \frac{z_1 + z_2 z_3^2}{z_2 z_3}$

加在第五列,然后将第四列与第五列互换,再将第四列

$\times(-\frac{\Delta}{(z_2 + z_3)(z_1 + z_2 z_3^2) z_6 - z_2 z_4 z_6} s^2)$ 加在第五列;

由定理 4.1 知单级倒立摆系统在  $F(z)$  上能控,即结构能控,这表明系统在参量空间  $R^6$  上几乎处处能控。

## 4.2 $F(z)$ 上频域组合系统

文献<sup>[34]</sup>从传递函数矩阵和能控  $\lambda$  子空间的角度讨论了实数域上组合系统能控能观的充要条件。文献<sup>[1]</sup>的第 12 章得出了实数域上组合系统能控性取决于与

子系统的不可约矩阵分式描述 MFD(matrix-fraction description)的分子矩阵和分母矩阵的互质性的结论。这些结论比<sup>[34]</sup>中的判据更简单和直接，可把它们扩展到  $F(z)$  上。

**定义 4.3**  $F(z)[s]$  环上的不可约 MFD: 称  $F(z)[s]$  环上矩阵分式描述  $D_L^{-1}(s)N_L(s)$  或  $N(s)D^{-1}(s)$  为不可约 MFD 如果  $D_L(s)$  和  $N_L(s)$  在  $F(z)[s]$  环上左互质或者  $D(s)$  和  $N(s)$  在  $F(z)[s]$  环上右互质。

$F(z)[s]$  环上的不可约 MFD 是传递函数矩阵的最简 MFD。

文献<sup>[1]</sup>中用以下四个定义和结论来证明了该文献的第 12 章中的组合系统的能控性。这些基于实数域上的定义和结论可以扩展到多元有理函数系统上来获得  $F(z)$  上组合系统的能控判据。

- ◆ 不可约 MFD 的定义 (第 8 章的定义 8.4), 已有  $F(z)$  上定义 4.3 对应。
- ◆ 多项式矩阵描述 PMD 系统矩阵定义和 MFD 系统矩阵 (第 11 章的定义 11.8 和结论 11.36)
- ◆ 多项式矩阵描述的能控判据 (第 11 章的结论 11.16), 证明中主要用到了这个结论。
- ◆ 严格系统等价变换及其互质不变性 (第 11.6 节)

$F(z)$  上 PMD 系统矩阵的定义和 MFD 系统矩阵的定义与实数域上的相同。

定义了  $F(z)[s]$  环上的单模阵后,  $F(z)$  上的严格系统等价变换也与实数域上的相同。

$F(z)$  上系统的 PMD 为

$$\begin{cases} P(s)\hat{\zeta}(s) = Q(s)\hat{u}(s) \\ y(s) = R(s)\hat{\zeta}(s) + W(s)\hat{u}(s) \end{cases} \quad (4.11),$$

其中  $\zeta(s)$  是广义状态变量,  $\hat{u}(s)$  是输入,  $y(s)$  是输出,

$P(s), Q(s), R(s), W(s)$  是  $F(z)[s]$  环上的多项式矩阵。

在证明实数域上的 PMD 能控性时 (文献<sup>[1]</sup>的第 11 章的结论 11.16), 用到了 PMD 的观测器型实现、PBH 能控判据和左互质秩判据。

$F(z)$  上的 PMD 的观测器型实现与实数域上的相同。由以上及前面的定理

#### 4.1、引理 4.2 和定义 4.2 得出

**定理 4.3:** 对  $F(z)$  上的 PMD 和其观测器实现: 当且仅当  $P(s)$  和  $Q(s)$  在  $F(z)[s]$  环上左互质时, 线性系统结构能控或  $F(z)$  上能控。

由定理 4.1、引理 4.3、定义 4.2 和严格系统等价变换的互质不变性 ([2] 的结论 11.53) 知,  $F(z)$  上的严格系统等价变换仍然具有互质不变性。

对  $F(z)$  上的并联系统, 由定义 4.3、定理 4.3、 $F(z)$  上的严格系统等价变换的互质不变性、文献 [1] 的结论 12.1 及其证明, 有以下定理:

**定理 4.4** 对由结构能控子系统  $S_1$  和  $S_2$  组成的并联系统  $S_p$ , 其中  $S_1$  的传递函数矩阵是  $G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$  为不可约 MFD,  $S_2$  的传递函数矩阵  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  为不可约 MFD, 当且仅当  $D_1(s)$  和  $D_2(s)$  在  $F(z)[s]$  环上左互质时  $S_p$  在  $F(z)$  上能控。

对  $F(z)$  上的串联系统, 由定义 4.3、定理 4.3、 $F(z)$  上的严格系统等价变换的互质不变性、文献 [1] 的结论 12.7 及其证明, 有以下定理:

**定理 4.5** 对由结构能控子系统  $S_1$  和  $S_2$  组成的串联系统  $S_t$ , 其中  $S_1$  的传递函数矩阵是  $G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$  为不可约 MFD,  $S_2$  的传递函数矩阵  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  为不可约 MFD, 当且仅当  $D_2(s)$  和  $N_1(s)$  在  $F(z)[s]$  环上左互质时  $S_t$  在  $F(z)$  上能控。

定理 4.4 与实数域上的并联系统的能控判据类似, 定理 4.5 与实数域上的串联系统的能控判据类似。对状态反馈和输出反馈系统它们的结构能控判据也与文献 [2] 中的结论 12.23 和结论 12.28 类似。状态反馈系统的结构能控性与其开环系统的结构能控性等价, 输出反馈系统的结构能控性与其对应的串联系统的结构能控性是等价的, 因此下面的讨论以并联、串联系统为主。

#### 4.2.1 $F(z)[s]$ 上多项式矩阵互质的秩判据

引理 4.3 是秩判据, 但因为是以 Lebesgue 测度形式表述的所以并不适合于

判定两个  $F(z)[s]$  上的多项式矩阵的互质性

定理 4.6  $F(z)[s]$  上多项式矩阵互质的秩判据, 两个行数相同的多项式矩阵  $D_L(s) \in F^{n \times n}(z)[s]$  和  $N_L(s) \in F^{n \times m}(z)[s]$ , 在  $n \times (n+m)$  的矩阵  $[D_L(s) \ N_L(s)]$  中任意的选择  $n$  列组成  $C_{n+m}^n = \frac{(m+n) \cdot (m+n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)}{n!}$  个  $n \times n$  的子矩阵。

当且仅当  $[D_L(s) \ N_L(s)]$  的所有的  $n \times n$  个子矩阵的行列式 (即  $n$  阶主子式) 没有公因式时,  $D_L(s)$  和  $N_L(s)$  互质。

证明: 根据定理 4.1 只需证明当且仅当  $m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid \text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in C \} = 1$  时,  $[D_L(s) \ N_L(s)]$  的所有  $n$  阶主子式没有公因式。

充分性: 设  $[D_L(s) \ N_L(s)]$  的所有  $n$  阶主子式有公因式  $f(z, s) \in F(z)[s]$ , 对任意的  $\bar{z} \in R$ ,  $[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)]$  是实数域上的多项式矩阵,  $f(\bar{z}, s) \in R[s]$  是实系数的多项式。对任意的实数域上的  $s$  的多项式, 总存在  $s \in C$  使得  $f(\bar{z}, s) = 0$ 。根据实数域上的秩判据总存在  $s \in C$  使得  $\text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] < n$ 。所以有

$$m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid \text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] < n, \exists s \in C \} = 1,$$

那么可得

$$m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid \text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in C \} = 0 \neq 1。$$

必要性:

设  $[D_L(s) \ N_L(s)]$  的所有  $n$  阶主子式没有公因式, 那么

$m^* \{ \bar{z} \in R^q \mid [D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)]$  的所有  $n$  阶主子式没有实数域上的公因式  $\} = 1$ , 其中  $[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)]$  是实数域上的多项式矩阵。  $[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)]$  的所有  $n$  阶主子式没有实数域上的公因式与  $\text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in C$

等价. 所以可得  $m^* \{ \bar{z} \in \mathbb{R}^l \mid \text{rank}[D_L(\bar{z}, s), N_L(\bar{z}, s)] = n, \forall s \in \mathbb{C} \} = 1$ . 证毕.

$F(z)[s]$  上多项式矩阵互质的秩判据只需判断其所有的主子式是否有公因式. 类似于实数域上的秩判据, 此判据更适合于应用.

#### 4.2.2 组合系统结构能控性

由结构能控能观的子系统串、并联组合的系统, 如果子系统以不可约 MFD 描述, 则组合系统的结构能控能观性由  $F(z)[s]$  上的传递函数矩阵的互质性以及它们的连接方式确定.

具有性质 1 和性质 2 的系统的不可约 MFD 可表示为  $N_L(s)D_L^{-1}(s)$  或  $D^{-1}(s)N(s)$ , 其中  $N_L(s) \in F^{p \times m}(z)[s]$ ,  $D_L(s) \in F^{m \times m}(z)[s]$ ,  $D(s) \in F^{p \times p}(z)[s]$ ,  $N(s) \in F^{p \times m}(z)[s]$ . 显然  $\det(D(s))$  和  $\det(D_L(s))$  是  $\det(sI - A)$  的因子或等于  $\det(sI - A)$ . 设  $\det(D(s)) = 0$  或  $\det(D_L(s)) = 0$ , 此方程的根具有两种性质 1) 没有非零的重根; 2) 没有非零的常数根;  $D(s)$  和  $D_L(s)$  具有性质 1 和性质 2.

##### 4.2.2.1 $F(z)$ 上的并系统

如果并系统由两个独立的具有两个性质的结构能控能观的子系统组成, 其中独立表示两个子系统的参量不同, 则有:

$G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$  是  $S_1$  的不可约 MFD,  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  是  $S_2$  的不可约 MFD. 由定理 4.1 和定理 4.6 得知为了判断结构能控性只需验证  $[D_1(s) D_2(s)]$  的  $p \times p$  个主子式是否有公因式. 而子系统相互独立且  $D_1(s)$  和  $D_2(s)$  具有性质 1 和性质 2, 所以  $\det(D_1(s))$  和  $\det(D_2(s))$  只可能有公因式  $s$ , 而且  $\det(D_1(s))$  和  $\det(D_2(s))$  是矩阵  $[D_1(s) D_2(s)]$  的两个主子式. 因此只需将  $s=0$  带入  $[D_1(s) D_2(s)]$  中得到  $F(z)$  上的矩阵  $[D_1(0) D_2(0)]$ . 当且仅当  $[D_1(0) D_2(0)]$  满秩时,  $D_1(s)$  与  $D_2(s)$  互质, 并系统结构能控.

##### 4.2.2.2 $F(z)$ 上的串系统

如果串系统由两个独立的具有两个性质的结构能控能观的子系统组成,

其中独立表示两个子系统的参量不同。

$G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$  是  $S_1$  的不可约 MFD,  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  是  $S_2$  的不可约 MFD。对于多项式矩阵  $[D_2(s) N_1(s)]$ ,  $\det(D_2(s))$  是矩阵的主子式且  $D_2(s)$  具有性质 1 和性质 2。设  $\det(D_2(s)) = s^m \times \varphi_1(s) \times \dots \times \varphi_r(s)$  其中  $\varphi_1(s), \dots, \varphi_r(s)$  互素, 且  $\varphi_1(s) = 0, \dots, \varphi_r(s) = 0$  没有常数根。由定理 4.1 和定理 4.6 知, 将  $s=0$  带入  $[D_2(s) N_1(s)]$  得到  $F(z)$  上的矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$ 。如果矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$  不满秩,  $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  不互质, 串联系统结构不能控。

如果矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$  满秩且  $N_1(s)$  的列数大于等于行数, 则  $N_1(s)$  的主子式都是  $[D_2(s) N_1(s)]$  的主子式 且这些主子式与  $\det(D_2(s))$  之间都没有公因式, 所以  $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  互质, 串联系统结构能控。

如果  $[D_2(0) N_1(0)]$  满秩且  $N_1(s)$  的列数小于行数, 设  $\varphi_1(s) = 0, \dots, \varphi_r(s) = 0$ , 将它们分别带入  $[D_2(s) N_1(s)]$  中检查  $F(z)$  上的矩阵  $[D_2(\hat{s}) N_1(\hat{s})]$  是否满秩, 当且仅当它们都满秩时,  $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  互质, 串联系统结构能控。

以上的结论的条件是子系统的表达式是不可约的右 MFD。如果并联系统的子系统的表达式是不可约的左 MFD 时, 可由分母矩阵右互质判据推导出类似的简化秩判据, 串联系统也是如此。

例 4.3 考虑两个结构能控能观的子系统  $S_1$  和  $S_2$ , 它们的传递函数矩阵分别为  $G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$ ,  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  且都是不可约的 MFD, 其中

$$D_1(s) = \begin{bmatrix} s+z_1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, D_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & s \end{bmatrix}。$$

将  $s=0$  带入  $[D_1(s) D_2(s)]$  得  $F(z)$  上矩阵  $[D_1(0) D_2(0)] = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \end{bmatrix}$  满秩。并联系统结构能控。

例 4.4 考虑两个结构能控能观的子系统  $s_1$  和  $s_2$ , 其中  $G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$ ,  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$  为不可约的 MFD, 其中  $D_2(s) = \begin{bmatrix} s+z_1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ 。易知如果

$N_1(s) = \begin{bmatrix} s+z_2 \\ s+z_3 \end{bmatrix}$ , 串联系统结构能控。如果  $N_1(s) = \begin{bmatrix} s+z_2 \\ 0 \end{bmatrix}$  或者  $N_1(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ s+z_2 \end{bmatrix}$ , 串联系统结构不能控。

由多于 2 个子系统所串、并联形成的组合系统的结构能观的判断也类似, 如果已知子系统的不可约 MFD 即可得到组合系统的结构能控能观性。

<sup>[1]</sup>中实数域传递函数矩阵的由 MFD 得到不可约 MFD 的算法也可用在  $F(z)[s]$  上的多项式矩阵中。然而矩阵的基本变换都是符号运算, 相比数值计算, 运算量较大。而且就算系统的阶数不高, 但是由于  $F(z)$  上的参量较多计算量也因此而更大。应当根据  $F(z)[s]$  上多项式矩阵的特点来对矩阵的符号运算做适当的简化, 这是后面的工作。

### 4.2.3 更普遍的组合系统

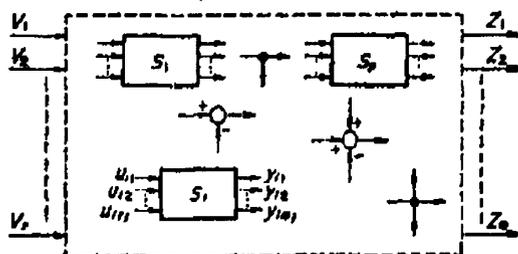


图 4.3 组合系统

如图 4.3 所示为由多个子系统组合的组合系统<sup>[25]</sup>, 其中有  $p$  个子系统  $S_i$ ,  $S_j$  的输入个数为  $r_i$ , 输出个数为  $m_j$ , 各子系统之间的连接关系可用以下矩阵表示:

$$\text{子系统输出和子系统输入之间的关系矩阵 } F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1p} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{p1} & F_{p2} & \cdots & F_{pp} \end{bmatrix},$$

式中  $ij$  子块  $F_{ij}$  的维数是  $r_i * m_j$ ,  $F_{ij}$  的第  $k_j$  个子元素  $f_{ij}(k,l)$  为

$$f_{ij}(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出正接于 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入时} \\ -1 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出负接于 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入时} \\ 0 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出与 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入没有连接时} \end{cases} .$$

$$\text{整个系统输入和子系统输入之间的关系矩阵 } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_p \end{bmatrix},$$

式中  $i$  子块  $G_i$  的维数是  $r_i * r$ ,  $G_i$  的第  $kl$  个子元素  $g_{ij}(k,l)$  为

$$g_{ij}(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{当整个系统的输入正接于 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入时} \\ -1 & \text{当整个系统的输入负接于 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入时} \\ 0 & \text{当整个系统的输入与 } S_i \text{ 的第 } k \text{ 个输入没有连接时} \end{cases} .$$

子系统输出和整个系统输出之间的关系矩阵  $J = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_p]$ ,

式中  $j$  子块  $J_j$  的维数是  $m * m_j$ ,  $J_j$  的第  $kl$  个子元素  $j_j(k,l)$  为

$$j_j(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出正接于整个系统的第 } k \text{ 个输出时} \\ -1 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出负接于整个系统的第 } k \text{ 个输出时} \\ 0 & \text{当 } S_j \text{ 的第 } l \text{ 个输出和整个系统的第 } k \text{ 个输出没有连接时} \end{cases} .$$

整个系统输入和整个系统输出之间的关系矩阵  $K$  维数为  $m * r$ ,  $k(k,l)$  为

$$k(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{当整个系统的第 } l \text{ 个输入正接于整个系统的第 } k \text{ 个输出时} \\ -1 & \text{当整个系统的第 } l \text{ 个输入负接于整个系统的第 } k \text{ 个输出时} \\ 0 & \text{当整个系统的第 } l \text{ 个输入和整个系统的第 } k \text{ 个输出没有连接时} \end{cases} .$$

设子系统为结构能控能观, 且其 PMD 描述为:

$$\begin{bmatrix} D_i(s) & I_{pi} \\ -N_i(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_i(s) \\ -\hat{u}_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{y}_i(s) \end{bmatrix}, i=1, \dots, p,$$

