第一章习题

1、已知真空中的光速 c＝3 m/s，求光在水（n=1.333）、冕牌玻璃（n=1.51）、火石玻璃（n=1.65）、加拿大树胶（n=1.526）、金刚石（n=2.417）等介质中的光速。

解：

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{3\times10^8}{n}$$

则当光在水中，n=1.333 时，v=2.25 m/s,

当光在冕牌玻璃中，n=1.51 时，v=1.99 m/s,

当光在火石玻璃中，n＝1.65 时，v=1.82 m/s，

当光在加拿大树胶中，n=1.526 时，v=1.97 m/s，

当光在金刚石中，n=2.417 时，v=1.24 m/s。

2、一物体经针孔相机在 屏上成一 60mm 大小的像，若将屏拉远 50mm，则像的大小变为 70mm,求屏到针孔的初始距离。

解：在同种均匀介质空间中光线直线传播，如果选定经过节点的光线则方向不变，令屏到针孔的初始距离为 x，则可以根据三角形相似得出：

$$\frac{60}{70} = \frac{x}{x+50}$$

所以 x=300mm

即屏到针孔的初始距离为 300mm。

3、一厚度为 200mm 的平行平板玻璃（设 n=1.5），下面放一直径为 1mm 的金属片。若在玻璃板上盖一圆形纸片，要求在玻璃板上方任何方向上都看不到该金属片，问纸片最小直径应为多少？

解：令纸片最小半径为 x,

则根据全反射原理，光束由玻璃射向空气中时满足入射角度大于或等于全反射临界角时均会发生全反射，而这里正是由于这个原因导致在玻璃板上方看不到金属片。而全反射临界角求取方法为：

$$\sin I_m = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

其中 n_2=1, n_1=1.5,

同时根据几何关系，利用平板厚度和纸片以及金属片的半径得到全反射临界角的计算方法为：

$$tgI_m = \frac{x-1/2}{200} \qquad (2)$$

联立（1）式和（2）式可以求出纸片最小直径 x=179.385mm， 所以纸片最小直径为 358.77mm。

4、光纤芯的折射率为 n_1、包层的折射率为 n_2,光纤所在介质的折射率为 n_0，求光纤的数值孔径（即 $n_0\sin I_1$,其中 I_1 为光在光纤内能以全反射方式传播时在入射端面的最大入射角）。

解：位于光纤入射端面，满足由空气入射到光纤芯中，应用折射定律则有：

n0sinI1=n2sinI2 (1)

而当光束由光纤芯入射到包层的时候满足全反射，使得光束可以在光纤内传播，则有：

$$\sin(90^0 - I_2) = \frac{n_2}{n_1} \qquad (2)$$

由（1）式和（2）式联立得到 n_0 sinI1 .

5、一束平行细光束入射到一半径 r=30mm、折射率 n=1.5 的玻璃球上，求其会聚点的位置。如果在凸面镀反射膜，其会聚点应在何处？如果在凹面镀反射膜，则反射光束在玻璃中的会聚点又在何处？反射光束经前表面折射后，会聚点又在何处？说明各会聚点的虚实。

解：该题可以应用单个折射面的高斯公式来解决，

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$

设凸面为第一面，凹面为第二面。

（1）首先考虑光束射入玻璃球第一面时的状态，使用高斯公式：

$$由\ \frac{n_1'}{l_1'} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_1'-n_1}{r_1}, \quad n_1' = 1.5, \quad r_1 = 30, \quad n_1 = 1, \quad l_1 = \infty$$

得到：$l_1' = 90mm$

对于第二面，$d = 60mm$，$l_2 = l_1' - d = 90 - 60 = 30mm$

$$由\ \frac{n_2'}{l_2'} - \frac{n_2}{l_2} = \frac{n_2'-n_2}{r_2}, \quad n_2' = 1, \quad n_2 = 1.5, \quad r_2 = -30, \quad l_2 = 30$$

得到：$l_2' = 15mm$

会聚点位于第二面后 15mm 处。

（2）将第一面镀膜，就相当于凸面镜

$$由\ \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{2}{r}, \quad l = \infty \quad 得到\ l' = 15mm$$

像位于第一面的右侧，只是延长线的交点，因此是虚像。

还可以用β正负判断：$\beta = \frac{nl'}{n'l} = -\frac{15}{-\infty} > 0$，实物成虚像。

（3）光线经过第一面折射：$l' = 90mm$，$l_2 = 30$，虚像

第二面镀膜，则：$\frac{1}{l_2'} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{r_2}$，$l_2 = 30$，$r_2 = -30$

