习题课

函数与极限

一、 函数

二、 极限

三、 连续与间断

一、主要内容

- （一）函数的定义
- （二）极限的概念
- （三）连续的概念

基本初等函数

1）幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数）

2）指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$

3）对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

4）三角函数 $y = \sin x$; $y = \cos x$;

$y = \tan x$; $y = \cot x$;

5）反三角函数 $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$;

$y = \arctan x$; $y = \operatorname{arccot} x$

双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

求极限的常用方法

a.定义及运算法则;

b.两个重要极限;

c.夹逼定理和单调有界原理;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用等价无穷小代换.

两个重要极限

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{某过程}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

其中: $\lim\limits_{某过程}\alpha=0$

(2) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

$$\lim_{某过程}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

其中: $\lim\limits_{某过程}\alpha=0$

常用等价无穷小： 当 $x \to 0$ 时

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\ln a, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$$

闭区间上连续函数的性质

最值定理 —— 有界性定理

介值定理 —— 零点存在定理

注意： （1）闭区间，（2）连续函数

这两点不满足上述定理不一定成立.

解题思路：

1.直接法： 先利用最值定理，再利用介值定理;

2.辅助函数法： 先作辅助函数 $F(x)$，再利用零点存在定理;

作业：

习题1-9(P76)：

1(2)(4)(5)(7)(10)(13)(14)(15)；

2；4；5(2)(5)；7；8；11；

12；14；16；17

二、典型例题

例1 求函数 $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域.

解 $16-x^2>0,$

$x-1>0,$

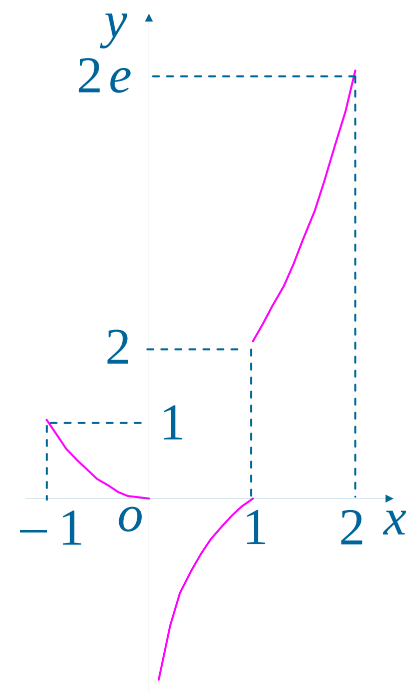
$x-1\neq 1,$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |x|<4 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $1<x<2$ 及 $2<x<4,$

即 $(1,2)\cup(2,4).$

例2: 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.



解: 当 $-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当 $0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^y$, $y\in(-\infty,0]$

当 $1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\dfrac{y}{2}$, $y\in(2,2e]$

反函数 $y=\begin{cases} e^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\dfrac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2e]$

例3 已知 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\ge 8 \\ f[f(x+5)], & x<8 \end{cases}$

求 $f(5)$.

解: $f(5)=f[f(10)]=f(10-3)$

$=f(7)=f[f(12)]$

$=f(12-3)=f(9)$

$=6$

例4 设 $f(\sin x + \frac{1}{\sin x}) = \csc^2 x - \cos^2 x$，

求 $f(x)$.

解: $\because$ $f(\sin x + \frac{1}{\sin x}) = \frac{1}{\sin^2 x} + \sin^2 x - 1$

$$= (\sin x + \frac{1}{\sin x})^2 - 3$$

$\therefore$ $f(x) = x^2 - 3$

例5 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq 0,\ x\neq 1$ 求 $f(x)$.

解: 利用函数表示与变量字母的无关的特性 .

令 $t=\frac{x-1}{x}$ 即 $x=\frac{1}{1-t}$ 代入原方程得

$$f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{2}{1-t},\quad \text{即}\quad f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2}{1-x}$$

令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$, 即 $x=\frac{1}{1-u}$ 代入上式得

$$f(\frac{1}{1-u})+f(\frac{u-1}{u})=\frac{2(u-1)}{u}\quad \text{即}\quad f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{2(x-1)}{x}$$

画线三式联立 $\Longrightarrow$ $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$

例6: 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, 其中 a 为任意实数 。

证明1: 对任意实数 a ,存在正整数 M , 使 $|a|\le M$.