其中  $\hat{\zeta}_i(s)$  为广义状态变量,  $\hat{u}_i(s)$  为输入

则可得整个系统的一个中间标准形

$$\begin{bmatrix} I & -F & 0 & G \\ 0 & -I & N(s) & 0 \\ I & 0 & -D(s) & 0 \\ 0 & -J & 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ \zeta(s) \\ -V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} Z(s)$$

$$, \text{ 其中 } N(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_p(s) \end{bmatrix}, D(s) = \begin{bmatrix} D_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_1(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_p(s) \end{bmatrix};$$

$$U(s) \square \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}, Y(s) \square \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_1(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix}, \zeta(s) = \begin{bmatrix} \zeta_1(s) \\ \zeta_2(s) \\ \vdots \\ \zeta_p(s) \end{bmatrix}, u_i(s)、y_i(s) \text{ 和}$$

$\zeta_i(s) (i=1, \dots, p)$  分别为子系统的输入、输出和状态变量的拉普拉斯变换;  $V(s)$

和  $Z(s)$  分别为整个系统的输入和输出的拉普拉斯变换。

$$\text{令 } M = \begin{bmatrix} I & -F & 0 & G \\ 0 & -I & N(s) & 0 \\ I & 0 & -D(s) & 0 \\ 0 & -J & 0 & K \end{bmatrix}, \text{ 对 } M \text{ 进行基本行变换得:}$$

$$M \xrightarrow{(1)\text{step}} \begin{bmatrix} I & -F & 0 & G \\ 0 & -I & N(s) & 0 \\ 0 & F & -D(s) & -G \\ 0 & -J & 0 & K \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\text{step}} \begin{bmatrix} I & -F & 0 & G \\ 0 & -I & N(s) & 0 \\ 0 & 0 & M_{33}(s) & -G \\ 0 & 0 & M_{43}(s) & K \end{bmatrix}.$$

其中(1)step: 第三行块矩阵减去第一行块矩阵。

(2)step: 第四行的块矩阵的每一行加上第二行的块矩阵中的一行乘以一个系数使得  $M_{42} = 0$ 。第三行的块矩阵的每一行加上第二行的块矩阵中的一行乘以一个系数使得  $M_{32} = 0$ 。

则组合系统的 PMD 可表示为

$$\begin{bmatrix} M_{33}(s) & -G \\ M_{43}(s) & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta(s) \\ -V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Z(s) \end{bmatrix}$$

如果子系统都是结构能控能观, 且子系统的多项式矩阵描述是最简的形式 (即子系统的 MFD 是不可约的), 那么组合系统的能控性取决于  $[M_{33}(s) \ -G]$  的互质性。

并联、串联的组合系统也可以用这种组合方式表示, 这是一个最普遍的组合系统。

例 4.1 如下图所示为一个反馈系统<sup>[25]</sup>。其中  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$J = [0 \ 1]$ ,  $K = [0]$ 。其系数矩阵都是实数矩阵, 实数域是  $F(z)$  域的子域, 也能够分析其结构性质, 所以有:

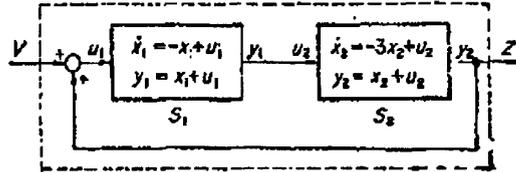


图 4.4 一个反馈系统

$$G_{s_1}(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad D_1(s) = s+1, \quad N_1(s) = s+2$$

$$G_{s_2}(s) = \frac{s+4}{s+3}, \quad D_2(s) = s+3, \quad N_2(s) = s+4$$

组合系统的行标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & s+4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(s+1) & s+4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+2 & -(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(s+4) & 0 \end{bmatrix}$$

对标准形中的系数矩阵做基本行变换变成行标准形得到组合系统的 PMD

$$\begin{bmatrix} -(s+1) & s+4 & -1 \\ s+2 & -(s+3) & 0 \\ 0 & -(s+4) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(s) \\ \zeta_2(s) \\ -u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z(s) \end{bmatrix}$$

其中  $\begin{bmatrix} -(s+1) & s+4 & -1 \\ s+2 & -(s+3) & 0 \end{bmatrix}$  左互质, 所以系统结构能控。

### 4.3 本章小结

对于频域上的系统描述可以是传递函数矩阵, 也可以是多项式矩阵描述。传递函数矩阵只能反映系统的能控能观部分, 而多项式矩阵描述是线性系统的一般描述, 状态方程、输出方程和传递函数矩阵均可以由它得到, 它沟通了系统不同描述的结构性质间关系<sup>[1]</sup>。本章利用多项式矩阵理论得到了  $F(z)$  上的 PBH 判据和多项式矩阵描述对应的状态空间描述结构能控的判据, 它们都与矩阵的互质性相关。本章还给出了判断  $F(z)$  上多项式矩阵的互质性的秩判据的子行列式公因式法, 这个方法可以简化串、并系统的结构能控性的判断。

可将串、并系统的结构能控能观判据作为控制系统设计法则。如果子系统具有两种性质, 主要是具有性质 2: 没有非零的常数根, 而且子系统物理参数不同(相互独立)。“只要传递函数在原点没有零、极点抵消, 则结构能控能观”。在设计系统时, 只要两个子系统没有原点的零、极点抵消, 则可以保证结构能控能观。本章得到的基于 2 个性质的串、并联系统的结构能控性的判断方法包含了第 2.4.2.2 节中由单输入单输出系统组成的串、并联系统的结构能控判据。最后本章还提出了一种普遍的组合系统并推导出这个组合系统的多项式矩阵描述及其结构能控判别方法。

## 第 5 章 结构能控能观分析软件开发

结构能控能观分析软件主要是作为本课题研究小组的一种研究工具，具体应用到实际系统的分析中还需进一步研究，但它对加快本课题的研究进度的效果是显著的。当该软件成熟后，应用到实际系统分析中的范围很广，比如：它可以仿真实际系统，研究系统的可约性、能控性、能观性和稳定性等，从而优化系统的各种参数，为系统的设计与分析打下基础提供平台。一个系统如果它结构不能控，那么它在任何时候都是不能控的。如果一个大型的系统做完后才发现它含有不能控的模式是不稳定的，也无法让系统稳定工作，那损失有可能是巨大的，甚至无法挽救。对于大型的系统，有时是不允许先做好，再去研究和修改的。在这种情况下，本软件是一个很好的预研究工具。

### 5.1. 结构能控能观分析软件需求分析和开发思路

$F(z)$ 上系统可以分为一般系统和组合系统。一般系统指的是系统状态方程的系数矩阵是 RFM 的系统，再无别的限制。组合系统是由各个子系统以串联、并联、反馈或者更复杂的方式连接而成的系统，如图 5.1、5.2 和 5.3 所示，而且各子系统所含参量互不相同（忽略子系统之间的负载效应）。

分析系统结构性质时，可以采用以下方法。

#### 5.1.1 一般系统的结构能控能观分析

与实数域的能控性的计算分析类似，在计算机中分析结构能控能观性时，如果是  $F(z)$ 上的时域模型（即状态方程和输出方程）通过计算  $F(z)$ 上能控（观）矩阵的秩可得到，如果是  $F(z)$ 上的频域模型则通过分析  $F(z,s)$ 上多项式矩阵的互质性得到。 $F(z)$ 上的矩阵的分析计算要用到符号运算。MATLAB 是美国 MathWorks 公司研发的数学计算软件，集成了高性能的数值计算和符号计算，提供了大量的内置函数，使用方便，编程效率高。自然可以利用 MATLAB 的符号运算来分析其结构性质。计算符号矩阵的秩可用 MATLAB 函数 rank，但是阶数过大运算会很麻烦，应结合  $F(z)$ 时域上的结构能控理论进行简化计算<sup>[22]</sup>。对于  $F(z,s)$ 上的多项式矩阵(第 4 章)，MATLAB 中没有现成的函数可以用来分析

其互质性，必须自己写出  $m$  函数用符号运算来得到多项式矩阵的互质性。

### 5.1.2 组合系统的结构能控能观分析

组合系统如果只是如图 5.1、5.2 所示的串联、并联系统则较为简单，但有一定的限制：并联系统的子系统输入个数相同，输出个数相同；串联系统中子系统的输出个数与另外的一个子系统的输入个数相同。反馈系统也可以用串联系统来表示。如果是如图 5.3 所示的大系统<sup>[13]</sup>则稍复杂。但是可以看出图 5.3 的大系统是包含图 5.1、5.2 所示的串、并联系统的。所以本软件的组合系统分析对象取图 5.3 所示的大系统。

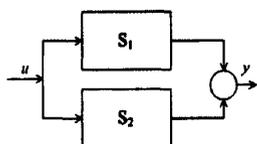


图 5.1 并联系统



图 5.2 串联系统

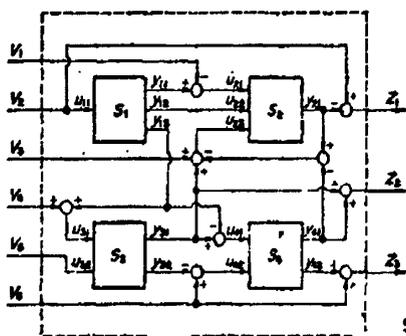


图 5.3 组合系统最一般的描述方式

对于组合系统既可以做时域上的分析，又可以做频域上的分析。

如果子系统是时域模型（状态方程和输出方程），时域上的分析直接由各子系统的关联关系和各子系统的模型得到组合系统的状态方程<sup>[13]</sup>，直接计算组合系统的状态方程的能控（观）矩阵的秩既可。

如果子系统是频域模型（传递函数矩阵），第一种分析方法，先由子系统的传递函数矩阵得到其时域上的状态方程和输出方程，再与它们之间的组合关系结合得到组合系统的状态方程和输出方程，然后计算组合系统的状态方程的能控（观）矩阵的秩得到组合系统的能控（观）性。第二种，直接在频域上利用多项式矩阵的互质性对子系统的传递函数矩阵进行分析得到系统的结构性质。

有两种方式输入子系统和组合系统：1.直接在 MATLAB 中输入子系统状态

方程系数矩阵或传递函数以及组合系统的关联矩阵。2.子系统输入信号流图，组合系统输入组合系统框图。对一般的线性系统，不管有多么复杂总可以简洁直观的表达为信号流图的形式，并根据此计算出传递函数矩阵。

如果采用第一种方式，当然只需在 MATLAB 中输入相应的符号矩阵进行运算既可。但这种方式不直观，而且当系统阶数较大或者子系统较多时人工输入也容易出错，可以计算但不便于分析和以后的研究。因为研究结构性质的另一个目的是希望能得到只需观察组合系统方块图或信号流图的结构判据，另一方面开发了这样一个软件平台不仅可以做结构性质的研究进一步以后可以做数值的仿真。因此软件采用了第二种输入方式。

整个软件的需求简述为：分析由  $F(z)$  上多个子系统以并联、串联或更复杂的方式组成的组合系统，其中的子系统以信号流图的形式输入，组合系统以方框图的形式输入。分析信号流图和方框图以得到子系统及整个组合系统的状态方程矩阵 A、B、C、D 或 PMD（多项式矩阵描述），从而得到组合系统的结构性质。第 5.3 节和第 5.4 节给出了基于信号流图的  $F(z)$  上组合系统结构性质分析软件的具体设计思路和算法。

VC 是 Microsoft 公司推出的基于 Windows 平台的可视化的集成开发环境，在运行速度、功能性以及应用程序界面开发方面功能强大，但 VC 在数值、符号计算方面不具备太多优势，而 MATLAB 擅长于符号运算但是界面编程功能不如 VC。所以选择在 VC 中制作出友好的程序界面，输入组合系统框图、信号流图进行图形的拓扑分析，在 MATLAB 中进行核心算法的开发主要是做矩阵的符号运算等，将两者结合起来提高编程效率。

### 5.1.3 软件结构

现在许多广为使用的软件都基于文档/视图结构<sup>[59-65]</sup>。这种结构提供了一种模块化的编程结构：将数据的处理同用户界面的代码分开实现，数据在文档中实现并处理，而用户界面在视图中实现并处理。文档类通常跟磁盘文件直接联系。对 VC 程序员来说，要使自己的程序符合 Windows 的通常外观，相对来说不需太大的工作量。MFC 的类库框架提供两种形式的文档/视图结构应用程序：SDI（单文档接口）和 MDI（多文档接口）。它们的区别在于 SDI 应用程序只允许打开一个文档，MDI 可以同时打开多个文档，这些文档有相互独立的用户视图窗口。

本分析软件选择 SDI 结构。虽然本软件的分析对象为信号流图和方框图两种，但是由以上需求分析知道，信号流图是方框图的子图，实际上只需要一个文档类型即可。MDI 结构需要维护多个文档类型，相对来说一个文档类型总是比多个文档类型好维护。在视图上 SDI 也能够实现单文档多视图，但目前的软件需求表明分析结果的显示只需对话框或者调用 MATLAB 来显示即可。

### 5.1.4 软件功能设计

抽象地将软件的功能分为系统平台功能和系统分析功能，大致如图 5.4。

系统平台功能：文件操作、编辑、视图、快捷键等功能，及各子项功能。

系统分析功能：主要分为子系统和组合系统，这两种系统的分析既可以单独进行也可以组合进行：先分析子系统，分析结果送给组合系统再进行分析，最后进行仿真。包含有绘图、拓扑分析、编写状态方程、能控性分析、能观性分析等功能。仿真分析模块对这两类网络都能够进行。

平台功能可以看成是系统的一些辅助功能：

文件操作功能：新建、打开、关闭、保存、另存为以及打印；

编辑功能：绘制图元、移动、删除和编辑属性等；

视图功能：工具栏、状态栏、图元库等；

帮助功能：帮助和关于软件等。

分析功能是软件的功能的核心部分：

系统分析：拓扑分析、生成状态方程和生成输出方程。其中，在输出状态方程时同时网络的能控性等；在显示输出方程的同时给出网络能观性的结论。

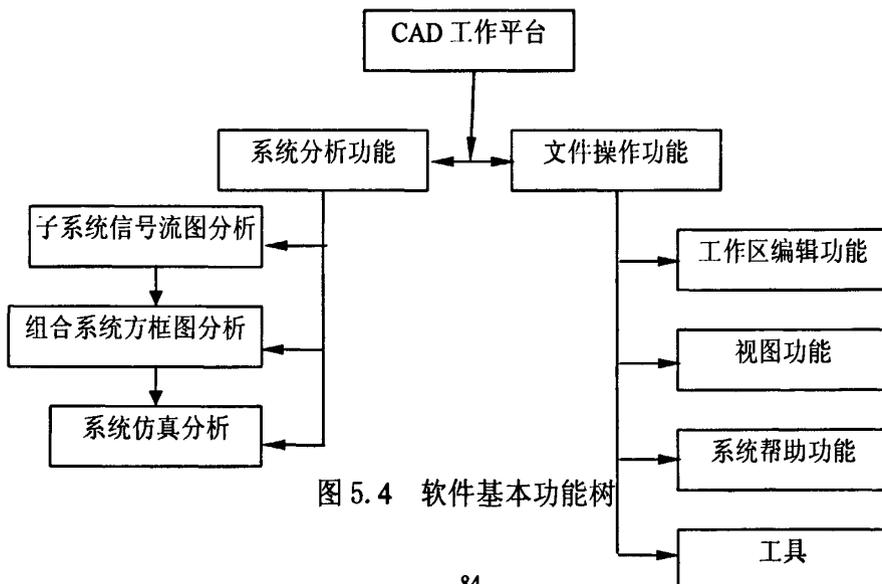


图 5.4 软件基本功能树

## 5.2. 软件进一步设计

### 5.2.1 图形编辑程序设计

图形编辑程序部分用于完成图元对象的生成、显示、选中、移动和删除操作，除此之外还要能识别图元的属性和连接关系，并能根据画面上的图元信息，建立系统信号流图和方框图对应的网络拓扑结构模型。最后，它不仅要考虑某个特定图元对象的移动和删除操作，还要兼顾所有与之相连的其它图元对象，以保证整个图形模型的连接和显示的正确性。大多数的图形编辑环境（如 MATLAB 的 SIMULINK 工具箱）对图元的操作都遵守一定的动作顺序，以符合日常的操作规范和用户使用习惯。

#### 5.2.1.1 图元的设计

根据常用的图形建模，子系统信号流图由节点、支路这两个基本元素构成。组合系统方框图由方框、汇合节点、输入输出节点和连接线四个基本元素构成。其中方框图的汇合节点有正负性，输入输出节点没有。因此信号流图的节点与方框图的输入输出节点实际上是一类性质的节点，下文中将统称为节点。节点通常使用圆来表示；支路为两个节点之间的有向连线，可用有向圆弧或有向直线表示；方框用矩形表示；汇合节点由内部带“+”“-”符号的圆表示；连接线为有向的折线。最后确定了六个基本的绘图图元：节点圆、汇合节点圆、矩形框、有向直线、有向圆弧和有向折线。