得到：$l_2 = -10mm$

像位于第二面前 10mm 处。

$\beta = \frac{l_2'}{l_2} = \frac{1}{3} > 0$ 与物虚实相反，对于第二面，物虚，所以为实像。

（4） 再经过第一面折射

$l_3 = 60 - 10 = 50mm$， $n_3 = 1.5$ ， $n_3 = 1$ ， $r = 30$ ， $\frac{n_3'}{l_3'} - \frac{n_3}{l_3} = \frac{n_3' - n_3}{r_3}$

得到：$l_3' = 75mm$

最后像位于第一面后 75mm，

$\beta = \frac{n_3 l_3'}{n_3' l_3} = \frac{1.5 \times 75}{50} > 0$ ， 物像相反为虚像。

6、一直径为 400mm，折射率为 1.5 的玻璃球中有两个小气泡，一个位于球心，另一个位于 1 / 2 半径处。沿两气泡连线方向在球两边观察，问看到的气泡在何处？如果在水中观察，看到的气泡又在何处？

解：设一个气泡在中心处，另一个在第二面和中心之间。

（1）从第一面向第二面看

中心气泡：$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$

$\frac{1}{l'} - \frac{1.5}{-200} = \frac{1 - 1.5}{-200}$ 得到：$l' = -200$

1 / 2 半径处气泡：$\frac{1}{l'} - \frac{1.5}{-300} = \frac{1 - 1.5}{-200}$ 得到：$l' = -400$

（2）从第二面向第一面看

1 / 2 半径处气泡：$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$， $n = 1$ ， $r = 200$ ， $n = 1.5$ ， $l = 100$

得到：$l' = 80$

（3）在水中

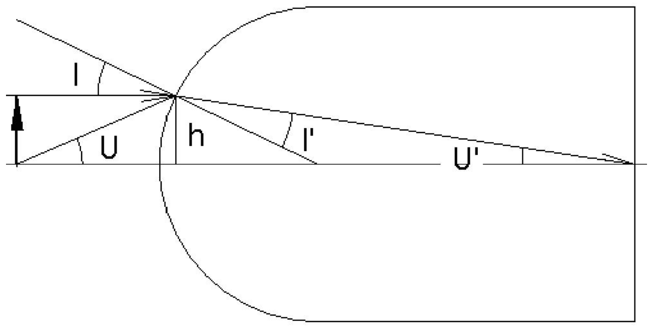
中心气泡对第一面成像：$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$，$n' = \frac{4}{3}$ ， $r = 200$ ，$n = 1.5$ ， $l = 100$

得到：$l' = 94$

1 / 2 半径处气泡对第二面成像：$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$，$n' = \frac{4}{3}$ ， $r = 200$ ，$n = 1.5$ ，

$l = -200$ 得到：$l' = -200$

7、有一平凸透镜 r1=100mm,r2=,d=300mm,n=1.5,当物体在时，求高斯像的位置 l’。在第二面上刻一十字丝，问其通过球面的共轭像在何处？当入射高度 h=10mm，实际光线的像方截距为多少？与高斯像面的距离为多少？



解：

(1) $l=-\infty$

平行光先经第一面成像，$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$

$\frac{1.5}{l'}-\frac{1}{-\infty}=\frac{1.5-1}{100}$ 得到：$l'=300$

即物经第一面成像于平面处。

对于平面，$l=0$ 得到 $l'=0$ ，即像为其本身。

（2）$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$

$\frac{1}{l'}-\frac{1.5}{300}=\frac{1-1.5}{100}$ 得到：$l'=\infty$

即焦面处发出的光经第一面成像于无穷远处，为平行光出射。

（3）当入射高度为 10mm 时：

$$\sin I=\frac{h}{r}$$

$$\sin I'=\frac{n}{n'}\sin I$$ 得到： L'=299.398 $\Delta d=L'-l'=-0.7$

$$U'=U+I-I'$$

$$L'=r\left(1+\frac{\sin I'}{\sin U'}\right)$$

8、一球面镜半径 r=-100mm,求 =0 ，-0.1 ，-0.2 ，-1 ，1 ，5，10，∝时的物距像距。

解：（1）

$$\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\beta=\frac{l'}{l}=0$$ 得到 $l=\infty$ $l'=-50$