则 $\left|\frac{a^n}{n!}\right|\le\frac{M^n}{n!}$, 故当 $n>M$ 时

$$\frac{M^n}{n!}=\frac{M\cdot M\cdots M\cdot M\cdots M}{1\cdot 2\cdots M\cdot M+1\cdots n}\le\frac{M^M}{M!}\cdot\frac{M}{n}<\varepsilon$$

解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{M^M}{(M-1)!}$ 取 $N=\max\{[\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{M^M}{(M-1)!}],M\}$

$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时, $\left|\frac{a^n}{n!}\right|\le\frac{M^n}{n!}<\varepsilon$

即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证明2: 对任意实数 a ,存在正整数 M ,使 $|a|\le M$.

则 $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|\le \dfrac{M^n}{n!}$. 设 $x_n=\dfrac{M^n}{n!}$, 则 $x_{n+1}=\dfrac{M}{n+1}x_n$,

$\therefore$ 当 $n+1>M$ 时, $x_{n+1}<x_n$, $\{x_n\}$ 单调下降,

又显然 $x_n>0$, 所以 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 A, 则

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}x_n=0\cdot A=0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M^n}{n!}=0$. 由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

注意:

一般地

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |A|,$$

反之不成立。但

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

例 7： 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ \ (a>1,k\in N)$。

证明： $\because a>0$，设 $a=1+\lambda$

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+\lambda a+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1}+\cdots+\lambda^n$$

$$>\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1}\quad (\text{当 } n>k \text{ 时})$$

因此 $$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}\cdot\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}$$

$$=\frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}\cdot\frac{1}{n(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{k}{n})}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$$

例 8： 对于数列$\{x_n\}$，若 $x_{2k}\to a\ (k\to\infty)$，

$x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，则 $x_n\to a(n\to\infty)$

证明: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时, $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;

$\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $|x_{2k}-a|<\varepsilon$;

取 $N=\max\{2N_1-1, 2N_2\}$

当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

例 9： 设$\{x_n\}$是单调数列，$\{x_{n_k}\}$是它的一个子列，且

$x_{n_k} \to a(k \to \infty)$，证明：$x_n \to a(n \to \infty)$。

证明: 不妨设$\{x_n\}$是单调增加的，则$\{x_{n_k}\}$也单调增加，

$\therefore \forall k \in N^*, x_{n_k} \le a$，从而对$\{x_n\}$所有项，都有 $x_n \le a$，

$(\because k \le n_k, x_k \le x_{n_k} \le a, k = 1,2,\cdots)$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists L$，当 $k \ge L$ 时，$a - x_{n_k} = |x_{n_k} - a| < \varepsilon$；

取 $N = n_L$，则当 $n > N$ 时，$\because x_{n_L} = x_N \le x_n \le a$

$$|x_n - a| = a - x_n \le a - x_{n_L} = |a - x_{n_L}| < \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

例10 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

(1) 用夹逼定理证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$;

(2) 继而证明: $\lim\limits_{x\to+0} x^{x}=1$, 并求极限 $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$

证明: (1) 不妨设 $x>1$, 则显然有

$$[x]^{\frac{1}{[x]+1}}<x^{\frac{1}{x}}<([x]+1)^{\frac{1}{[x]}}$$

而 $[x]^{\frac{1}{[x]+1}}=\left([x]^{\frac{1}{[x]}}\right)^{\frac{[x]}{[x]+1}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$;

$$([x]+1)^{\frac{1}{[x]}}=\left[([x]+1)^{\frac{1}{[x]+1}}\right]^{\frac{[x]+1}{[x]}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$$

(2) 令 $x=\frac{1}{t}$，则当 $x\to+0$ 时，$t\to+\infty$

$$\therefore \lim_{x\to+0} x^{x} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\frac{1}{t}}} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\ln x^{x} = 0$$

例11 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\underbrace{\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小}}\underbrace{\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界}}=0$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

令 $t=x-1$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-t(t+2)}{\sin\pi(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\sin\pi t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\pi t}=\frac{2}{\pi}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-(1+x)^b}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^a-1}{x}-\frac{(1+x)^b-1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x}\quad=a-b$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 1}\frac{4\arctan x-\pi}{x-1}$$

$$=4\lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}.$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