#### 5.2.1.2 图元基类

利用 C++ 的多态性和面向对象的方法，将图元的基本属性总结为一个基本图元类 `CDrawObject`，这是一个抽象基类，包含有图元类型、颜色、是否选中等属性。基本图元类是从 `CObject` 类派生的，`CObject` 是 MFC 大多数类的基类，支持串行化操作。

```
class CDrawObject:public CObject
{
private:
    COLORREF m_PenColor;//图元颜色
public:
    bool m_bSelected;//是否被选中
```

```

long m_nStyle;//图元类型
int m_step;//绘制的步骤
long m_oldx,m_oldy;//移动图元时，图元的原有位置
int num;//序号
int m_belongsInt;//标志是信号流图图元，还是方框图图元

CDrawObject(){m_bSelected=false; m_belongsInt=0;}//构造函数
void SetPenColor(COLORREF color);//设置图元颜色
COLORREF GetPenColor();//获取颜色
void Selected(CDC* pDC,bool select);//绘制（取消）选择标志
//virtual functions
virtual void Draw(CDC* pDC){};//绘制图元
virtual int SelectAt(long x,long y){return 0;}//判断是否选择图元
virtual void MoveAt(CDC* pDC,int flags,long x,long y){};//以指定方式按
步骤绘制图元或移动图元
virtual int NewPoint(long x,long y){return 0;}//图象对象第一点坐标，如果
返回为 0 则结束绘图
virtual void Serialize(CArchive& ar){}
virtual void HotPoints(CDC* pDC) {}//绘制热点
void HotPoint(CDC* pDC,long x,long y);//在点(x,y)处绘制小矩形表示热
点
DECLARE_SERIAL(CDrawObject)
protected:
void DrawArrow(CDC* pDC,long x,long y,long xx,long yy);//绘制箭头
};

```

如果不利用 C++ 的多态性，那么程序中需要许多的 switch 或 if 语句来区分不同的对象。利用多态性仅需要根据功能需求来设计类的层次。如图 5.5 所示为本软件图元类的层次。

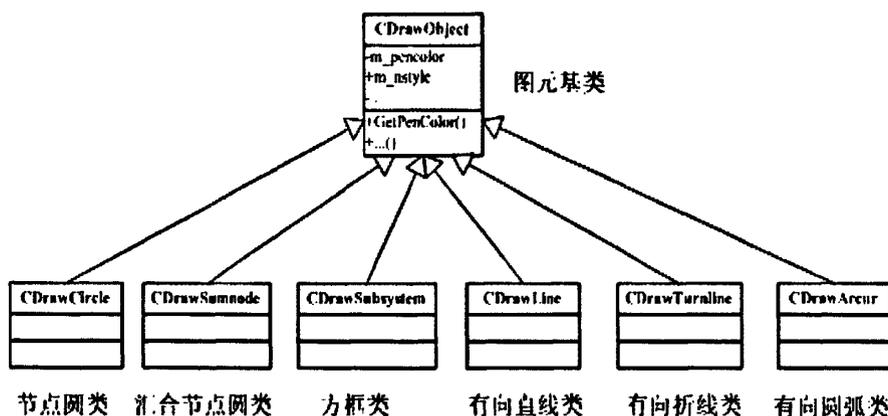


图 5.5 图元类层次

### 5.2.1.3 图元的管理

图元的操作需要对动态生成的图元实现动态管理，动态管理通常由链表或数组实现。链表提供有序无索引的元素链，链表的插入和删除操作效率高速度快。数组的大小可以动态变化、且基于整数索引并有序，数组可以进行快速的随机访问，插入删除时间开销较大。除了存储方式不同，链表和数组基本类似。MFC 库提供了一些基本的数组和链表类。CObArray 是一个数组类可以保存指向 CObject 的指针，而在 5.2.1.2 节中可以看到基本图元类是从 CObject 类派生的。

本软件选择了基于 C++ 的模板类来保存大量的不定数目的图元对象，基于模板的类的类型安全性更好，一个类型安全类只能保存同一种数据。如果要访问不基于模板的类的图元对象指针需要强制转换，而基于模板的类则不必强制转换。综合以上考虑，最后选择 CTypedPtrArray 类作为保存图元的容器，CTypedPtrArray 类为 CObArray 类对象进行类型安全“包装”。当使用 CTypedPtrArray 时，C++ 类型检查工具会帮助消除出不匹配的指针类型引发的错误。CTypedPtrArray 类提供了管理对象数组的完善功能，如对象的引用、索引、插入、删除和计数等功能。

在软件中，定义了 1 个 CTypedPtrArray 类对象数组 m\_aObjects 实现对图元的管理。

图元的生成采用了动态内存分配，使用 new 操作符来实现。在上面已经定义了数组类型的变量 m\_aObjects。然后将已绘制的图元对象指针保存在数组中，如下所示：

```
m_usrCurrentObject=new CDrawLine(UD_RED,line_i,m_pcursubsys);//创建一个有向直线
```

```
pDoc->m_aObjects.Add(m_usrCurrentObject);//将有向直线对象指针保存在文档类的数据成员数组中
```

其中 `m_usrCurrentObject` 是一个 `CDrawObject` 类型的指针变量, 因大多数的事件响应 (如鼠标的单击、移动事件) 都在视图类 `CAnalyView` 中, 由这些事件引发图元管理操作, 所以此变量声明在视图类 `CAnalyView` 中。在图元的生成、编辑、移动和删除时均用到 `m_usrCurrentObject` 变量。

在新建或退出软件时, 要删除图元, 即用 `delete` 语句释放动态为图元对象分配的空间以防止内存泄漏。覆盖文档类的函数 `DeleteContents()` 函数来删除文档中的数据。对应的语句为:

```
for(int j=0;j<m_aObjects.GetSize();j++)
{
    CDrawObject* pObject = m_aObjects[j];
    delete pObject;    //释放图元对象占用的空间
}
m_aObjects.RemoveAll();//清空数组
```

函数 `DeleteContents()` 在文档被删除之前调用, 框架调用此函数来删除文档数据。

#### 5.2.1.4 节点

##### 1) 节点类定义

节点既存在于信号流图中, 又存在于方框图中。节点的构成要素为节点的坐标, 节点是否输入、输出或一般节点, 节点是否子系统或组合系统的节点。节点类的定义为

```
class CDrawCircle:public CDrawObject
{
public:
    long m_x,m_y;//节点圆心坐标
```

```
    CDrawSubsystem *m_psubsys;//是否子系统或组合系统节点; 如果是子系统节点, 该节点所属信号流图属于组合系统中的哪个方框。如果该指针为 NULL 则表示是组合系统的节点。
```

```

int m_start, m_end;//是否输入节点或输出节点
int linefrom[20], lineto[20], curvefrom[20], curveto[20];//与节点连接的支路
(有向直线、有向圆弧)
int m_lf,m_lt, m_cf, m_ct;//此节点连接的线个数
int m_iterline, m_itercurve;//寻找回路或前向通道时记录探寻的支路
bool m_lock;//寻找回路时做开关用
};

```

## 2) 节点生成

使用 `CDC *m_usrCurrentObject= new CDrawCircle(UD_RED,circle_i,m_pcursubsys)`;语句创建一个节点。在节点生成时，需要节点的颜色、序号、节点所属方框两个参数。节点圆的序号为当前总的节点数。因为节点可能是子系统信号流图中的也可能是组合系统方框图中的，传递了 `m_pcursubsys` 参数来生成节点。节点的坐标由鼠标的左键在绘图区中单击时的坐标决定，使用 `m_usrCurrentObject->NewPoint(point.x,point.y)`;语句来确定节点圆心坐标。

## 3) 节点拾取

如果要删除节点或编辑节点的属性，必须先拾取节点。当软件在选择状态时，用鼠标左键单击一个节点，使用虚函数 `SelectAt(long x,long y)`来判断鼠标单击的位置是否在节点上。判断的标准为单击的位置到节点的圆心的距离是否小于节点的半径。如果在节点上则调用图元基类的 `Selected(CDC* pDC,bool select)`函数对节点加上热点进行高亮显示。在 `Selected(CDC* pDC,bool select)`函数中根据传入的参数 `select` 设置了图元类基本属性 `m_bSelected`，并调用了虚函数 `HotPoints(CDC* pDC)`。其定义为

```

void CDrawObject::Selected(CDC* pDC,bool select)
{
    if(!this)
        { //如果类指针无效，直接返回
            return;
        }
    if(select)
        {
            if(!m_bSelected)
                {
                    HotPoints(pDC);
                    m_bSelected=true;
                }
        }
}

```

```

}
else
{
    if(m_bSelected)
    {
        HotPoints(pDC);
        m_bSelected=false;
    }
}
}

```

在具体的节点类中实现了虚函数 `HotPoints(pDC)`, 此函数调用了图元基本类的函数 `HotPoint(CDC* pDC, long x, long y)` 以将对应的热点即四个实心小矩形显示在节点的上下左右方向上。函数 `HotPoint` 使用了异或的绘制模式显示热点, 关于异或绘制模式的说明可参看 5.1.1.6 节中方框的移动。

单击视图绘制区空白处可取消拾取。

#### 4) 节点属性编辑

为方便后续的分析, 定义了节点的输入、输出属性。如果一个节点只有输入属性则为起点, 只有输出属性则为终点, 既有输入又有输出则为一般节点。在拾取节点后出现节点属性编辑对话框, 对话框中提供起点、终点下拉框进行节点属性的编辑。

#### 5) 节点删除

删除拾取的节点需要通过遍历数组 `m_aObjects` 对比选中的图元得到需要删除的节点对象, 再使用 `delete` 运算符删除数组中的对应项并删除节点对象。对应的语句为:

```

if(m_usrCurrentObject) //当前选中了图元
{for(int i=pDoc->m_aObjects.GetSize()-1;i>=0;i--)//遍历图元数据列表
    {if(pDoc->m_aObjects[i]==m_usrCurrentObject)
        { pDoc->m_aObjects.RemoveAt(i); //找到须删除的图元
        delete m_usrCurrentObject;
        m_usrCurrentObject=NULL;
        break;
        }
    }
}

```

删除后调用语句 `Invalidate()`;来更新视图。

### 5.2.1.5 汇合节点

汇合节点是组合系统方框图的重要图元，主要功能是将信号进行汇合。汇合节点类的定义、生成、拾取和删除与节点基本相同。不同之处在于汇合节点有四个属性 `int m_l1, m_l2, m_l3, m_l4`; 表示汇合输入信号的正负性以及是否是输出信号。值为 1 表示输入正信号，为 -1 表示输入负信号，为 0 表示输出信号。一个汇合节点最多只能接收四个输入或输出信号（支路）。在图形表示上比节点多了圆内的四个正（负）号。汇合节点的属性编辑因此也与节点不同，双击汇合节点，出现汇合节点的属性对话框，在对话框中提供上、下、左和右四个方向的正负输入连接或输出连接下拉框进行选择。

### 5.2.1.6 方框

方框是组合系统方框图中表示子系统的图元。

#### 1) 方框类定义

方框的属性主要有：方框的坐标，高度和宽度，输入输出的个数，子系统的传递函数矩阵。因为子系统的传递函数可以由用户在软件中输入信号流图并分析后得到，也可以直接的用字符表达式进行输入，所以有一个属性 `sourcepro` 表示子系统的传递函数矩阵是来自于哪里。方框类的属性定义为

```
class CDrawSubsystem:public CDrawObject
{
public:
    long m_x,m_y;//位置
    long m_width,m_height;//高度，宽度
    long m_inputnum,m_outputnum;//输入输出的个数
    CStringList strlist_den;//传递函数分母矩阵
    CStringList strlist_num;//传递函数分子矩阵
    subsys_transfer_source sourcepro;//子系统的传递函数是来自于信号流图
    还是方框子系统属性编辑对话框
}
```

方框上有若干个小圆表示方框的输入或输出连接点，左边的圆环表示输入，右边的圆环表示输出。根据输入输出的个数，在两边均匀的绘制圆环。在用有向折线连接方框时，会跟踪这些输入输出的连接点。

#### 2) 方框生成

## 3) 方框拾取

## 4) 方框删除

方框的生成、拾取、删除与节点的生成、拾取、删除类似。

## 5) 方框属性编辑

方框的高度和宽度、输入输出个数都是可以编辑的。在双击方框后弹出的子系统属性编辑框中提供了相应的文本框进行字符或数字输入。单击方框，在菜单中选择“编辑”-“子系统”，则进入子系统编辑状态。因信号流图表示的是组合系统里的子系统，也即信号流图都是与一个方框相关的，所以信号流图的图元类都有一个属性标志此信号流图属于哪个方框。为了方便显示信号流图和分析信号流图得到传递函数矩阵并与组合系统的方框关联，在信号流图的图元类中定义了两个属性 `CDrawSubsystem *m_pcursubsys`（方框类指针）和 `int m_cursubsysInt`（方框序号）来表示与方框的从属关系。

## 6) 方框移动

选中的方框的移动通过执行虚函数 `MoveAt(CDC* pDC,int flags,long x,long y)`来实现，在 `OnMouseMove(UINT nFlags, CPoint point)`事件中得到鼠标在绘图区的位置，设置为方框的新坐标。在 `MoveAt` 函数中要将旧方框擦除，然后根据新的鼠标位置画出新方框。MFC 提供了一种异或的绘制模式可以实现该功能，实现语句为 `SetROP2(R2_XORPEN)`，异或绘制模式的意思是像素的颜色取画笔和背景色的异或。一般背景色为白色，如果在待画的位置上没有画过方框则像素颜色为画笔色的反色，如果在待画的位置上已经画过方框则像素颜色为画笔色的反色与画笔色的异或即为背景色白色。这里需要注意的是如果想实际绘制的颜色为某种颜色，则应该设置画笔的颜色为这种颜色的反色。实现有向直线、圆弧和折线橡皮线的绘制也是利用了异或绘制模式。

## 5.2.1.7 有向直线

## 1) 有向直线类定义

有向直线表示的是信号流图里的支路。有向直线类的属性定义为

```
class CDrawLine:public CDrawObject
{
public:
    long m_x,m_y,m_xx,m_yy;//起点和终点坐标
    int m_nf,m_nt;//连接的节点号
```

```
CString m_numstr,m_denstr;//传递函数的分子和分母
CDrawSubsystem *m_psubsys;// 属于哪个子系统方框
};
```

### 2) 有向直线生成

有向直线的起始点和终结点坐标分别与它的起始节点和终结点相连，在绘制有向直线时必须跟踪节点，以提示用户要连接的节点。通过 `bool CircleChoose(CPoint point, CPoint& ptchosen)` 函数遍历所有的节点，如果鼠标在某节点的上下左右附近则在节点的此方向上显示一个实心小圆，提示用户此时单击鼠标即可在在节点的这个方向上连接节点。此外 `CircleChoose` 函数返回一个鼠标位置变量，该变量精确返回节点的位置坐标，避免连接节点时由于提示作用单击鼠标引起的误差。绘制提示实心小圆也使用了异或的绘制模式，也即在鼠标移动提示时必须清除上次的附近节点提示然后再显示当前的附近节点。

由于直线是由两个点构成的，需要用户确定两个点的坐标，因此能够在确定直线第二个点之前追踪鼠标运动的橡皮线是十分必要的，橡皮线的绘制利用了异或的绘制模式，在 `OnMouseMove(UINT nFlags, CPoint point)` 事件中利用图元类的 `MoveAt(pDC, m_nMoveMode, ptchosen.x, ptchosen.y)` 来实现。具体操作为将绘图模式变为异或模式，擦除旧线，再绘制当前鼠标移动所确定的新线，即能显现出橡皮线拖动的动态效果。

### 3) 箭头生成

有向直线的箭头代表了支路方向，在有向直线的终结点处绘制一个实心的三角形代表箭头。在基类 `CDrawObject` 中实现了函数 `DrawArrow(CDC* pDC,long x, long y, long xx, long yy)` 来绘制箭头，`x`、`y` 和 `xx`、`yy` 分别为直线的起始点和终结点坐标。

如图 5.6 所示中的有向直线，设  $k$  为直线的斜率， $\alpha$  为箭头的夹角， $L$  为组成箭头的其中一条线的长度， $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$  分别为箭头的两个端点的坐标。则有公式  $x_1 = x - L * \sin(\alpha \pm \text{atan}(k))$ ， $y_1 = y \pm L * \cos(\alpha \pm \text{atan}(k))$ ， $x_2 = x + L * \sin(\alpha \pm \text{atan}(k))$ ， $y_2 = y \pm L * \cos(\alpha \pm \text{atan}(k))$ ，其中的加减号根据直线的倾斜方向来确定。

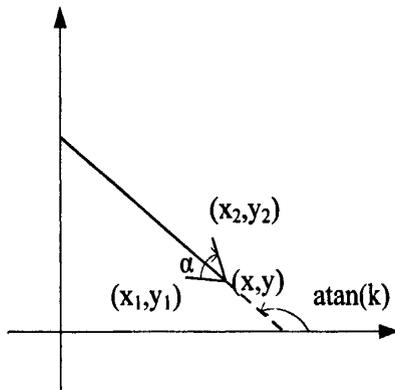


图 5.6 箭头端点坐标示意

#### 4) 有向直线拾取

如果要删除有向直线或编辑其属性，必须先拾取它。当软件在选择状态时，可拾取有向直线，使用虚函数 `SelectAt(long x,long y)` 来判断鼠标单击的位置是否有在有向直线上。判断的标准为单击的位置到有向直线的距离是否小于某一距离值。其拾取的标志是端点各显示一个实心小矩形。

#### 5) 有向直线属性编辑

有向直线可编辑的属性为其代表的支路传递函数。选中了有向直线，则弹出传递函数分子分母编辑栏。输入字符，单击修改即可编辑其传递函数。值得注意的是后面的分析采用了 MATLAB 的符号运算，所以这里传递函数的输入应遵循 MATLAB 符号表达式的规范。