$$r=-100$$

$$n=-n$$

（2） 同理，$\beta=-0.1$ 得到：$l=450$ $l'=-45$

（3）同理， $\beta=-0.2$ 得到： $l=200$，$l'=-40$

（4）同理， $\beta=-1$ 得到： $l=100$，$l'=-100$

（5）同理， $\beta=1$ 得到： $l=-100$，$l'=-100$

（6）同理， $\beta=5$ 得到： $l=40$，$l'=200$

（7）同理， $\beta=10$ 得到： $l=45$，$l'=450$

（8）同理， $\beta=\infty$ 得到： $l=50$，$l'=\infty$

9、一物体位于半径为 r 的凹面镜前什么位置时，可分别得到：放大 4 倍的实像，当大 4 倍的虚像、缩小 4 倍的实像和缩小 4 倍的虚像？

解：（1）放大 4 倍的实像

$\beta=-4$

$\frac{1}{l'}+\frac{1}{l}=\frac{2}{r}$ ， $\beta=-\frac{l'}{l}$ 得到： $l=\frac{5}{8}r$，$l'=-\frac{5}{2}r$

（2）放大四倍虚像 $\beta=4$ 同理，得到： $l=\frac{3}{8}r$，$l'=-\frac{3}{2}r$

（3）缩小四倍实像 $\beta=-\frac{1}{4}$ 同理，得到： $l=\frac{5}{2}r$，$l'=\frac{5}{8}r$

（4）缩小四倍虚像 $\beta=\frac{1}{4}$ 同理，得到： $l=-\frac{3}{2}r$，$l'=\frac{3}{8}r$

第二章习题

1、已知照相物镜的焦距 f'＝75mm,被摄景物位于（以 F 点为坐标原点）x=处，试求照相底片应分别放在离物镜的像方焦面多远的地方。

解：

（1）x=-∝ ，xx′=ff′ 得到：x′=0

（2）x′=0.5625

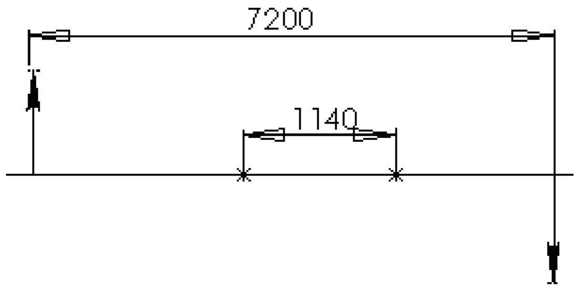
（3）x′=0.703

（4）x′=0.937

（5）x′=1.4

（6）x′=2.81

2、设一系统位于空气中，垂轴放大率，由物面到像面的距离（共轭距离）为 7200mm,物镜两焦点间距离为 1140mm,求物镜的焦距，并绘制基点位置图。



$$f=\frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+(n-1)d]}$$=-1440mm

$$\phi=\frac{1}{f'}=-0.69m^{-1}$$

$$\beta=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}=-10$$

$x'-x=7200-1140=6060$ 得： $f'=600mm$

$xx'=ff'$

3.已知一个透镜把物体放大-3 倍投影在屏幕上，当透镜向物体移近 18mm 时，物体将被放大-4^x 试求透镜的焦距，并用图解法校核之。

解：

$$\beta_1=-\frac{f}{x_1}=-3$$

$$\beta_2=-\frac{f}{x_2}=-4$$ 解得： $f'=216mm$

$$x_2-x_1=18$$

4．一个薄透镜对某一物体成实像，放大率为-1^x,今以另一个薄透镜紧贴在第一个透镜上，则见像向透镜方向移动 20mm，放大率为原先的 3/4 倍，求两块透镜的焦距为多少？

解：

由 $\begin{cases} l_2 - l_2' = 20 \\ \beta_2 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{l_2'}{l_2} \end{cases}$，解得：$l_2 = 80 = l_1'$，$l_2' = 60$

$\dfrac{1}{l_2'} - \dfrac{1}{l_2} = \dfrac{1}{f_2'}$，解得：$f_2' = 240$

$\beta_1 = \dfrac{l_1'}{l_1} = -1$，$l_1 = -80$，$\dfrac{1}{l_1'} - \dfrac{1}{l_1} = \dfrac{1}{f_1'}$，解得：$f_1' = 40$