$\because x\to 1$时， $\arctan x-\frac{\pi}{4}\sim\tan(\arctan x-\frac{\pi}{4}).$

$$\tan(\arctan x-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan(\arctan x)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(\arctan x)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{x-1}{1+x}$$

$$\therefore 原式=4\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{1+x}}{x-1}=4\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=2$$

$$(5)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\cot x}$$

$$\boxed{1^{\infty}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x\cdot\frac{2x}{1-x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{2x}{1-x}\right)}=e^{2}$$

复习: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)u(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln\left[1+u(x)\right]}$$

$$(6)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{原式} = e^{\frac{1}{2}}.$$

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}-2}{2}+1\right)^n$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}-2}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt[n]{5}-1)}{1/n}+\frac{(\sqrt[n]{7}-1)}{1/n}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[n]{5}-1)}{1/n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[n]{7}-1)}{1/n}\right)}$$

$$=e^{\frac{\ln 5+\ln 7}{2}}=\sqrt{35}$$

$x\to 0$时

$a^x-1\sim x\ln a$

(8) $$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} \sin x \ln x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0} x \ln x} = 1$$

(9) $$\lim_{x\to1} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \lim_{x\to1} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x \ln x} = \lim_{x\to1} \frac{x \ln x}{x \ln x} = 1$$

(10) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n$. 1^∞

解1: $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(2+\frac{2}{n}) = 2$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n = e^2$

解2： $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n$.

$n>1$时

$$1+\frac{2}{n}<1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}<1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}=1+\frac{2}{n-1}$$

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n<\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n=e^2$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})^n=e^2$

(11) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\cdots+\frac{n+1-1}{(n+1)!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.　　(2000考研)

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

→ 原式 = 1

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$.

解 将分子、分母同乘以 $2\sin\dfrac{\theta}{2^n}$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cos\dfrac{\theta}{2^n}\sin\dfrac{\theta}{2^n}\cdot 2}{2\sin\dfrac{\theta}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}$$

(14) 当$|x|<1$时，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 将分子、分母同乘以因子$(1-x)$, 则

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}. \qquad (\because \text{当}|x|<1\text{时}, \lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$$

例12. 指出当 $x\to 0$ 时, 下列函数是 x 的几阶无穷小?

(1) $\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$

解: 设其为 x 的 k阶无穷小, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq 0$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^{3k}}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}-3k}(1+x^{\frac{3}{2}})}$

故 $k=\dfrac{1}{6}$

(2) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$

解: $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$

$$=\frac{1+\sqrt[3]{x}-1}{(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}+1}$$

故是 x 的 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$

解: $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$

$$=\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

故是 x 的 3 阶无穷小 .

(4) $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$

解: $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$

$$=\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}+2}\right)$$

故是 x 的 2 阶无穷小 .

(5) $e^{x^2}-\cos x$

解1: $e^{x^2}-\cos x=(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)$

$\because$ 当 $x\to 0$ 时, $e^{x^2}-1\sim x^2$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$\therefore$ 可看出原式是 x 的 2 阶无穷小 .

(5) $e^{x^2}-\cos x$

解2：设其为 x 的 k阶无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\cos x}{k(k-1)x^{k-2}}$$

故是 x 的 2 阶无穷小 .

例13 设 $f(x)=x-[x]$，求 $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$，其中 n 是一取定的正数。

解： $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}(x-[x])=n-n=0$

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}(x-[x])=n-(n-1)=1$

例14 设$p(x)$是多项式,且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\therefore$ 可设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$(其中a,b为待定系数)

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,

$\therefore\ p(x)=x^3+2x^2+ax+b\sim x \quad (x\to 0)$

从而得 $b=0, a=1.$ 故 $p(x)=x^3+2x^2+x$

例15: 已知数列 $x_n = (1+a)^n + (1-a)^n$，

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|a| & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$

证: 当 $a = 0$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \equiv 1 \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

当 $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+a)^{n+1} + (1-a)^{n+1}}{(1+a)^n + (1-a)^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} (1+a) \frac{1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n} = 1 + a$$

当 $a<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+a)^{n+1}+(1-a)^{n+1}}{(1+a)^n+(1-a)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-a)\frac{(\frac{1+a}{1-a})^{n+1}+1}{(\frac{1+a}{1-a})^n+1}=1-a$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}1+|a| & a\neq 0\\ 1 & a=0\end{cases}$

例16. 设 $a_i \geq 0\,(i=1,2,\cdots)$, 证明下述数列有极限 .