#### 6) 有向直线删除

有向直线的删除与节点的删除相同。

### 5.2.1.8 有向圆弧

#### 1) 有向圆弧类定义

有向圆弧表示的是信号流图里的另一种支路。有向圆弧类的属性定义为

```
class CDrawArcur:public CDrawObject
{
public:
    long m_x,m_y,m_xx,m_yy,m_x1,m_y1;//有向圆弧的三个点坐标
    int m_nf,m_nt;//连接的节点号
    CString m_numstr,m_denstr;//传递函数的分子和分母
    CDrawSubsystem *m_psubsys;//属于哪个子系统方框
```

}

## 2) 有向圆弧生成

有向圆弧由三个点确定, 在选择起始点和终结点之后, 由第三点确定圆弧的形状。在绘制圆弧时使用 VC 的 Arc 函数, 这个函数的参数为圆弧的圆外接矩形的左上角、右下角、圆弧起点和终点。设 $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ 分别是圆弧的起点、终点和第三点, 则可由两条两点之间的中垂线的焦点确定出圆心

$$x_0 = \frac{(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) + (x_1^2 - x_2^2)(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1)(x_3^2 - x_2^2)}{2 \times (y_3 - y_2)(x_1 - x_2) + (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)},$$

$$y_0 = \frac{(x_1 - x_2)(x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2})}{y_2 - y_1} + \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ 圆弧的半径为 } r = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}。$$

则圆弧圆的外接矩形的左上角点坐标和右下角点坐标为 $(x_0 - r, y_0 - r)$ 和

$(x_0 + r, y_0 + r)$ 。由此数学模型即可确定出圆弧。正如绘制有向直线, 在选择输入起点和终结点的位置时也需要跟踪节点, 在确定终结点位置时需要橡皮线动态的显示有向直线, 而在选择圆弧的第三点的位置时要使用橡皮线动态的显示圆弧。

值得注意的是有向圆弧也可能是自环, 即起始点和终结点重合的圆, 此时的绘制算法与圆弧的生成不同: 以起始点(终结点)和确定自环大小的第三点之间的距离为直径生成自环圆。

## 3) 箭头生成

绘制有向圆弧的箭头实际上是绘制圆弧在终结点的切线的箭头。圆弧在终结点的切线方程为 $y = -\frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}(x - x_2) + y_2$ , 根据圆弧的方向确定切线起点的 x

坐标, 带入切线方程即可得到绘制箭头函数 DrawArrow(CDC\* pDC, long x, long y, long xx, long yy)所需的参数即有向直线的起始点坐标和终结点坐标。自环在终结点的切线是与终结点到确定自环大小的第三点的直线垂直的, 自环的箭头方向定为顺时针方向。

## 4) 有向圆弧拾取

在删除有向圆弧或编辑其属性之前必须先拾取它。判断鼠标是否有向圆弧上的标准为单击的位置到确定圆弧的三个点确定的直线的距离是否小于某一距离值。其拾取的标志是确定圆弧的三个点各显示一个实心小矩形。

## 5) 有向圆弧属性编辑

有向圆弧可编辑的属性为其代表的支路传递函数。选中了有向圆弧，则弹出传递函数分子分母编辑栏。输入字符，单击修改即可编辑其传递函数。

#### 6) 有向圆弧删除

有向圆弧的删除与节点的删除相同。

### 5.2.1.9 有向折线

#### 1) 有向折线类定义

有向折线代表的是组合系统里的输入输出连接关系。有向折线类的属性定义为

```
class CDrawTurnline:public CDrawObject
{
public:
    long m_x,m_y,m_xx,m_yy;//起始点、终结点坐标
    long m_xn[TURNLINENODE],m_yn[TURNLINENODE];//端点坐标数组
    int m_turnlinenode;//折线的端点数
};
```

#### 2) 有向折线生成

有向折线可以有多个端点，但为了图形显示的方便，规定端点数不能超过 4 个（不包括起始点）。有向折线与有向直线的绘制鼠标动作略有不同。有向直线的操作为单击鼠标左键确定起始点，按住鼠标左键拖动鼠标，最后松开鼠标确定终结点。有向折线的操作为单击鼠标左键并松开确定起始点，拖动鼠标，单击鼠标左键并松开确定第二个端点再拖动鼠标继续直到折线的五个端点全被确定或者折线的端点连接到方框的连接点。绘制有向折线时跟踪节点或方框输入输出点的方式与绘制折线跟踪节点的方式也不同，当处在绘制折线状态时移动鼠标到节点连接点或方框连接点附近时，鼠标的形状由十字变为双十字提示用户此时单击鼠标即可连接该节点或方框。

在鼠标左键抬起的响应事件 OnLButtonUp(UINT nFlags, CPoint point)里调用

```
CDrawTurnline *m_usrCurrentObject=new CDrawTurnline (UD_RED,turnline_i);
创建一个有向折线,调用 m_usrCurrentObject->NewPoint(ptchosen.x, ptchosen.y);
确定起始点。调用以下语句来确定有向折线的第 m_turnlinenode 个端点。
pdrawturnline=(CDrawTurnline *)m_usrCurrentObject;
```

```
pdrawturnline->m_turnlinenode++;
```

```
pdrawturnline->m_xn[pdrawturnline->m_turnlinenode]=point.x;
```

```
pdrawturnline->m_yn[pdrawturnline->m_turnlinenode]=point.y;
```

调用 `pDoc->m_aObjects.Add(m_usrCurrentObject)`;将有向直线对象指针保存在文档类的数据成员数组中。在鼠标移动响应事件 `OnMouseMove(UINT nFlags, CPoint point)`里调用 `SubsystemOrSumnodeChosen(CPoint point, CPoint& ptchosen)` 函数跟踪用户的输入提示节点或方框的连接处, 此函数遍历了所有的节点和方框的连接点的坐标, 如果鼠标的位置靠近某个连接点坐标则返回 `true` 和当前的连接点坐标到变量 `ptchosen` 中以进行精确的定位, 另外还调用了 `CDrawTurnline` 类的虚函数 `MoveAt(CDC* pDC,int flags,long x,long y)`显示橡皮线。

有向折线的生成流程可以参看图5.7 (b) `OnLButtonUp`事件处理的流程图中对“Case:IDT\_TURNLINE:绘制有向折线”的流程处理。

### 3) 箭头生成

有向折线的箭头按最后一段线来生成, 方法与有向折线一致。

### 4) 有向折线拾取

有向折线的拾取需要依次鼠标单击位置到组成折线的所有线段的距离, 如果有一个小于设定的距离值, 则被拾取。考虑折线的起始点和终结点也能移动, 所以当鼠标单击在起始点或终结点附近时, 也应被拾取, 且返回一个起始点或终结点被选中的状态给主程序。

### 5) 有向折线属性编辑

组合系统方框图里的有向折线与子系统信号流图的有向直线、有向圆弧不同, 它只代表节点和方框之间的连接关系, 不需要用户输入属性。

### 6) 有向折线移动

调用了 `CDrawTurnline` 类的虚函数 `MoveAt(CDC* pDC,int flags,long x,long y)` 显示橡皮线。拾取有向折线和有向折线的起始点和终结点时, 传入的参数 `flags` 不同, 以此来判断绘制对应的橡皮线。在移动折线和起始点时, 绘制橡皮线采用的不是异或绘制模式, 而是用背景色绘制已遮盖旧的折线, 这是因为箭头的绘制使用了画刷填充, 如果用异或模式则旧折线箭头的显示会留下痕迹。

### 7) 有向折线删除

有向折线的删除与节点的删除相同。

## 5.2.1.10 图形编辑程序主要流程

图形编辑程序使用 windows 消息驱动方式, 通过事件处理器完成图形绘制。图形编辑的操作主要由鼠标操作来完成。鼠标的操作响应事件及对应功能为:

左键按下 OnLButtonDown: 各种图元的生成、选择和选择取消;

松开 OnLButtonUp: 主要完成将生成的图元加入到数组中的功能; 避免有向直线的误生成; 有向折线的生成以及其端点坐标确定; 有向弧线的弧度确定;

双击 OnLButtonDbIClk: 查看汇合节点和方框的属性;

移动 OnMouseMove: 某些图元的移动, 线或圆弧的橡皮线生成;

视图类 CAnlyView 继承窗口类 Cwnd, 主要负责已绘制图形的显示, 鼠标的响应事件均放在视图类 CAnlyView 中。在鼠标响应事件中使用 switch-case 语句来处理, 例如在鼠标左键按下响应事件 CAnlyView::OnLButtonDown(UINT nFlags, CPoint point) 中, 依靠用户选取的绘制状态 m\_nMouseMove 来判断程序的流向。

```
switch(m_nMouseMove)
{
    case IDT_ARROW:
        ....
    case IDT_LINE:
        ....
    case IDT_CIRCLE:
        ....
    case IDT_ARCUR:
        ....
    case IDT_SUBSYSTEM:
        ....
    case IDT_SUMNODE:
        ....
    case IDT_TURNLINE:
        ....
}
```

如图 5.7 所示为 OnLButtonDown 事件处理和 OnLButtonUp 事件处理的流程图, 图中的子流程描述略有不同繁简。OnMouseMove 事件处理较为简单, 主要是调用图元的虚拟函数 MoveAt(pDC, m\_nMoveMode, ptchosen.x, ptchosen.y),

这里就不用图形详述了。

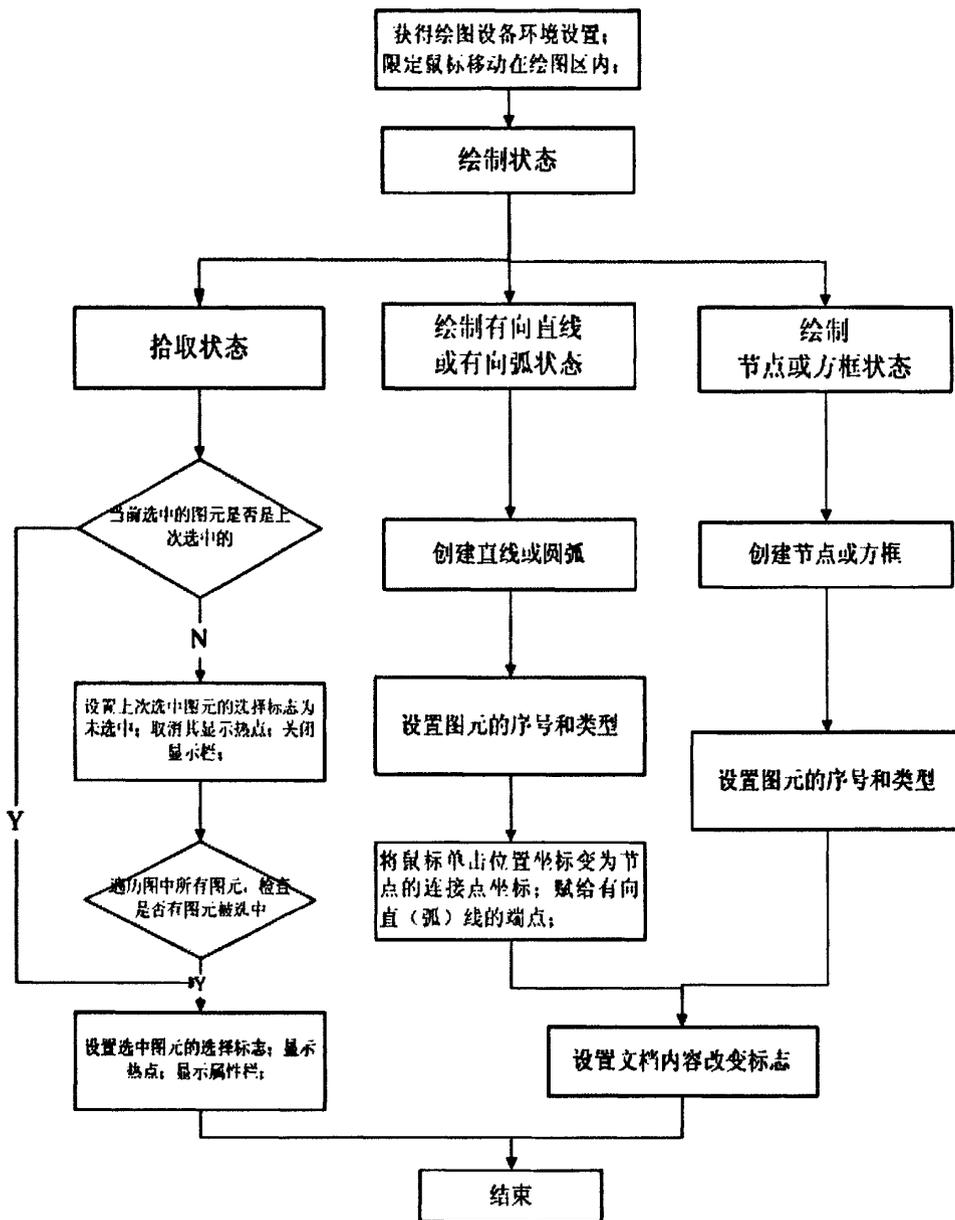


图 5.7 (a) OnLButtonDown 事件处理的流程图

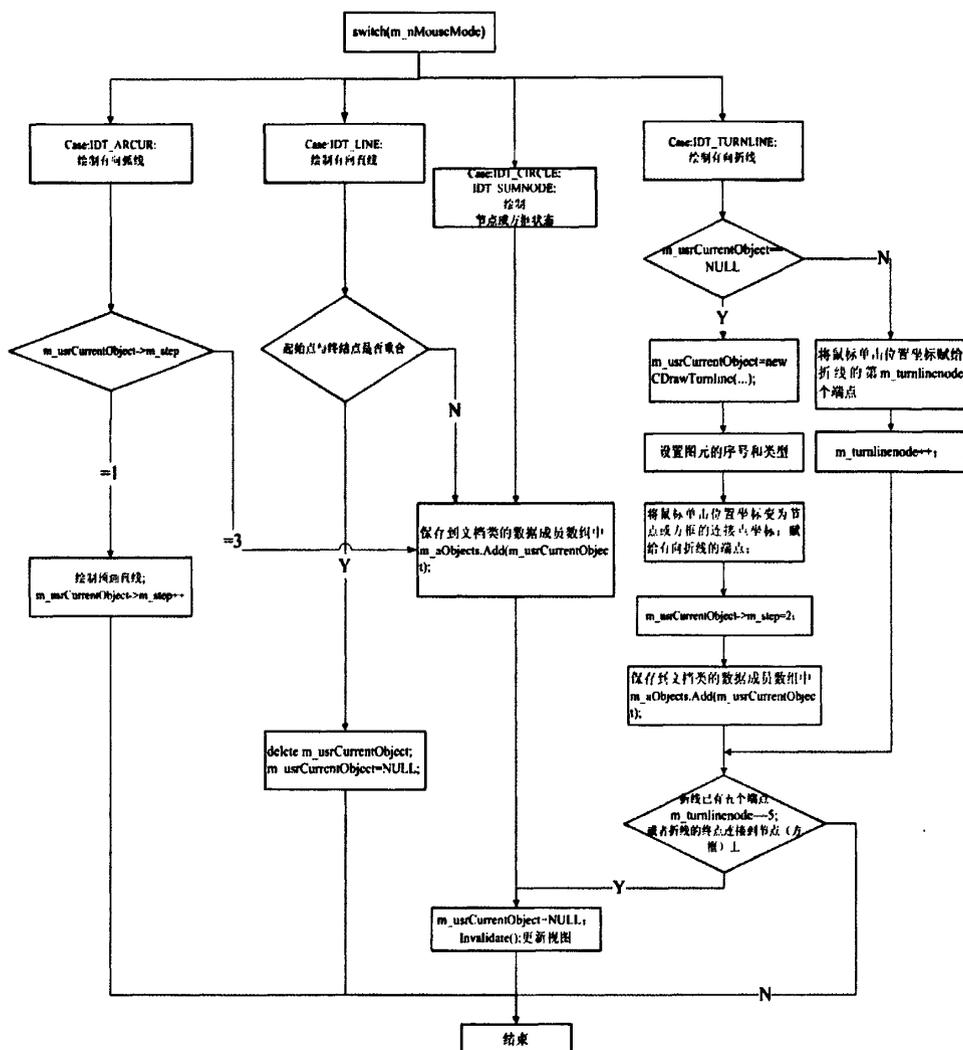


图 5.7 (b) OnLButtonUp 事件处理的流程图

## 5.2.2 软件主界面设计

软件的主界面提供了具体的管理和操作软件的命令，是一个交互式的用户平台。主要包括：

### 5.2.2.1 菜单

主界面的基本控制功能由菜单和工具箱决定。主菜单的构成如图 5.8 所示

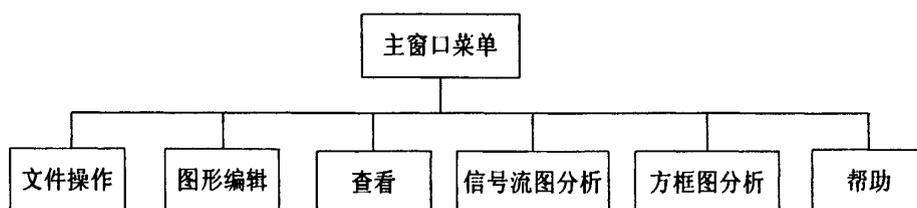


图 5.8 主菜单

菜单的构成和功能为：

- 1) 文件操作：实现图形文件的新建、打开、保存、另存为等功能。在新建新的图形文件和打开旧的图形文件时都要提醒用户是否需要保存正在编辑的图形；同时还必须检查用户为正在编辑的文件输入的文件名是否与已存在的文件重名，若重名，则提醒用户需要进行另存操作或者覆盖保存；在进行新建、打开操作时，必须先使用 `delete` 操作符释放所有由 `new` 操作符动态分配的内存，以防止内存泄露。
- 2) 图形编辑：提供删除、查看图元属性、切换组合系统和子系统编辑的功能。
- 3) 查看：提供用户选择工具栏和状态栏是否显示的功能。
- 4) 信号流图分析：包括为子信号流图所属的方框计算传递函数矩阵的功能和计算信号流图的时域实现（即状态方程和输出方程）的功能。提供两个对话框分别显示信号流图的能控型实现和能观型实现。
- 5) 方框图分析：分析方框图的结构能控和能观性，显示组合系统的多项式矩阵描述。
- 6) 帮助：提供在线帮助功能，此功能在当前暂未提供。