5．有一正薄透镜对某一物成倒立的实像，像高为物高的一半，今将物面向透镜移近 100mm，则所得像与物同大小，求该正透镜组的焦距。

解：

由 $\begin{cases} \beta_1 = -\dfrac{f}{x_1} = -\dfrac{1}{2} \\ \beta_2 = -\dfrac{f}{x_1} = -1 \\ x_2 - x_1 = 100 \end{cases}$ 解得：$f' = 100mm$

6．希望得到一个对无限远成像的长焦距物镜，焦距 =1200mm，由物镜顶点到像面的距离 L=700 mm，由系统最后一面到像平面的距离（工作距）为 $l_k' = 400mm$，按最简单结构的薄透镜系统考虑，求系统结构，并画出光路图。

解：

① $f' = -\dfrac{f_1 f_2^1}{\Delta} = 1200$

② $\Delta = d - f_1^1 + f_2$

③ $d = L - l_K' = 700 - 400$

④ $l_K' = f'(1 - \dfrac{d}{f_1'}) = l_K' = 400$

由①②③④得 $f_1' = 400$，$f_2' = -240$,d=300

7．一短焦距物镜，已知其焦距为 35 mm，筒长 L=65 mm，工作距,按最简单结构的薄透镜系统考虑，求系统结构。

解：

① $f' = -\dfrac{f_1 f_2^1}{\Delta} = 35$

② $\Delta = d - f_1^1 + f_2$

③ $d = L - l_K' = 65 - 50$

④ $l_K' = f'(1 - \dfrac{d}{f_1'}) = l_K' = 50$

由①②③④得 $f_1' = -35$ ，$f_2' = 25$ ，d=15

8．已知一透镜 $r_1 = -200mm$，$r_2 = -200mm$，$d = 50mm$，$n = 1.5$，求其焦距、光焦度。

解：

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = -1440\text{mm}$$

$$\phi = \frac{1}{f'} = -0.69m^{-1}$$

9．一薄透镜组焦距为 100 mm，和另一焦距为 50 mm 的薄透镜组合，其组合焦距仍为 100 mm，问两薄透镜的相对位置。

解：

$$\begin{cases} f_1' = 100 \\ f_2' = 50 \\ f = 100 \end{cases} \quad 又\because f' = -\frac{f_1' f_2^1}{\Delta}$$

$\therefore \Delta = -50 = d - f_1^1 + f_2' = \mathrm{d} - 100 - 50$ 得：d=100mm

10．长 60 mm，折射率为 1.5 的玻璃棒，在其两端磨成曲率半径为 10 mm 的凸球面，试求其焦距。

解：

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = \infty$$ ，

11．一束平行光垂直入射到平凸透镜上，会聚于透镜后 480 mm 处，如在此透镜凸面上镀银，则平行光会聚于透镜前 80 mm 处，求透镜折射率和凸面曲率半径。

解 ：

$\varphi=(n-1)(\rho_1-\rho_2)=0$ 薄透镜

$f'=\dfrac{1}{\varphi}=-\dfrac{r}{n-1}=480$ ①

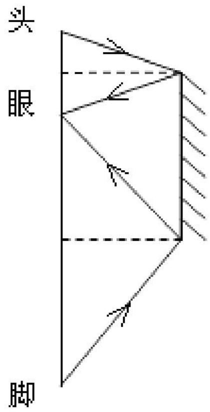
凸面镀银后，$l_1=\infty$ ，$n'=-n$ 则：$\dfrac{1}{l_1'}+\dfrac{1}{l_1}=\dfrac{2}{r}$ $\rightarrow$ $l_1'=\dfrac{r}{2}$

对于平面而言，$-l_1'=l_2$ ，$r=\infty$ ，则：$\dfrac{n'}{l_2'}+\dfrac{n}{l_2}=\dfrac{2}{r}=0$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{80}=\dfrac{n}{-\dfrac{r}{2}}$ ②

由①②可解得 $\begin{cases} r=-240 \\ n=1.5 \end{cases}$

第三章习题

1．人照镜子时，要想看到自己的全身，问镜子要多长？人离镜子的距离有没有关系？



解：

镜子的高度为 1/2 人身高，和前后距离无关。

2．设平行光管物镜 L 的焦距 =1000mm，顶杆与光轴的距离 a=10 mm，如果推动顶杆使平面镜倾斜，物镜焦点 F 的自准直像相对于 F 产生了 y=2 mm 的位移，问平面镜的倾角为多少？顶杆的移动量为多少？