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

证: 显然 $x_n \leq x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调增, 又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{1+a_1} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} < 1$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

“拆项相消” 法

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例17: 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$, $n = 0,1,2,\cdots$,

证明:$\{x_n\}$收敛,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

证明: $x_0 > 0$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2+x_n} > 1$, $n = 0,1,2,\cdots$,

又 $x_{n+1} = 2 - \dfrac{2}{2+x_n} < 2$, $n = 0,1,2,\cdots$,

即 $0 < x_n < 2$, 有界

而 $x_{n+1} - x_n = 2\left(\dfrac{1}{2+x_{n-1}} - \dfrac{1}{2+x_n}\right)$

$$= \frac{2(x_n - x_{n-1})}{(2+x_{n-1})(2+x_n)}$$

所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，$n=1,2,\cdots$

当 $x_1\ge x_0$ 时，$\{x_n\}$ 单调增加；

当 $x_1\le x_0$ 时，$\{x_n\}$ 单调减少；

由单调有界原理：$\{x_n\}$ 的极限存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\because\ x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，

则 $A=\dfrac{2+2A}{2+A}$， 解得：$A=\sqrt{2}$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

例18: 由递推公式：$F_0 = F_1 = 1$，$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ (n \geq 1)$，给出的数列 $\{F_n\}$ 称为 *L.Fibonacci* 数列，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ 存在，并求此极限。

证明: 记 $x_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}\ (n = 1,2,\cdots)$ 则

$$x_n = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \qquad (*)$$

$\because \dfrac{1}{x_{n-1}} > 0$，$\therefore x_n > 1$，又由 $(*)$，$x_n < 1 + 1 = 2$

所以数列 $\{x_n\}$ 既有上界，又有下界。

经计算发现 $\{x_n\}$ 的前几项中，偶数项单调增加，奇数项单调减少。下面用归纳法证明此结 论。

$$x_0=1,\ F_2=F_1+F_0=2,\ x_2=\frac{F_2+F_1}{F_2}=\frac{3}{2}>x_0$$

$$x_1=1+\frac{1}{x_0}=2,\quad x_3=1+\frac{1}{x_2}=\frac{5}{3}<x_1$$

假设: $x_{2k}>x_{2(k-1)}$，$x_{2k+1}<x_{2k-1}$， 则

$$x_{2k+2}-x_{2k}=1+\frac{1}{x_{2k+1}}-(1+\frac{1}{x_{2k-1}})=\frac{x_{2k-1}-x_{2k+1}}{x_{2k+1}x_{2k-1}}>0$$

$$x_{2k+3}-x_{2k+1}=1+\frac{1}{x_{2k+2}}-(1+\frac{1}{x_{2k}})=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{x_{2k+2}x_{2k}}<0$$

由归纳法假设：$\{x_{2k}\}$单调增加，$\{x_{2k-1}\}$单调减少。

由单调有界原理：$\{x_{2k}\}$，$\{x_{2k-1}\}$极限存在。

设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = A$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = B$，由(*)式，有

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}}, \quad x_{2k} = 1 + \frac{1}{x_{2k-1}}$$

两边取极限 $B = 1 + \dfrac{1}{A}$，$A = 1 + \dfrac{1}{B}$

解得：$A = B = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

例19. 证明：曲线 $y = f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时存在渐近线

$y = ax + b$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a\,,\quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b\,,$$ 均存在。

证明：必要性：

由条件知，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax - b] = 0$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}[f(x) - ax - b] + a + \frac{b}{x}\right) = a$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = b\text{。}$$

充分性：

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax - b] = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] - b = 0$$