### 5.2.2.2 工具栏

工具栏提供文件操作和图形编辑的功能。工具栏的面板位置可浮动，可以保留更多的屏幕空间给图形设计。软件工具栏包括七个图元工具按钮：选择按钮、节点按钮、信号流图的有向直线按钮和有向弧线按钮以及方框图的有向折线按钮、汇合节点按钮和方框按钮组成。图元工具按钮和支持文件新建、打开、保存、剪切的快捷键按钮也放在同一工具栏中。

### 5.2.2.3 状态栏

在主窗口的底部为状态栏，状态栏显示了图形编辑时鼠标移动的位置，图形编辑的状态等相关的图形操作信息。

### 5.2.3 输入的规范

在程序设计中,节点、支路的生成和相应的操作方式已保证图形网络拓扑结构的正确性,如在绘制有向直线时避免了只有鼠标单击没有移动时生成的无效有向直线,在绘制有向弧线时保证自环也能够生成。绘制有效图形需要做的是按照规范用各种支路连接节点、方框,且在图形中不能有孤立的节点、方框或支路。只有支路引出的为输出节点,只有支路引入的为输入节点,在做下一步的拓扑分析之前,必须设置图形的输入和输出节点,否则程序需要先自行遍历节点找出输入和输出节点才能做进一步的分析。

支路传递函数分子和分母的输入、方框传递函数分子矩阵和分母矩阵元素的输入的必须是  $s$  的多项式并符合 MATLAB 符号表达式的规范,为后面的 MATLAB 符号运算做好准备。

### 5.2.4 图形数据文件

已绘制好的图形可以保存为图形文件,以备下次调出使用。一般文件的存储格式主要有文本和二进制,二进制文件读取速度快,能够用 MFC 库进行序列化,是主流的文件输出格式。MFC 的序列化使程序中的对象永久保存,即将内存存储转换为硬盘存储。反序列化从文件中读出已序列化的对象,并用读出的数据给对象赋值,将硬盘存储转换为内存存储。本软件中的序列化对象就是图元对象,根据 MFC 的规则,可序列化的类必须从 `CObject` 派生,并且在类声明中包含宏 `DECLARE_SERIAL(CDrawObject)`,在类定义中包含宏 `IMPLEMENT_SERIAL`,这样的派生类中有一个虚拟函数 `Serialize()`,重载此序列化函数,按相同的次序读入和写入对象数据。

SDI 框架已经为程序员写好新建时、保存和打开时操作用户选择的文件功能了,一般不需要为此再额外的编写代码。但是如果在新建、保存和打开时要做一些设置如新建时清空内存、关闭属性栏,设置菜单栏,则需要重写保存和打开的函数,并且还要在函数中调用原默认调用的函数以实现 SDI 框架已实现的新建保存和打开功能。

## 5.3. 拓扑分析算法

组合系统方框图和子系统信号流图的拓扑分析是本软件的重要功能。在进行 MATLAB 符号运算得到结构性质之前先通过拓扑分析得到 M 文件。

在传统的拓扑分析方法中，先手工绘出网络原理图或者拓扑图，然后根据一定的算法将图输入到计算机中用某种数据结构保存并执行算法，常用到的有关联矩阵、邻接矩阵、边目录法、二数组法和邻接顺序法等方法。

本软件的图形编辑采用了面向对象的方式，其拓扑分析主要是通过分析绘制的图形得到一系列的表达式，与传统的方法相同的是算法分析的思想，不同的是使用的数据结构就是绘制的图元本身的一些属性，中间产生的某些分析结果则用自定义的数据结构保存。

信号流图是由 Mason 于 1953 年在线性系统分析中引进的，它用于线性代数方程组的图形表示<sup>[88]</sup>。信号流图是由节点和支路组成的一种信号传递网络，描述了信号从系统一点到另一点的流动情况。因为信号流图能从直观上表现出系统各变量的因果关系，所以它是线性系统分析中一个著名和有用的工具。信号流图的节点可直接代表微分方程组中的系统变量。信号流图在仿真中起着重要的作用。

信号流图的 Mason 公式表示为  $G = \frac{1}{\Delta} \sum_i Q_i \Delta_i$ ，其中  $\Delta = 1 - \sum_k C_k + \sum_{l,m} C_l C_m - \sum_{n,o,p} C_n C_o C_p + \dots$  为信号流图的特征式， $\sum_k C_k$  为所有回路的传递函数的和， $\sum_{l,m} C_l C_m$  为所有两两互不接触回路的传递函数乘积的和， $\sum_{n,o,p} C_n C_o C_p$  为所有三个互不接触回路的传递函数乘积的和； $Q_i$  为第  $i$  条前向通道的传递函数； $\Delta_i$  为在  $\Delta$  中将所有与前向通道  $Q_i$  相接触的所有回路的传递函数置为 0 后所得的表达式，称为前向通道的流图回路特征余因子式。

组合系统方框图的拓扑分析较容易。而根据梅逊公式，信号流图的分析需要找出信号流图中的前向通道、回路、互不接触的回路和与前向通道无接触的回路从而得到系统的传递函数。

### 5.3.1. 组合系统的关联矩阵

分析组合系统方框图时，主要是要得出四个关联矩阵：表示子系统之间输出和输入的关联矩阵  $F$ 、整个系统输入和子系统输入的关联矩阵  $G$ 、子系统输

出和整个系统输出的关联矩阵  $J$  和整个系统输入和输出的关联矩阵  $K$ <sup>[13]</sup>, 由连接关系知这四个矩阵的元素为 0、1 或-1。

以子系统之间输出和输入的关联矩阵  $F$  为例, 遍历每个子系统的输出节点, 检查其是否连接到某个输入节点上, 有的输出节点经过若干个综合节点而连接到输入节点上, 应注意最终的连接的正负号是所有综合节点的正负的乘积。其余的关联矩阵的寻找类似。

### 5.3.2. 信号流图的前向通道、回路

在分析信号流图的拓扑结构之前, 需要建立节点与支路的连接关系, 遍历所有的节点, 寻找与之相连的支路, 并将支路的序号赋给节点的连接支路数组, 包括引出支路和引入支路, 同时也将节点的序号赋给连接支路的两个变量: 起始点序号和终结点序号。之后根据这些连接的节点和支路便可探寻回路和前向通道了。

已知信号流图的输入节点和输出节点, 根据信号流图分析前向通道的算法如下所述。从输入节点开始, 由此节点的连接支路得到下一个节点, 再由此节点的连接支路继续往下探寻直到到达输出节点为止。需要注意的是因为存在回路, 所以探寻的节点可能会和前面已经探寻的节点有重复, 此时不能继续往下探寻, 应退回上一个节点寻找下一个连接支路。在探寻完一个前向通道后, 也应该退回到上一个节点寻找下一个连接支路。所以应在节点上设置一个属性变量  $m\_iterline$  标志此节点的哪些连接支路是已经被探寻过的。

寻找回路的算法与前向通道类似, 但是不同的是回路的起始节点和终止节点都是同一个节点, 搜索回路必须从每一个有输入和输出回路的节点出发。但是这样搜索出来的回路必定会有重复的, 且效率不高。利用属性变量  $m\_lock$  来锁住节点, 使得节点的探寻不会与前面的回路重复。流程图如图 5.2 所示, 具体流程说明如下。

- 1、遍历所有的节点作为起始节点; 初始化节点锁状态: 如果节点已遍历过则解锁, 否则锁住; 起始节点解锁。

- 2、由始发节点的支路找到下一个节点, 如果此节点锁住则回到上层节点继续找下一个支路的输出节点直到找到解锁的节点为止。

- 3、如果找到解锁的节点锁住该节点并重复以上 2 过程, 在此过程中如果找到的节点为始发节点则找到一个回路找到回路后退回上层节点继续搜索, 如果

全部支路全找完则退回上层节点。

4、退回到了始发节点且始发节点的支路已经全部探寻过了，则回到 1。

例如图 5.11 中的一个回路  $n_2n_3n_4n_5n_2$ ，如果不采用锁住节点的办法那么会找出 4 个完全相同的回路如  $n_3n_4n_5n_2n_3$ ， $n_4n_5n_2n_3n_4$  等，如果采用上面的方法根据遍历节点的顺序则找出的回路为  $n_5n_2n_3n_4n_5$ ，不会有重复的回路并花额外的时间来找重复的回路。

### 5.3.3. 信号流图的互不接触的回路、与前向通道无接触的回路

由 5.3.2 中的算法已经得到所有的前向通道和回路。寻找与前向通道无接触的回路较简单，比较前向通道和回路之间有无相同的节点或支路即可获知是否有接触。

寻找互不接触的回路时，先找出两两互不接触的回路。两两互不接触的回路寻找方式与寻找与前向通道无接触的回路相同。寻找  $mn$  ( $n>2$ ) 互不接触回路时，在  $(n-1)(n-1)$  互不接触回路的基础上添加一条与所有回路不接触的回路即可。如果  $(n-1)(n-1)$  互不接触回路的只有一组或没有，则不可能有  $mn$  互不接触的回路。

### 5.3.4. 数据结构和流程图

在前面为了实现图的绘制编辑功能，定义了一个数组保存所有的图元。但是在进行图的拓扑分析时，经常要多次遍历某类型的图元，如在所有的节点中找到一个节点。在这个大的图元数组中进行遍历是花时间且不必要的。为此根据图元的类型定义了若干个数组例如节点数组、汇合节点数组、有向直线数组等，在拓扑分析时直接在这些数组中遍历将缩短寻找目标图元的时间。但同时要注意时刻维护这些数组：可以在拓扑分析之前，将这些数组初始化一遍，也可以在新建、删除图元时维护这些数组，采用前者则程序代码维护量稍小点，如果图元数量较多，采用后者则在可以减少拓扑分析时间。

组合系统的拓扑分析是边分析边输出到 M 文件中，没有额外的定义变量来进行中间分析结果的保存。

信号流图的分析结果稍复杂，因此在程序中专门定义了一个前向通道回路类 CWayObject 来保存拓扑分析的结果。其中的变量  $m\_way$  类型为结构体 Way

数组, 结构体 Way 表示构成前向通道回路的节点或支路, 只有两个变量参数 num 和 style, 分别表示节点或支路的序号以及类型 (节点、支路或结束标志符)。

```
class CWayObjec
{
public:
    CWayObject();
    CWayObject(CWayObject &wayob);
    const CWayObject& operator = (const CWayObject &wayob);
    virtual ~CWayObject();
public:
    CString m_name;//名称
    CString m_dertal;//前向通道的特征余因子式, 回路的此属性为 null
    CArray<Way,Way&> m_way;//前向通道(回路)的所有节点和支路
    CArray<CWayObject,CWayObject&> m_untouchlw;//不接触的回路
};
```

定义了两个 CWayObject 数组 CArray <CWayObject,CWayObject&> m\_forWay;和 m\_loopWay;表示信号流图的所有前向通道和回路。

在搜寻前向通道时, 使用了一个临时的局部变量 Way 数组 tempway, 每当找到一个前向通道时, 生成一个 CWayObject 变量 newforway 把 tempway 赋给 newforway 的成员变量 m\_way, 并将 newforway 加入到数组 m\_forWay 中。回路的搜寻处理类似。

寻找到的前向通道或回路的无接触回路放在成员变量 m\_untouchlw 中, 只找寻序号比自己大的无接触回路, 例如如果回路 Q1 和 Q2 无接触, 则回路 Q1 的 m\_untouchlw 中有 Q2, 但回路 Q2 的 m\_untouchlw 中没有 Q1, 这样方便下一步寻找三三不接触的回路。

nn(n>2)不接触的回路用二维数组保存, 且只保存了回路的名称。定义了 typedef UltraCArray\_T<CString, CString&> NUNTOUCH; 和 typedef UltraCArray\_T<NUNTOUCH, NUNTOUCH&> ALLUNTOUCH;两种类型。NUNTOUCH 为一维字符串数组保存相互不接触的回路, ALLUNTOUCH 为保存所有 nn 不接触的回路数组, 实际上是一个字符串二维数组。定义 ALLUNTOUCH 型变量 m\_AllUntouchWay 保存了所有 nn 互不接触的回路(n>2), m\_AllUntouchWay 的第 i 个数组的大小为 nn 不接触回路的 n 的值。定义 NUNTOUCH 型变量 m\_Em

uxim 保存信号流图的特征式。

如图 5.9 所示为分析回路的流程图。

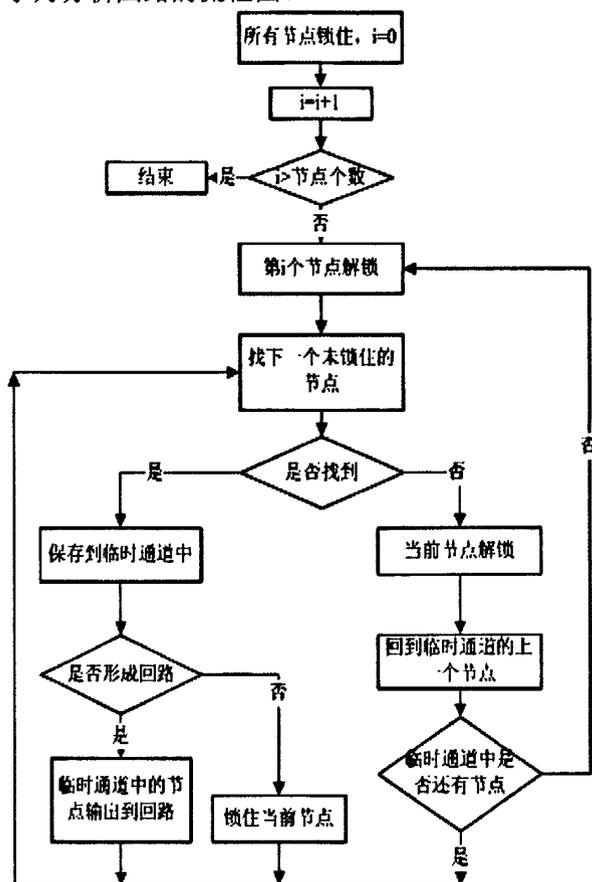


图 5.9 寻找信号流图回路的流程图

## 5.4. 组合系统结构性质分析 (Matlab 算法)

### 5.4.1 计算子系统的传递函数矩阵

传递函数矩阵的计算放在 MATLAB 中进行<sup>[68-72]</sup>。先将各支路的传递函数表达式、上一步得到的前向通道和回路的表达式、信号流图特征式和前向通道的流图回路特征余因子式写入一个 m 文件中，在 VC++ 中利用 MATLAB 引擎服务来调用 matlab 函数，运行 m 文件。以下为输出的 m 文件示例，其中 % 为注释的部分，分析的是图 5.11 中的信号流图。

```
L1=(sym('1'))/(sym('1'));
```

```

L2=(sym('1'))/(sym('1'));
L3=(sym('kp1'))/(sym('1'));
.....略
L8=(sym('1'))/(sym('s'));
A1=(sym('1'))/(sym('1'));
A2=(sym('1'))/(sym('1'));
%前向通道一共有 2 条
Q1=L1*L3*L5*L7;
Q2=L2*L4*L6*L8;
%回路有 2 条
C1=L3*L5*L7*A1;
C2=L4*L6*L8*A2;
EMUXIM1=C1+C2;
%C1 和 C2 无接触;
EMUXIM2=C1*C2;
DET=1-EMUXIM1+EMUXIM2;
%Q1 与 C2 无接触
%Q2 与 C1 无接触
DET1=1-C2;
DET2=1-C1;
%从输入节点 n1 到输出节点 n7 的传递函数为
Gs0_0=simplify((Q1*DET1)/DET);
%从输入节点 n1 到输出节点 n9 的传递函数为
Gs1_0=simplify((Q2*DET2)/DET);
%传递函数矩阵
Gs=[Gs0_0;Gs1_0];
运行此 m 文件后可得传递函数矩阵如下图所示。
    
```

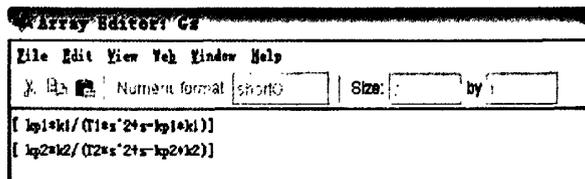


图 5.10 传递函数矩阵

说明：分析的对象是  $F(z)$  上的系统，其传递函数是  $F(z, s)$  环上的元<sup>[9]</sup>，即各支路的传递函数的  $s$  的系数是  $F(z)$  上的元，可以是实数，也可以是参数，如图 4

所示选中的支路 L5 的传递函数为  $\frac{k_1}{T_1 s + 1}$ 。在计算整个子系统的传递函数矩阵时

采用符号运算，使用 MATLAB 提供的 `sym` 函数进行符号参量构造。构造出的变量类型为 `sym object`，且符号变量类型之间可以进行加减乘除等运算。

### 5.4.2 时域模型分析

将子系统的传递函数矩阵利用列（行）最小公分母法化为左 MFD（矩阵分式描述）或右 MFD；由右 MFD 可得到能控性型或控制器型的状态方程和输出方程，由左 MFD 可以得到能观性型或观测器型的状态方程和输出方程<sup>[1]</sup>。这些算法都已在 MATLAB 中由笔者实现，在 m 文件中调用这些函数即可。

图 5.10 所示系统的右 MFD 为

$$\begin{pmatrix} k_{p1}k_1T_2s^2 + k_{p1}k_1s - k_{p1}k_1k_{p2}k_2 \\ k_{p2}k_2T_1s^2 + k_{p2}k_2s - k_{p1}k_1k_{p2}k_2 \end{pmatrix} \left( (T_1s^2 + s - k_{p1}k_1) \times (T_2s^2 + s - k_{p2}k_2) \right)^{-1},$$

左 MFD 为

$$\begin{pmatrix} T_1s^2 + s - k_{p1}k_1 & 0 \\ 0 & T_2s^2 + s - k_{p2}k_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_{p1}k_1 \\ k_{p2}k_2 \end{pmatrix}$$

如下所示为 MATLAB 求出的图 5.11 的一个能观性型实现的系数矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{p1}K_1}{T_1} & -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_{p2}K_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_{p1}K_1}{T_1} \\ 0 \\ \frac{K_{p2}K_2}{T_2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在已得到子系统的状态方程和输出方程。如 5.3.1 节所述已经得到组合系统的关联矩阵，将其输入至 MATLAB 的 m 文件中，则可以列出整个系统的中间标准形，然后对中间标准形的系数矩阵进行基本行变换变成行标准形，从而得到整个系统的标准的状态方程和输出方程<sup>[25]</sup>，再根据第 2 节的一般系统时域模型结构性质分析方法用 MATLAB 的求秩函数 rank() 求取能控性矩阵的秩，即可得到组合系统的结构能控性。需要注意的是若想得到结构能控性需得到各子系统的能控性型或控制器型实现，若想得到结构能观性需得到各子系统的能观性型或观测器型实现。

### 5.4.3 频域模型分析

第四章得出了一些频域组合系统结构能控的条件，这些条件都是以多项式矩阵的互质性来表达的。将子系统的传递函数矩阵化为不可约的 MFD，直接在

频域上对各子系统传递函数矩阵的不可约 MFD 的分子矩阵和分母矩阵进行互质性分析可以得到系统的结构能控性。传递函数矩阵化为不可约的 MFD 的具体算法是通过把有理分式矩阵转化为史密斯麦克米伦型从而得到不可约的右 MFD<sup>[1]</sup>，在 MATLAB 中用一个  $m$  函数实现。

第 4.2.2 节根据实际的物理系统都具有两种性质且子系统是独立的条件，利用多项式矩阵的秩判据进一步简化了串、并联系统的结构能控判定方法，具体如下所述。对于两个子系统，其不可约右 MFD 分别为  $G_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)$  and  $G_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$ ，则有：

1) 对并联系统，当且仅当多项式矩阵  $[D_1(0) D_2(0)]$  满秩， $D_1(s)$  与  $D_2(s)$  互质，并联系统结构能控。

2) 对串联系统，如果矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$  不满秩， $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  不互质，串联系统结构不能控。如果矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$  满秩且  $N_1(s)$  的列数大于等于行数， $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  互质，串联系统结构能控。如果矩阵  $[D_2(0) N_1(0)]$  满秩且  $N_1(s)$  的列数小于行数，令  $\det(D_2(s)) = s^m \times \varphi_1(s) \times \dots \times \varphi_r(s)$  其中  $\varphi_1(s), \dots, \varphi_r(s)$  互素且  $\varphi_1(s) = 0, \dots, \varphi_r(s) = 0$  没有常数根。设  $\varphi_1(s) = 0, \dots, \varphi_r(s) = 0$ ，将它们分别代入  $[D_2(s) N_1(s)]$  计算  $F(z)$  上的矩阵  $[D_2(\hat{s}) N_1(\hat{s})]$  是否满秩，当且仅当它们都不满秩时， $D_2(s)$  与  $N_1(s)$  互质，串联系统结构能控，否则串联系统结构不能控。

对图 5.3 所示的复杂系统，子系统以传递函数矩阵作为模型，也可以将传递函数矩阵化为不可约 MFD 后得到其 PMD（多项式矩阵描述）<sup>[1]</sup>。第 4.2.3 节根据子系统的 PMD 和关联矩阵推导出了组合系统的 PMD 的表达式。而组合系统的结构能控性可以由其 PMD 中的  $F(z, s)$  上的系数矩阵的互质性得到。第 4.2.2 节中并、串联系统互质性判断的简化方法对于图 5.3 所示的复杂组合系统不适用。虽然子系统独立且具有两个性质，但经图 5.3 这种方式组合后其 PMD 的系数矩阵会含有多个参量，无法分块并用秩判据进行简化。所以只能对 PMD 的  $F(z, s)$  上的系数矩阵进行基本列变换以得到其 gcd（最大公因子），然后判定 gcd 是否是单模矩阵以得到互质性<sup>[1]</sup>。而基本列变换正是算法中需要优化的部分。

直接在频域上进行分析的好处在于无需进行频域到时域的转变。而且尽管文献[22]提供了一些时域上结构能控的规范型判据，但时域上结构能控的最一般的判断要求出能控矩阵的秩，组合系统的能控（观）矩阵维数必定较大，其秩的计算是运算中最困难的部分。判断两个多项式矩阵是否互质时，利用了史密斯矩阵，如果适当的利用符号运算的特点是可以简化求史密斯矩阵的运算。

#### 5.4.4 M 函数的编写

MATLAB 提供了丰富的符号运算功能，但符号多项式和符号矩阵的运算尚未提供。为了进行结构性质的分析需要自己编写 M 函数提供诸如符号多项式相除求商和余数等功能。

基本 M 函数：

- 1) `degreeofpoly(poly, devar)`, 返回以 `devar` 为变量的符号多项式 `poly` 的最高次数, `poly` 和 `devar` 均为 `sym` 符号型;
- 2) `expandall(poly)`, 反复展开多项式 `poly` 直到没有括号;
- 3) `expandall_nocomden(poly)`, 反复展开多项式的分式直到没有公共的分母, 例如  $(s+1)/(s+2)$  展开为  $1/(s+2)*s+1/(s+2)$ ;
- 4) `findhighestdegree(p)`, 返回 `s` 多项式 `p` 的最高次数;
- 5) `finditemcoe(item, char_poly)`, 将以 `s` 为变量的多元有理多项式的字符串表达式 `char_poly` 的某项 `item` 的系数输出到 `coe` 中 (此函数被函数 `polytoarray` 调用), `item` 为 `char` 型格式为 '`s^x`' (`x` 为任意的正整数), 例如: `char_poly='a*s^2+b*s+c'`, 令 `item='s^2'` 则输出 `coe=a`; 令 `item='s^1'` 则输出 `coe=b`; 令 `item='s^0'` 则输出 `coe=c`;
- 6) `findleaestdegrepoly(pm)`, 返回结果为以 `s` 为变量的多项式矩阵 `pm` 的最小次数非零项的行数、列数、次数; 如果 `pm` 为零阵则返回 `[0 0 -1]`;
- 7) `FindQandR(dpoly,spoly)`, 返回多项式 `dpoly` 除以多项式 `spoly` 的商式和余式;
- 8) `[Mh, S, Ml, Fai, Degree]=GetDegreeExpress(pm,type)`, 返回多项式矩阵的列次表达式或行次表达式, 返回变量 `Mh` 是列 (行) 次系数阵、`S` 是 `s` 的多项式阵、对角线上元素为  $s^{k1}$ , 其余为 0、`Ml` 是低次系数阵、`Fai` 是 `s` 的多项式阵、`Degree` 返回列 (行) 次数数组;
- 9) `[A,B,C]=GetRealize(Ds,Ns,type)`, 由 MFD 导出的典型实现 (能控性型、能观性型、控制器型、观测器型);
- 10) `improper2proper(fraction)`, 假多项式分式 `fraction` 化为真分式+整式;
- 11) `isPrime(ds,ns)`, 判断多项式矩阵 `ds` 和 `ns` 是否互质;
- 12) `muladdCol(poly,mulcol,addedcol,pm)`、`muladdRow(poly,mulrow,addedrow,pm)`、`multipleCol(con,coln,pm)`、`multipleRow(con,rown,pm)`、`swapcol(coln1,coln2,mat)`、`swaprow(rown1,rown2,mat)`, 多项式矩阵的基本行列变换;

13) poly\_gcd(d1,d2), 返回两个多项式的公因式;

14) a=polytoarray(p), 将以 s 为变量的多元有理多项式 p 的系数输出到 a 数组中;

15) [Ns,Ds]=ToIrMfdBySmithmac(Gs), 通过把有理分式矩阵转化为史密斯麦克米伦型得到不可约的右 MFD;

16) rspm=ToRowStandard(pm), 将多项式矩阵转为行标准型;

17) [smith,U,V]=ToSmith(pm), 将多项式矩阵 pm 转化为史密斯型矩阵 smith, U 为左变换阵, V 为右变换阵;

另外还有两个基本分析文件用来做对信号流图和方框图系统的分析: Analygfm1.m 文件实现信号流图的传递函数矩阵和状态空间实现。AnalyCompositeIntermediate.m 文件实现组合系统方框图的组合系统的 PMD 计算和能控、能观性分析。

### 5.4.5 分析结果显示

本软件分析的结果主要是系统的结构性质, 最后给出一个对话框来显示这个结果如图 5.17 所示。中间产生的一些结果也可以显示, 比如信号流图的实现也给出一个对话框来显示如图 5.10 所示为 5.4.2 节的分析结果在软件中的显示。如果想查看组合系统多项式矩阵描述, 则可以在 MATLAB 的 workspace 中查看。

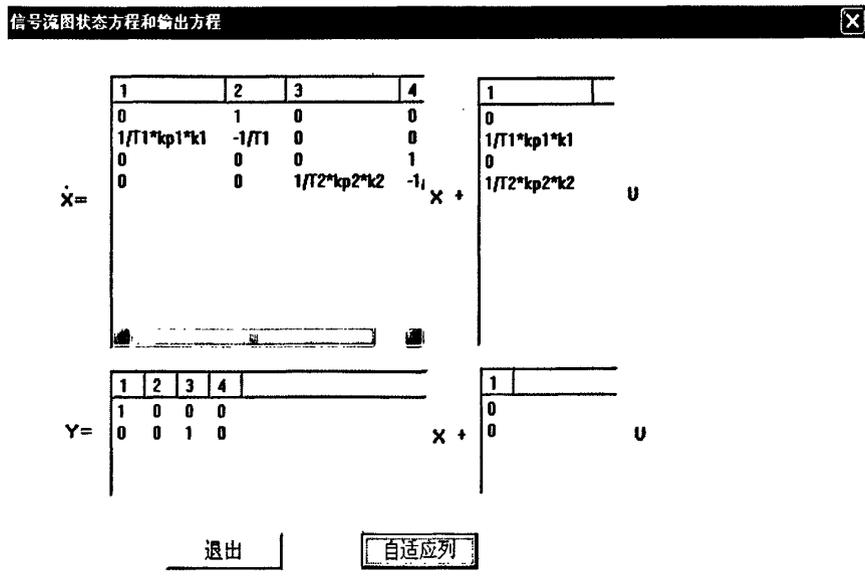


图 5.10 信号流图的能观性实现界面

## 5.5. 分析例子

如图 5.11 所示为分析软件中一个双伺服系统的信号流图，单输入为角度，双输出为两个角度。其中带箭头的线代表支路，选中一条支路后可在左边的属性框中输入其传递函数如图中所示选中了一条支路；绿色圆圈代表输入节点，蓝色圆圈代表输出节点，红色圆圈为混合节点；选中节点后也可编辑节点的属性。

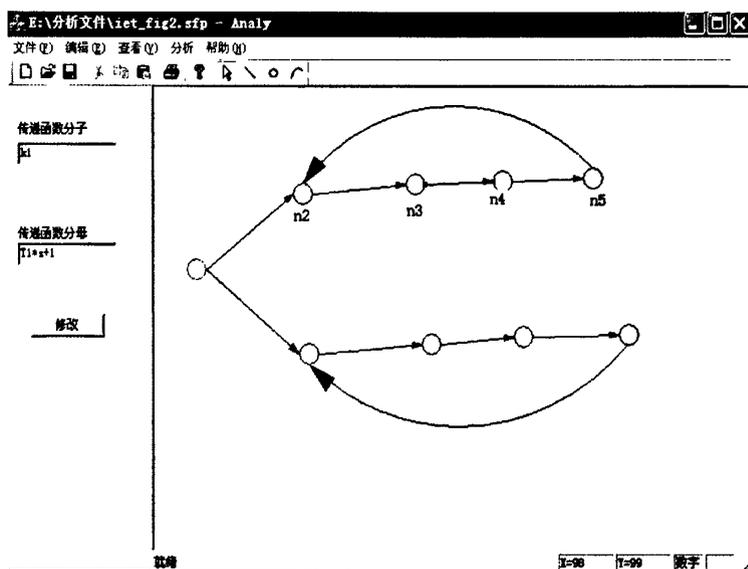


图 5.11 输入信号流图界面

如下图所示为在本软件中绘制的图 5.12 所示的方框图。组合系统方框子系统的输入可采取信号流图或传递函数矩阵直接输入。双击方框图可直接输入该子系统的状态方程或传递函数，也可以单击选择方框后选择菜单“编辑”—“子系统”进入信号流图绘制状态绘制子系统的信号流图。

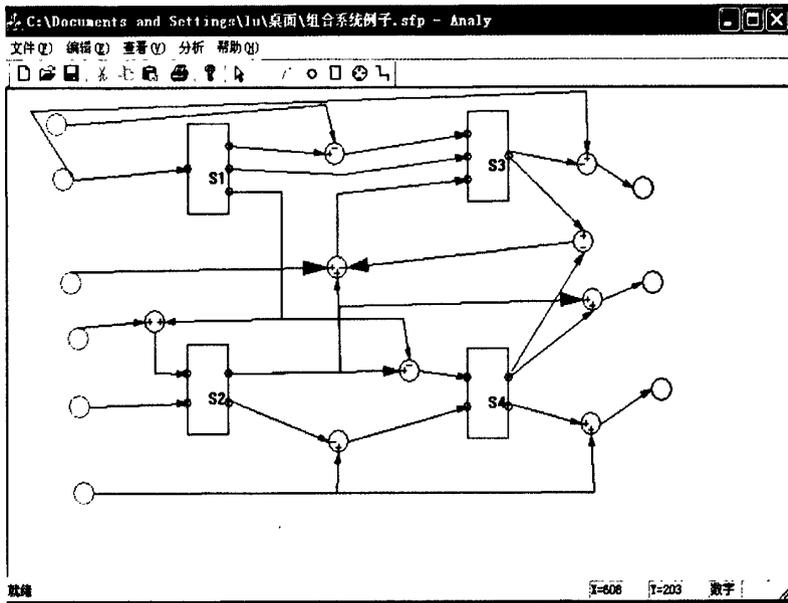


图 5.12 在软件中绘制的表示图 5.3 的组合系统框图

为验证分析软件算法的正确性，对组合系统进行了检验，与此对比的是课题组先前开发的电路辅助分析软件所分析的结果，检验的结果表明本软件的算法能够有效地用于组合系统的可视化建模和结构性质分析。

如图 5.13 所示给出了在电网络辅助分析软件中建立的由两个子电路系统并联的电网络图，在电压源  $V_1$  左、右两边分别是两个子电路系统，他们的输入都为  $V_1$ ，输出选择为  $R_2$  和  $R_1$  上的电压有方向性的相加。如图 5.14 所示为分析出的电路的状态方程和输出方程，以及得出结论本电路结构能控能观。

图 5.15 中为并联系统的方框图，图 5.16 中设置了子系统  $S_1$  的传递函数矩阵，分析的结果如图 5.17 所示显示出系统为结果能控能观的。在 MATLAB 中可以查看到多项式矩阵描述的四个多项式矩阵系数如图 5.18 所示。由于电网络辅助分析软件的结果是时域上的，而本软件的分析结果是频域上的，用分析结果求取系统的传递函数，最后得到在电网络辅助分析软件中的分析结果对应的传递函数矩阵为  $G_{sb} = C * (sI - A)^{-1} * B + D = -R_1 * C_1 * s / (s^2 * C_1 * L_1 + R_1 * C_1 * s + 1) + R_2 * C_2 * s / (s^2 * C_2 * L_2 + R_2 * C_2 * s + 1)$ ，而在本软件中分析结果对应的传递函数矩阵  $G_s = R(s) * P(s)^{-1} * Q(s) + W(s) = -R_1 * C_1 * s / (s^2 * C_1 * L_1 + R_1 * C_1 * s + 1) + R_2 * C_2 * s / (s^2 * C_2 * L_2 + R_2 * C_2 * s + 1)$ ，两者相等。表明本软件分析的结果是正确的。

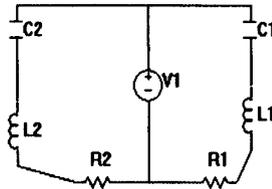
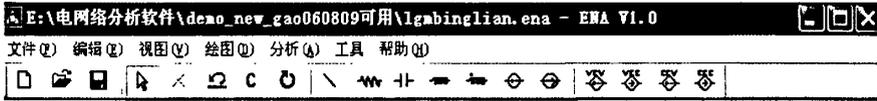


图 5.13 并联电路图

E:\电网络分析软件\demo\_new\_gao060809可用\状...