例20. 确定常数 a , b , 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$

解1： 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

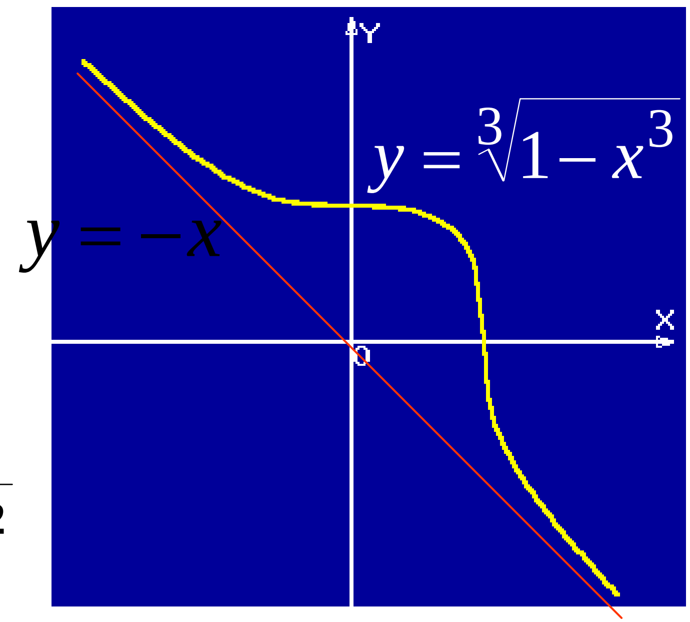
$\therefore \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0$

故 $-1-a=0$, 于是 $a=-1$ ，而

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\underbrace{-x\sqrt[3]{1-x^3}}_{+}+x^2}$$

$$=0$$



解2： 由条件知，$y=ax+b$ 是 $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ 渐近线

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\underbrace{-x\sqrt[3]{1-x^3}}_{+}+x^2}$$

$$=0$$

练习： 确定常数 a，b，使

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$$

$$\boxed{a=1 \qquad b=\frac{1}{2}}$$

例21. 确定常数 a , b , 使 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$

解: 由条件知，$x^2+bx+3b$ 中必有因子 $x-a$

设 $x^2+bx+3b=(x-a)(x-c)=x^2-(a+c)x+ac$

比较系数得，$\begin{cases} a+c=-b & (1) \\ ac=3b & (2) \end{cases}$

$$\because \lim_{x\to a}\frac{x^2+bx+3b}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-c)}{x-a}=a-c=8 \quad (3)$$

联立(1)(2)(3)式得，$a=-4$ 或 $a=6$

$b=16$ 或 $b=-4$

例22. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$ ___2___ ， $b=$ ___e___ .

解 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$

$\dfrac{a}{2}=1=\ln b\quad a=2,\ b=e$

例23 讨论 $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & |x|>1 \\ \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \end{cases}$ 的连续性.

解 将 $f(x)$ 改写成

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1 \\ \cos\frac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 内连续.

当 $x=-1$ 时，

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(1-x) = 2. \because \lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \cos\frac{\pi x}{2} = 0.$$ 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 间断.

当 $x=1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi x}{2} = 0. \quad \because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0.$$ 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 连续.

例24. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，当 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$

$$=\begin{cases} ax^2+bx & |x|<1 \\ x & |x|>1 \\ \dfrac{a-b-1}{2} & x=-1 \\ \dfrac{a+b+1}{2} & x=1 \end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，只要 $f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处连续即可，即必须

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)$$

即得: $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}$

解得: $a=0, b=1$

例25. 求

$$f(x)=\frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$$的间断点, 并判别其类型.

解: $$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(1+x)}\sin x}{|x|\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{1}{2}\sin 1$$

$x=-1$ 为第一类间断点

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$x=1$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1,\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=1,$$

$x=0$ 为第一类间断点

例26. 求 $f(x)=x[x]$ 的间断点, 并判别其类型.

解: (1) x_0 不是整数时，设 $n<x_0<n+1$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x[x]=x_0\cdot n=x_0[x_0]=f(x_0)$$

即 $f(x)$ 在 x_0 连续.

(2) x_0 是整数时，设 $x_0=n$, 则

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} x[x]=x_0\cdot n=x_0[x_0]=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} x[x]=x_0(n-1)$$

(*i*) $n=0$ 时， $x_0=0$ $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=0=f(0)$

(*ii*) $n\neq 0$ 时， $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=x_0(n-1)\neq f(x_0)$

$\therefore$ x_0 是非零整数时，是 $f(x)$ 的第一类间断点。

例27 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点

$x=0$ 及可去间断点 $x=1$,试确定常数 a 及 b .