File Edit Text Window Help

```

1 A矩阵为:
2 [ 0, 0, 1/C1, 0]
3 [ 0, 0, 0, 1/C2]
4 [ -1/L1, 0, -1/L1*R1, 0]
5 [ 1, 0, -1/L2, 0, -1/L2*R2]
6 状态变量为:
7 [ VC1, VC2, IL1, IL2]
8 B矩阵为:
9 [ 0]
10 [ 0]
11 [ 1/L1]
12 [ 1/L2]
13 独立电源V为:
14 V1
15 能控性矩阵T的秩为: R(T)=
16 4
17 由于R=R(T), 所以本电网络可控!
18
                
```

状态方程组.m 输出方程组.m

E:\电网络分析软件\demo\_new\_gao060809可用\输...

File Edit Text Window Help

```

1 C矩阵为:
2 [ 0, 0, -R1, R2]
3
4 状态变量为:
5 [ VC1, VC2, IL1, IL2]
6
7 D1矩阵为:
8 0
9
10 B2矩阵为:
11 0
12
13 独立电源V为:
14 V1
15
16
                
```

状态方程组.m 输出方程组.m

图 5.14 电网络辅助分析软件分析图 5.12 并联电路的结果

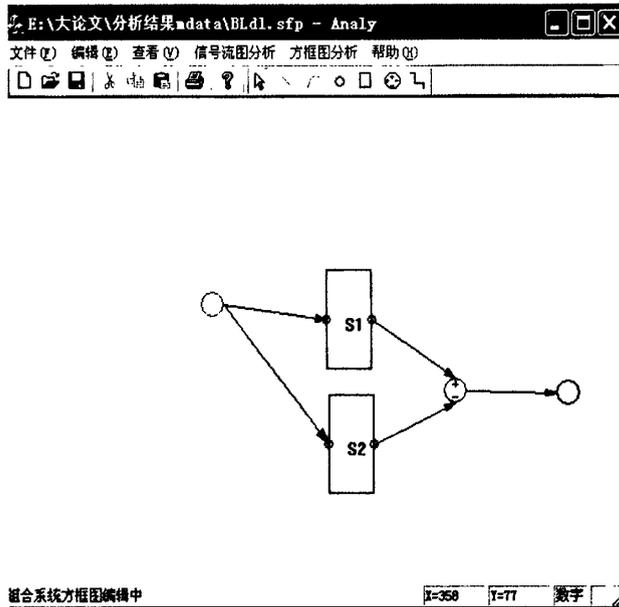


图 5.15 并联系统图

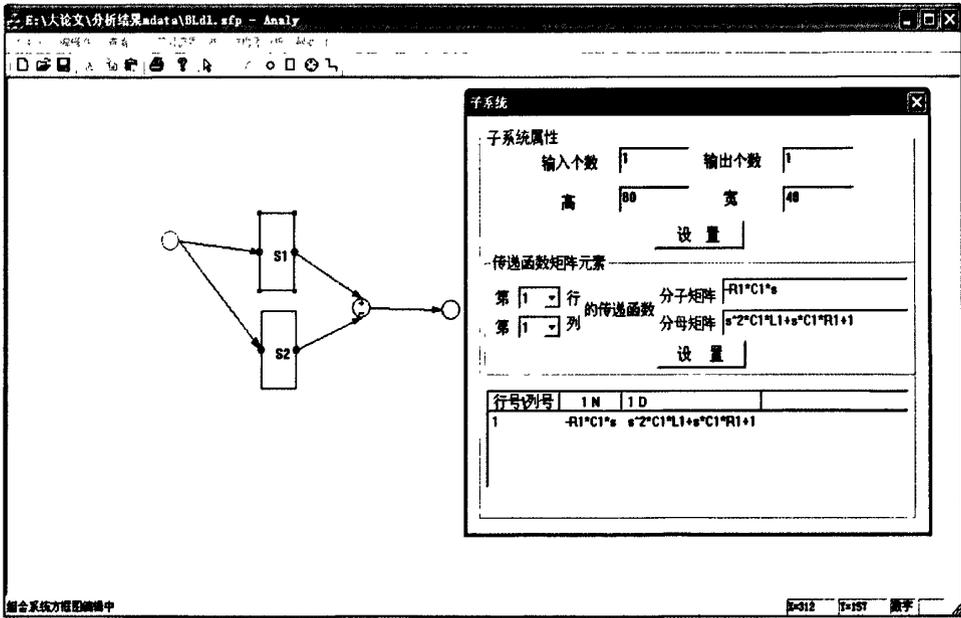


图 5.16 设置并联系统中子系统的传递函数矩阵

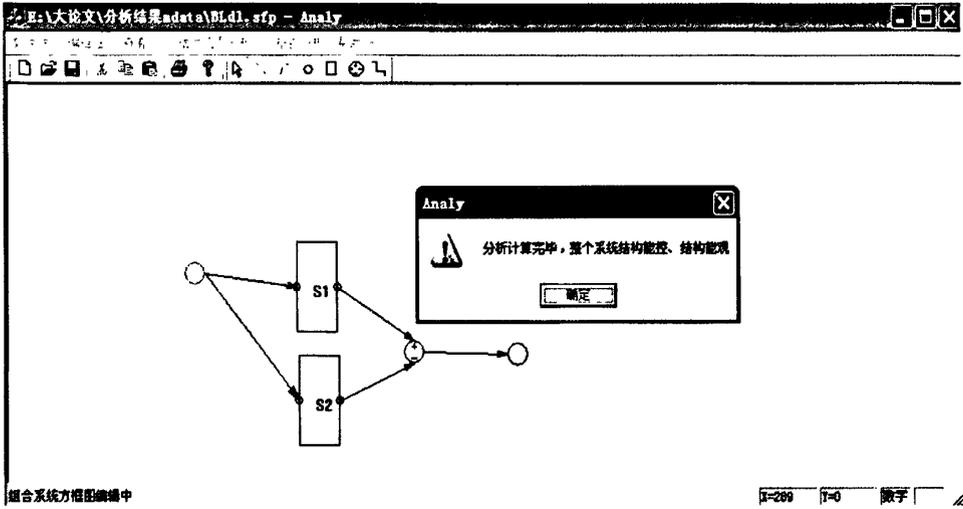


图 5.17 本软件分析结果（结构能控能观性）

P(s)

Q(s)

R(s)

W(s)

图 5.18 本软件分析结果（组合系统多项式矩阵描述）

## 5.6. 软件改进

### 5.6.1 界面改进

本软件已实现了信号流图和方框图的绘制，但是其编辑功能还有待加强。例如图元的绘制编辑操作可参考 MATLAB 的 Simulink 模块的绘制各种模块的操作：在移动节点时，可以让连接到节点的支路也跟随一起移动；有向折线绘制或移动时其路径的智能选择（可以绕开其他的图元）。分析结果的显示如组合系统的多项式矩阵描述的系数矩阵的显示现在是放在 MATLAB 中，也可以放到软件界面对话框中显示。

### 5.6.2 符号运算的简化计算

除了信号流图和方框图的结构分析，其他的分析运算如求传递函数矩阵、求 MFD、子系统的状态空间实现、互质性分析、关联矩阵变换等均要借助于 MATLAB 的符号运算能力，但是当系统的参量较多，子系统的个数较多，信号流图或各子系统连接关系较复杂时，符号运算可能费时甚至难以进行。这里提出一个初步的优化方案，如果关于  $s$  的多项式的系数较复杂，可以另外设置一个符号变量取代这些系数。例如图 5.11 中的传递函数矩阵的第一个元素的分母  $T_1 s^2 + s - k_{p1} k_1$ ，设新的参量  $k = k_{p1} k_1$ ，式子简化为  $T_1 s^2 + s - k$ ，那么在后面的符号运算中可以减少一部分计算量，这个在判断多项式矩阵的互质性时，进行列变换构造史密斯矩阵中尤其明显。但是在设置新的参量取代旧的若干参量时也要注意旧参量之间的关系，否则丢失了这些关系将会导致最后计算的结果不对。

### 5.6.3 结合特殊组合系统的分析理论来改进

本软件分析组合系统的结构性质时，也借助了理论来改进结构性质分析算法，特殊的组合系统可以用特殊的理论算法来分析，如 4.3 节所述的并、串联系统已有理论可以简化结构性质的判断。时域系统的结构性质分析也有若干理论简化结构性质的判断，例如<sup>[22]</sup>中的定理 2：若  $A$  矩阵在  $F(z)$  上不可约那么对于任意的  $B \neq 0$  系统结构能控。而<sup>[15]</sup>中的相似结构组合系统和<sup>[16]</sup>中的循环组合

系统也是一类特殊的组合系统，<sup>[55, 56]</sup>中的理论也可以结合到本软件中来分析结构性质。

## 5.7. 本章小结

本软件搭建了用信号流图和方框图建模的平台，在此平台上用  $F(z)$  上的矩阵或  $F(z, s)$  上的多项式矩阵做统一的数学描述，以  $F(z)$  上的系统结构分析理论为基础，运用了 MATLAB 的符号运算来分析线性系统的结构性质。 $F(z)$  上的系统结构分析为选择控制系统时在结构上保证最终的实数系统结构能控（观）提供了依据，但控制系统的设计不仅仅只包括结构设计。如何根据实数系统的设计要求和设计方法确定参数的取值，使实数域上的系统稳定且达到一定的性能指标是一个值得探寻的问题。如果本软件的 MATLAB 算法将  $F(z)$  上的系统的某些参数取值，便可做更进一步的数值仿真分析，这也为用  $F(z)$  上的理论研究控制系统的综合方法打下基础，这是本软件进一步的开发方向。

## 第 6 章 总结与展望

本论文以线性系统为研究对象, 使用多元有理函数域  $F(z)$  上的矩阵和  $F(z)[s]$  环上的多项式矩阵来描述系统。

结构能控性和能观性是两个表征系统结构特性的重要概念并有对偶性。与传统基于实数域的研究不同, 基于  $F(z)$  域上的系统的结构能控能观性研究中, 物理系统中所有的物理参量都不取值, 以参数的形式存在, 所以得到的结论只与网络的结构有关, 而与物理参数的取值无关, 它单独反应了网络的结构性质。

由于控制系统中所有的物理参数都是参量不取具体的数值, 所以研究中所有的运算都是符号形式的代数运算, 对比较复杂的系统, 计算量巨大, 耗时、耗力, 且容易出错, 人工难以胜任, 所以开发了相应的计算机辅助分析软件, 加快研究进程。

### 6.1. 研究成果

本论文的研究内容和成果主要包含两个方面的内容, 即: 理论部分的研究和辅助分析软件部分的规划、各种分析算法。

#### 一、理论研究部分

本文通过将实数域上的多项式矩阵理论扩展到  $F(z)$  域上, 以  $F(z)$  域上的多项式矩阵理论为基础得出了  $F(z)$  域上的 PBH 判据, 文中的若干例子证明, 相对于时域上的结构判据, 在用 PBH 判据判断结构能控性时, 采用  $F(z)$  域上的史密斯变换得到矩阵的互质性可以使系统结构性质的判断更容易。

所有不同物理参量都视为独立参量的线性物理系统具有两个基本性质。性质 1: 系统的特征多形式的方程  $\det(\lambda I - A) = 0$  没有非零的重根; 性质 2: 非零常数不是  $\det(\lambda I - A) = 0$  的根。两个性质描述的都是系统非零模式(非零特征值)的性质。线性物理系统模型越精确(即系统数学模型越逼近实际(物理系统))就越具有这两性质。本文证明了 1-型系统是具有性质 1 和性质 2 的, 并结合时域判据判定 1-型系统的结构能控能观性。

基于  $F(z)$  域上的多项式矩阵理论和物理系统具有两种性质的特点, 本文对组合系统的结构性质的判定也得出了若干有用的判据。如有结论: 对于并联系统如果两个子系统的矩阵分式描述的分母矩阵的组合矩阵在  $s=0$  时没有降秩,

则系统结构能控。对于串联系统如果第一个子系统的矩阵分式描述的分子矩阵与第二个子系统的分母矩阵的组合矩阵在  $s=0$  点时没有降秩, 则系统结构能控。不需要多项式矩阵的初等变换就可以得到系统的结构性质的了。

对于更一般的组合系统, 本文也给出了其组合后的系统的多项式矩阵描述计算方法, 但由于其组合方式的更一般性, 导致具有两种性质的系统不能简化其结构性质的判断。

## 二、结构性质分析软件的开发部分

文章对结构性质分析软件进行了需求分析, 给出了本软件的基本功能和基本框架, 分析软件主要包括系统的可视化、拓扑分析算法和系统结构性质分析三个部分。在软件研发中, 通过运用软件工程学的方法结合实际的软件开发经验完成了软件的框架和主要功能, 主要工作有:

首先, 按照软件工程的要求对软件进行了需求分析, 划分定义各功能模块。

第二, 使用 Visual C++ 完成了输入系统的可视化设计, 遵循了一些著名的建模软件对图元的操作的基本规则, 符合用户的操作习惯, 使用户可以快速建立起待分析系统的模型。

第三, 经过严密的数学推导, 在梅逊公式和第 4 章的组合系统多项式矩阵描述推导算法的基础上, 提出了由信号流图计算传递函数矩阵和由方框图计算多项式矩阵描述的网络拓扑算法。完成了其算法程序的编写, 验证了算法的可靠性和精确性。

第四, 运用 MATLAB 的符号运算功能编写了实现  $F(z)$  上多项式矩阵运算的 M 函数, 用于计算传递函数矩阵、求取多项式矩阵的最大公因子以及判断互质性从而得到结构性质。

第五, 将本软件系统分析的结果与课题组先前开发的电网络辅助分析软件进行分析结果比对, 证明了本软件的分析正确性和可靠性。

## 6.2. 展望

以图 1.1 中的系统为例, 选择系统的物理参量  $z = (K_p, T_i, K, T)$  为独立参量。那么网络能观性矩阵的行列式等于  $\det(C', A' C') = K_p^2 K^2 (T - T_i) / T_i^2 T^3$  是  $F(z)$  上非零元, 系统是  $F(z)$  上能观的, 即结构能观的。但如果令  $T = T_i$ , 独立参量减少一个,  $z = (K_p, T_i, K)$ , 那么系统却是  $F(\bar{z})$  上不能观的, 得到完全不同的结论。因此独立参量的选择是重要的。

由实数域上的系统理论知系统有两大独立变量：输入变量和状态变量，它们决定实数域上系统的全部行为。 $F(z)$ 上系统的独立参量 $z$ 反应了系统的结构，决定着系统和网络的结构性质，它应视为 $F(z)$ 上系统的第三大独立变量。

从物理的观点看，系统的物理参量的取值是任意的，将它们选为独立参量是合理的。从数学推理的观点来看，假如 $T = T_i$ ，网络就不能观，如想系统能观就要防止这种情况的出现。

实际控制系统可以将所有不同物理参量都选为独立参量。但是如第 5.6.2 节所述在判断矩阵的互质性质时，设置新的独立参量是可以简化符号运算的复杂度的。也可以不按照物理参量来确定实际控制系统独立参量，但是这个有点麻烦，常常需要简化(变量代换)而又要不改变系统的结构性质，2.2 节的引理 2.1 给出了独立参量(变量)代换的方法。如何将独立参量简化到最少数目而不改变系统的结果性质，这是下一步应该考虑的问题。

1-型矩阵和  $(C+V)^{-1}U$  (其中  $C = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ， $V$  和  $U$  是两个  $F(z_{n+1}, \dots, z_q)$  上的方阵) 是多元有理函数域上的两类矩阵，代表了两类的线性物理系统，它们都具有两种性质。史密斯形是多项式矩阵的重要标准型，与互质性的判断密切相关。文献<sup>[42,93]</sup>研究了混合矩阵的特征矩阵的史密斯形，得出结论它的史密斯形是具有特殊形式的。1-型矩阵和  $(C+V)^{-1}U$  的特征矩阵的史密斯形会具有什么样的形式，对互质的判断有什么简化，这些问题有待探讨。

结构能控能观分析软件实现了对信号流图和方框图的分析，如果把信号流图的各支路的传递函数规定为一些基本的环节如一阶惯性环节和比例环节(因为更复杂的传递函数都可以由这些基本的支路构成)，这样可以把系统的模型完全用图体现，不依赖支路的传递函数，那么是否能得到相应的图论的结论呢？这是理论上值得研究的一个方向。结构能控能观分析软件利用符号运算实现了结构性质的分析。在分析了结构性质之后，就要根据实数系统的设计要求和方方法确定各参数的值，使其稳定性符合要求，使其性能指标达到最优。如果将系统的参数全部取在数域上，则本软件可以做下一步的系统设计仿真。如果取系统的一部分参数在数域上，例如令某个参数为 0，对应的可能是系统的结构发生了变化，那么系统是否依然结构能控？这是个最小结构能控的问题，也可以结合到本软件中以进行控制系统最小结构的选择。这些都是结构能控能观分析软件可以扩展的功能。

## 参考文献

- [1] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [2] Kalman, R.E., Falb, P.L. and Arbib.M.A. Topics in mathematical system theory[M]. New York:McGraw-Hill. 1969.
- [3] 旺纳姆 W.M.著. 姚景尹 王恩平译. 线性多变量控制: 一种几何方法[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [4] C.T.Lin. Structural controllability[J]. IEEE Trans., AC-19, 1974:201~208.
- [5] 席裕庚. 动态大系统方法导论[M]. 北京: 国防工业出版社. 1988.
- [6] Morari, M., Y., Arkun, G.Stefhanopoulos, Studies in the Sythesis of Control Structures for Chemical Processes[J], AIChE J., Vol 26, 220-255, 1980.
- [7] Rech, C., R.Perret. About Structural Controllability of Composite Systems[J], AUTOMATICA, Vol 27, 1991, 887-892.
- [8] 李慷. 复杂工业过程控制结构综合策略的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 1994.12.2-1~2-15.
- [9] R.W. Shields and J.B. Pearson. Structural controllability of multiinput linear systems[J]. IEEE Trans AC. 1976:21. 203-212
- [10] Glover K, Silverman L M. Characterization of Structural Controllability[J]. IEEE Trans., AC-21, 1976:534-537.
- [11] Mayeda H. On Structural Controllability Theorem[J]. IEEE Trans., AC-26, 1981:795-798.
- [12] Hosoe S, Matsumoto K. On the Irreducibility condition in the structural controllability theorem[J]. IEEE Trans., AC-24, 1979:963-966.
- [13] Zazworsky, R, Knudsen, H. Controllability and observability of linear time-invariant compartmental models[J]. IEEE Trans., AC-23, 1978:872-877.
- [14] Yamada T, Luenberger D G. Generic properties of column-structured matrices[J]. Linear Algebra Appl.,65,1985:186-206.
- [15] Anderson B D O, Clements D J. Algebraic characterization of fixed models in decentralized control system[J]. Automatic. 1981:703-712.
- [16] Anderson B D O, Hong H M. Structural controllability an matrix nets[J]. International J Control. 35. 1982:397-416.
- [17] Murota K. On the irreducibility of layered mixed matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra. 24. 1989:273-288.