解: $\because$ $x=0$ 为无穷间断点, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

$$\Longrightarrow a=0\,,b\neq 1$$

$\because$ $x=1$ 为可去间断点, $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}(e^x-b)=0 \Longrightarrow b=\lim_{x\to 1}e^x=e$$

例28 设 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，

且对任意实数 x, y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 对一切 x 都连续

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$

$$=f(x)+f(0)$$

$$=f(x+0)$$

$$=f(x)$$

例29 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明必有一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, $\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论：若 $F(0)=0$, 则 $\xi=0$, $\quad f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若 $F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$, $\quad f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若 $F(0)\neq 0$, $F(\frac{1}{2})\neq 0$，则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2}) - f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists\, \xi \in (0,\frac{1}{2})$, 使 $F(\xi) = 0$.

即 $f(\xi + \frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.

综上，必有一点 $\xi \in [0,\frac{1}{2}] \subset [0,1]$,

使 $f(\xi + \frac{1}{2}) = f(\xi)$ 成立.

例30 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，

证明必有一点 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi+\frac{1}{4})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{4})-f(x)$，则 $F(x)$在 $[0,\frac{3}{4}]$ 上连续.

反证，若对任何 $x\in[0,\frac{3}{4}]$ 都有$F(x)\neq 0$，那么在 $[0,\frac{3}{4}]$ 上必有 $F(x)>0$ 或 $F(x)<0$. 不妨设 $F(x)>0$，则

$$F(0)=f(\frac{1}{4})-f(0)>0,\quad F(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{4})>0,$$

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{4})-f(\frac{1}{2})>0,\quad F(\frac{3}{4})=f(1)-f(\frac{3}{4})>0,$$

从而 $f(1)>f(0)$，矛盾

故存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+\frac{1}{4})=f(\xi)$.

例31 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：对任何自然数 n 必有一点 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi).$$

证明： 略。

例32 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，则对任意的实数 $a\ (0<a<1)$，必有一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+a)-f(x)$,

$$\therefore\ F(0)=f(a)-f(0)=f(a)\geq 0$$

$$F(1-a)=f(1)-f(1-a)=-f(1-a)\leq 0$$

(1) 若 $F(0)=f(a)=0$, 则取 $\xi=0$;

(2) 若 $F(1-a)=-f(1-a)=0$, 则取 $\xi=1-a\in[0,1]$;

(3) 若 $F(0)\neq 0$, $F(1-a)\neq 0$, 则 $F(0)\cdot F(1-a)<0$

而 $[0,1-a]\subset[0,1]$, $F(x)$在 $[0,1-a]$ 上连续.

故存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$,

即 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

例33 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $x_i \in (a,b)$,$i=1,\cdots,n$,

证明：必存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)].$$

证明： 不妨设 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$

并设 $M=\max\limits_i\{f(x_i)\}$, $m=\min\limits_i\{f(x_i)\}$, 则

$$m\le\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]\le M.$$

$\because [x_1,x_2]\subset(a,b)$， $\therefore\ f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 连续

$\therefore$ 由介值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$, 使得

$$f(\xi)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)].$$

例34 证明: 若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则$f(x)$必在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证: 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则给定$\varepsilon>0$, $\exists X>0$,当$|x|>X$ 时, 有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

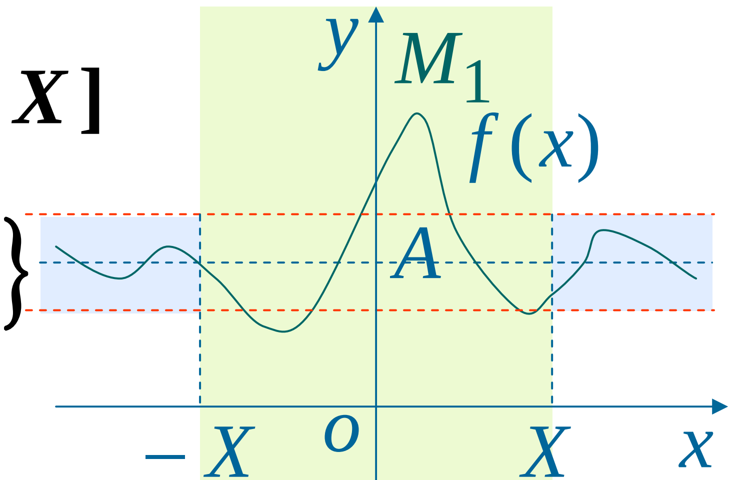
又$f(x)\in C[-X,X]$,根据有界性定理, $\exists M_1>0$, 使

$$|f(x)|\le M_1,\quad x\in[-X,X]$$

取

$$M=\max\{|A+\varepsilon|,|A-\varepsilon|,M_1\}$$

则 $|f(x)|\le M,\ x\in(-\infty,\infty)$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

例35 设非负函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上取得最大值。

证: (1) 若在 $[0,+\infty)$ 上, $f(x)\equiv 0$, 结论成立。

(2) 若在 $[0,+\infty)$ 上存在 x_0, $f(x_0)>0$, $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,

$\therefore \forall\, \varepsilon = f(x_0)>0$, $\exists\, X>0$, 当 $x>X$ 时

$$f(x)=|f(x)-0|<\varepsilon = f(x_0)$$

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上必取得

最大值 M。显然 $x_0\in[0,X]$, 所以 $M\ge f(x_0)$。

而当 $x>X$ 时, $f(x)<f(x_0)\le M$

故 $\max\limits_{0\le x<+\infty}\{f(x)\}=M$

例 36： 一个登山运动员从早上 7：00 开始攀登某座山峰，在下午 7：00 到达山顶，第二天早上 7：00 再从山顶开始沿着上山的路下山，下午 7：00 到达山脚。试用介值定理说明：这个运动员在这两天的某一相同时刻经过登山路线的同一地点。

解 设 $|oA| = a$

设上山过程中，时刻 t 登山者离开 o 点的距离为 $l_1(t)$

设下山过程中，时刻 t 登山者离开 o 点的距离为 $l_2(t)$

则 $l_1(0) = 0$, $l_1(12) = a$; $l_2(0) = a$, $l_1(12) = 0$;

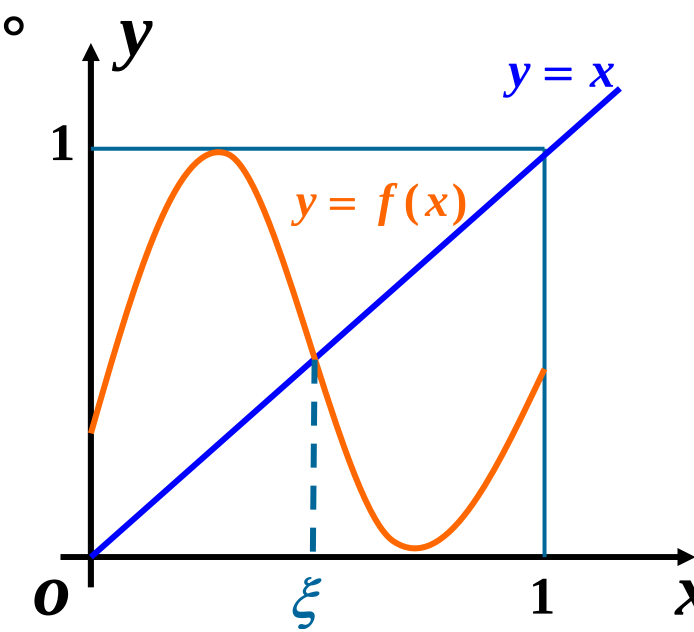
令 $f(t) = l_1(t) - l_2(t)$, $f(0) = -a < 0$, $f(12) = a > 0$

由零点存在定理，存在 t_0 , 使 $f(t_0) = 0$ 即 $l_1(t_0) = l_2(t_0)$,

例 37. 对于函数 $f(x)$，如果存在一点 c，使得 $f(c)=c$，则称 c 为 $f(x)$ 的不动点。

（1）作一个定义域和值域均为[0,1]的连续函数的图形，并找出它的不动点。

（2）利用介质定理证明：定义域为[0,1]，值域包含于[0,1]的连续函数必定有不动点。



解: (1) 如图，不动点即为曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点的横坐标 ξ。只要 $f(x)$ 的定义域和值域都是 [0,1]，$f(x)$ 是连续函数，此交点必存在。

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，其值域为 $[A,B]\subset[0,1]$,

令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

且 $F(0)=f(0)\geq A\geq 0$

$F(1)=f(1)-1\leq B-1\leq 0$

(i) 若 $F(0)$ 或 $F(1)$ 中有一个为 0 ,

则不动点为 0 或 1 ;

(ii) 若 $F(0)$ 和 $F(1)$ 均不为为 0 ,

由零点存在定理，必存在 $\xi\in(0,1)$,

使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

ξ 即为不动点。