- [18] Murota K. On the degree of mixed polynomial matrices[J]. SIAM J Matrix Anal App. 20. 1998:196-227.
- [19] K.S.Lu and J.N.Wei, Rational function matrices and structural controllability and observability[J]. IEE PROCEEDINGS-D Control Theory Appl.. Vol 138. 1991.388-394.
- [20] K.S.Lu and J.N.Wei. Reducibility condition of a class of rational function matrices[J]. SIAM J Matrix Anal Appl. 1994.15.151-161.
- [21] 鲁凯生. 用多元有理函数矩阵研究系统的结构性性质[J]. 控制理论与应用. 14.1997:770-772.
- [22] K.S.Lu. The controllability of linear systems over  $F(z)$ [C]. Proc 40th IEEE CD C.2001:2676-2681.
- [23] Ch.T. Chen. And C.A.Desoer. Controllability and Observability of Composite Systems[J]. IEEE Trans. AC-12, 1967,; 402~409.
- [24] Nashida N, Stephanopoulos G. A review of process synthesis[J]. AIChEJ. 27(3), 1981,;321-351.
- [25] 须田信英. 自动控制中的矩阵理论[M]. 科学出版社, 1979:144-154
- [26] 高国章.  $F(z)$  上电网络若干结构性质的研究及辅助分析软件的开发[D]. 武汉:武汉理工大学, 2007.
- [27] Lu K.S. and Lu K.S. Separability and reducibility criteria of RLC networks over  $F(z)$  and their applications[J]. Int.J.Circuit Theory Appl. 26, 1998,; 65~79.
- [28] Kai-Sheng Lu, Kun-Sheng Lu. Controllability and Observability Criteria of RLC networks over  $F(z)$  [J]. Int.J. Circuit theory and applications Appl. 29, 2001:337~341.
- [29] K.S.Lu. Spearability of RLC network  $F(z)$  [C]. Proc IEEE ISCAS. 1993: 2270~2271.
- [30] X.Y.Feng and K.S.Lu. Reducibility, separability and controllability of RLC network over  $F(z)$  and their applications[C]. Proc International Conference on Machine Learning Cybernetics.2004: 2962~969.
- [31] X.Y.Feng and K.S.Lu. The controllability of RLCM networks over  $F(z)$  and their applications[C]. Proc 10th International Symposium on Integrated Circuits.2004:155~158.
- [32] Galindo, R. Gonzalez, G. Juarez, R.I. Structural controllability and observability in closed loop for LTI stable systems[C]. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2007: 2623-2628.
- [33] Sueur, C. Dauphin-Tanguy, G. Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 328(01),1991: 55-70.
- [34] Chen C.T. Representations of linear time invariant composite systems[J]. IEEE Trans. AC-13, 1966: 277~283.

- [35] Youla D.C. and Tissi P. n-port synthesis via reactance extraction—part I[J]. IEEE Int. Conv. Rec. 14, 1966:183~208.
- [36] MUROTA, K. System analysis by graphs and matroids[M]. Springer-Verlag, 1987.
- [37] LU, K.S., and LU, K. Separability and reducibility criteria of RLC networks over  $Fz$  and their applications[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications. 26. 1998:65-79
- [38] LU, K.S., and LU, K. Controllability and observability criteria of RLC networks over  $F(z)$ [J]. International Journal of Circuit Theory and Applications.29. 2001:337-341.
- [39] 韩京清, 陈晓东 两个多项式矩阵最大公因子的计算[J]. 自动化学报. Vol. 11, No.1, 1985:94-97.
- [40] K.Murota etc. Structural approach in systems analysis by mixed matrices-An exposition for index of DAE. Mathematical Research[J]. Vol 87 1996:257-259.
- [41] K.Murota. Mixed matrices: Irreducibility and decomposition[J]. Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [42] Murota K. On the Smith normal form of structured polynomial matrices[J]. SIAMJ. Matrix Anal. Appl., 12.1991: 747~765.
- [43] Murota K, Poljak S. Note on a graph-theoretic criterion for structural output controllability[J]. IEEE Trans, AC-35, 1990:939-942.
- [44] Viswanadham, N. Vidyasagar, M. FREQUENCY DOMAIN SOLUTION TO THE DECENTRALIZED SERVOPROBLEM.[C], IEEE Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1983:547-550.
- [45] Olesky DD, Tsatsomeros M, Drissche P van den. Qualitative Controllability and Uncontrollability by a Single Entry[J]. Linear Algebra and Its Applications, 187. 1993:183-194.
- [46] Johnson C R, Mehrmann V, Olesky D. Sign Controllability of a Nonnegative Matrix and a Positive Vector[J]. SIAM J Matrix Anal Appl. Vol. 14, 1993:398-407.
- [47] Jamshidi M. Large-Scale Systems Modeling and Control[M]. North-Holland. 1983.
- [48] Mathmoud M S, Single M G. Large Scale Systems Modeling[M]. Pergamon Press. 1981.
- [49] 涂序彦. 大系统控制论[M]. 北京: 国防工业出版社.1994.9.
- [50] Anderson B D O, Clements D J. Algebraic characterization of fixed modes in decentralized control systems. Automatica, 1981:703-712.
- [51] Willems J.L. Structural controllability and observability. Syst. Contr. Lett., 1986 ,8:5~12.
- [52] 封小钰. 多元有理函数域  $F(z)$  上电网络结构能控性研究[D]. 武汉理工大学, 2006.

- [53] 童明傲,邓亦仁,幸晓珂. 将任意多项式矩阵变换为 Smith 规范形的通用程序及其应用[J].重庆建筑大学学报. 5.2000:1-6.
- [54] 许可康,高志强. 多项式矩阵方程及线性控制系统[J]. 系统科学与数学. 3.2000:280-284.
- [55] 杨光红,张嗣瀛. 一类具有相似结构的组合系统的结构可控性与渐近合作性[J]. 自动化学报,5.1995.:521-528.
- [56] 黄守东,张嗣瀛. 循环组合系统的结构性质[J]. 自动化学报,6. 1995.:996-998.
- [57] 全茂达. 多项式矩阵理论在网络分析中的应用[J]. 电子学报 11.1994:102-105.
- [58] 孙秀霞,田荫珊. 控制系统多项式矩阵设计方法软件包的设计与实现[J]. 计算机应用与软件.
- [59] 微软. MSDN Library Visual Studio 6.0. 美国: 微软.
- [60] 黄维通. Visual C++面向对象与可视化程序设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [61] 王洪涛. 深入剖析 Visual C++编程技术及应用实例[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2003
- [62] David J. Kruglinski, Scot Wingo George Shepherd. Visual C++ 6.0 技术内幕[M]. 希望图书创作室译. 第五版. 北京: 北京希望电子出版社, 2000.
- [63] 徐晓刚. Visual C++ 6.0 入门与提高[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [64] 方可燕,张双民. Visual C++ 6.0 实战与精通[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000 齐舒. VC++ 6.0 开发技巧及实例剖析[M],清华大学出版社,北京:1999.
- [65] Lan Sommerville. 软件工程[J]. 北京: 机械工业出版社,2006.
- [66] 邵维忠,杨芙清. 面向对象的系统分析[M]. 北京:清华大学出版社, 1998.
- [67] 苏金明,黄国明,刘波. MATLAB 与外部程序接口[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004
- [68] MATLAB C++ Math Library User's Guide[M]. The Math Works. Inc, 1997.
- [69] 江鹤,汤丽萍,边信黔等. 利用 Matlab 引擎实现 VC 和 Matlab 的混合编程[J]. 电脑学习, 2000,3: 30~31.
- [70] 杨成, 申丽然, 李雪耀. Matlab 引擎的 VC++6.0 接口调用及其面向对象编程[J]. 应用科技, 2001.28 (11): 41~44.
- [71] 高崇明, 邵美珍, 张辉. VC++6.0 与 MATLAB 混合编程技术的原理与实现[J]. 无线电工程, 2000. 30 (2): 53~56.
- [72] 张志涌. 精通 MATLAB5.3[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2000.
- [73] Roland R. Mielke. A new signal flow graph formulation of symbolic network functions[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-25, No. 6. 1978:334~340.
- [74] 程树良, 鲁凯生. 在多元有理函数域上建立 RLC 网络的状态方程的计算机分析程序[J]. 武汉交通科技大学学报. 22(4).1998:343~347.
- [75] Pereira, R. Quadrado, J.C. Using neural networks to establish the structural controllability

- and observability[J]. WSEAS Transactions on Systems, 4(04), 2005:375-378.
- [76] Ruiz-Leon, J; Castellanos, A; Ramos, LE. A definition of column reduced proper rational matrices[J]. INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, 75(03), 2002:195-203.
- [77] Kwakernaak, H. A descriptor algorithm for the spectral factorization of polynomial matrices[C] Proceedings of Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2000), Proceedings volume from the 3rd IFAC Symposium,2000:651-6.
- [78] Henrion, D; Sebek, M. An algorithm for polynomial matrix factor extraction[J]. INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, 73(08), 2000: 686-695.
- [79] Sommer, H.-J. Hahn, H. Controllability of a class of nonlinear systems: A graph theoretic approach[J] Systems Science,25(01) , 1999: 49-56.
- [80] Sommer, H.-J. Hahn, H. Structural approximate controllability of linear systems: a pure graph theoretical approach. Part I: linear systems associated to simple cacti[J]. Systems Science,24(01) , 1998:5-31.
- [81] Sommer, H.-J. Hahn, H. Structural approximate controllability of linear systems: A pure graph theoretical approach. Part II: Linear systems associated to chain bud cacti and to general cacti [J]. Systems Science,24(02) , 1998:5-46.
- [82] Reinschke, K.J. Robenack, K. Wiedemann, G. Structural analysis of descriptor systems by means of digraphs[J] Automatisierungstechnik,01,1998:22-31.
- [83] Sebek, M. Software package for polynomial matrix operations in control[C]. Proceedings of 2nd IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems 1997:31-5.
- [84] Tsumura, K. Murota, K. Kitamori, T. Structural minor primeness of multi-variable polynomial matrices and applications to criteria for structural controllability[J]. Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers,30(05) ,1994:519-526.
- [85] 关肇直等. 线性控制系统的能控性和能观性[M]. 北京: 科学出版社, 1975.
- [86] 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 1998.
- [87] 蔡尚峰. 自动控制理论[M].北京:机械工业出版社,1981.
- [88] 卢桂章等. 现代控制理论基础[M].北京:化学工业出版社,1981.
- [89] Casti J L. Linear Dynamical Systems[M]. Orlando, Florida: Academic Press.1987.
- [90] Chen C T. Linear system theory and design[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston. 1984
- [91] 谢邦杰. 线性代数[M]. 人民教育出版社,1978.
- [92] 严加安. 测度论讲义[M]. 北京:科学出版社, 2000
- [93] Murota K. On the Smith normal form of structured polynomial matrices,II [J]. SIAMJ. Matrix Anal. Appl., 14.1993: 1103~1111.

- [94] Murota K. Refined study on structural controllability of descriptor systems by means of matroids [J]. SIAMJ. Control and optimization. 25.1987: 967~989.
- [95] K.S.Lu. On the minors of the matrix  $M=Z+T$  over  $F(z)[C]$ . Proc SIAM 5<sup>th</sup> conference on Applied Linear Algebra.1994: 470~474
- [96] K.S.Lu. Reducibility of RLC network  $F(z)[C]$ . Proc IEEE ISCAS. 1993: 2268~2270
- [97] K.S.Lu. Spearability of RLC network  $F(z)[C]$ . Proc IEEE ISCAS. 1993: 2270~2271
- [98] K.S.Lu, G.Z.Gao. The Node Voltage Equations and Structural Conditions of Observability for RLC Networks over  $F(z)$  [C]. Proc IEEE ISCAS, 2005.5.
- [99] 王恩平,王朝珠. 多项式与多项式矩阵[M]. 国防工业出版社, 1992
- [100] Johnson C R, Mehrmann V, Olesky D. Sign Controllability of a Nonnegative Matrix and a Positive Vector[J]. SIAM J Matrix Anal Appl. Vol. 14, 1993:398-407
- [101] Jamshidi M. Large-Scale Systems Modeling and Control[J]. North-Holland. 1983
- [102] Mathmoud M S, Single M G. Large Scale Systems Modeling[J]. Pergamon Press. 1981

## 致 谢

本文的研究工作是在导师鲁凯生教授的悉心指导下完成的。导师既是宽容的长者，又是严格的业师，既鼓励我大胆独立创新，给予充分的信任和殷切的希望，又字斟句酌，字字批阅。导师专心治学、诲人不倦的育人精神给我留下了深刻的印象：常常不顾自己身体的疲惫为我们解答课题理论研究中的难点，引领我入门，全力指导我在学术上奋进。导师自己的生活简单朴素，但是为了给 学生创造良好的学习环境，在购买实验设备时却总是毫不犹豫；在得知我论文发表在国际会议后，积极支持我出国开会与同行交流，开阔眼界、增长见识，使我受益匪浅。导师严谨的治学态度、科技报国的理念和平易近人的学者风度都是我学习的榜样。论文的研究成果凝结着导师的智慧和心血，在此谨向导师表示诚心的感谢和敬意。

在研究生学习和课题研究过程中，得到了在实验室共同奋斗的封小钰副教授、徐沪萍副教授、高国章副教授、毛小兵博士、程艳芬副教授热情大力的帮助，感谢你们！同时也感谢硕士师兄张科、师弟王宗涛、马强、袁裕鹏、付凯波、刘珍等给予过我的帮助和支持。

论文完成之际也意味着在能源与动力工程学院攻读博士学位的求学生涯即将告一段落，在这里向院里的所有老师给予过的关怀和帮助一并表示感谢。也感谢和我同寝室度过数年学生生活的室友李洁、谢雨华、温苗苗和彭俊，她们的陪伴给日常单调的科研生活增加了一点颜色。

特别谢谢我的父母，没有他们的无私奉献和关爱，一如既往的长期支持、资助和精神鼓励，我是不可能全身心的投入到论文学习工作中，完成学业走到今天的。

论文课题的研究还得到了国家自然科学基金的资助，在此表示衷心的感谢。最后感谢各位专家和学者在百忙之中抽出时间来评议我的论文。

## 攻读博士学位期间发表的论文及参加的科研项目

1. Lu, KS, Liu, GM. Class of rational function matrices that satisfy two properties of linear systems and structural controllability. IET CONTROL THEORY AND APPLICATIONS, 1 (1): 113-118 JAN 2007. EI Compendex, SCI 收录
2. Guan-Min Liu, Kai-Sheng Lu, Ning Xiao. Some Conclusions on the Controllability of Linear Systems over  $F(z)$  in Frequency Domain. Proc 10th Intl. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision. 2008:323-328. EI Compendex 收录
3. Liu Guan-Min<sup>1</sup>, Lu Kai-Sheng. Structural controllability of composite systems in frequency domain. Proc 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. 2009:1-5. EI Compendex 收录
4. Liu Guan-Min, Lu Kai-Sheng. Polynomial Matrix Description and Structural Controllability of Composite System Proceedings. Proc International Conference on Information Engineering and Computer Science. Vol V. 2009:3190-3193. EI Compendex 收录
5. Guanmin Liu, Kaisheng Lu, Tianquan Guo. Analyzing Structural Properties of composite system in Frequency Domain Over  $F(z)$  with Computer. CCDC 2010.5. 已录用待发表, 将被 EI Compendex 收录
6. 刘官敏 鲁凯生, 组合系统结构性性质分析及算法. WCICA 2010.7. 已录用待发表, 将被 EI Compendex 收录

参加国家自然科学基金面上项目“用  $F(z)$  上矩阵研究电网络的结构性质”(批准号 50177024, 2002~2004)

参加国家自然科学基金面上项目“多元有理函数系统结构能控能观性研究”(批准号 60574012, 2006~2008)

参加国家自然科学基金面上项目“ $F(z)$  上有源网络可断性可约性能控能观性及稳定性研究”(批准号 50977069, 2010~2012)