解：

$$y=2f'\theta \quad , \quad \theta=\frac{y}{2f'}=\frac{2}{2\times1000}=0.001rad$$

$$y=\frac{2f'}{a}x \quad , \quad x=\frac{ya}{2f'}=0.01mm$$

3．一光学系统由一透镜和平面镜组成，如图 3-29 所示，平面镜 MM 与透镜光轴垂直交于 D 点，透镜前方离平面镜 600 mm 有一物体 AB，经透镜和平面镜后，所成虚像 至平面镜的距离为 150 mm，且像高为物高的一半，试分析透镜焦距的正负，确定透镜的位置和焦距，并画出光路图。

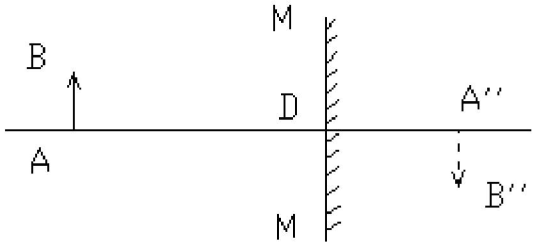
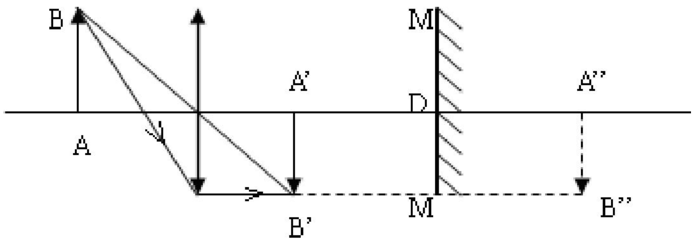


图3-29 习题4图

解：平面镜成β=1 的像，且分别在镜子两侧，物像虚实相反。

$$\begin{cases} l'-l=600-150=40 \\ \beta=-\frac{1}{2}=\frac{l'}{l} \end{cases}$$ 解得：$$\begin{cases} l'=150mm \\ l=-300mm \end{cases}$$

$$\frac{1}{l'}-\frac{1}{l}=\frac{1}{f'}$$ ，解得：$f'=100mm$



4．用焦距=450mm 的翻拍物镜拍摄文件，文件上压一块折射率 n=1.5，厚度 d=15mm 的玻璃平板，若拍摄倍率 $\beta=-1^{\times}$，试求物镜后主面到平板玻璃第一面的距离。

解：

（1） $\beta=-1=-\frac{x'}{f'}$ ，得： $x'=450$，即$l'=-900$

（2） $\beta=-1=\frac{l'}{l}$ ，得： $l=l'=-900$

此为平板平移后的像。

$$\Delta l'=d(1-\frac{1}{n})=5$$

900-（15-5）=890

5．棱镜折射角 $\alpha=60°7'40''$，C 光的最小偏向角 $\delta=45°28'18''$，试求棱镜光学材料的折射率。

解：

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta_m)=n\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(60°7'40''+45°28'18'')}{\sin\frac{1}{2}\times 60°7'40''}=n$$

6．白光经过顶角 $\alpha=60°$ 的色散棱镜，n=1.51 的色光处于最小偏向角，试求其最小偏向角值及 n=1.52 的色光相对于 n=1.51 的色光间的交角。

$$\sin\frac{60+\delta_m}{2}=1.51\sin\frac{60}{2}\text{ , }\delta_m=38°3'3''$$

$$\sin\frac{60+\delta_m'}{2}=1.52\sin\frac{60}{2}\text{ , }\delta_m'=38°55'53''$$

解: $\Delta\delta=52'50''$

第四章习题

二个薄凸透镜构成的系统，其中 $D_1=D_2=4cm$, $f_1'=8cm$, $f_2'=3cm$, L_2 位于 L_1 后 $5cm$ ，若入射平行光，请判断一下孔径光阑，并求出入瞳的位置及大小。

解：判断孔径光阑：第一个透镜对其前面所成像为本身，$D_{I1}=4cm$

第二个透镜对其前面所成像为 L_2' ,其位置：

$$\frac{1}{l'}-\frac{1}{l}=\frac{1}{f'},l'=-40/3cm$$

大小为：$\frac{y'}{y}=\frac{l'}{l},2y'=10.7cm$

故第一透镜为孔阑,其直径为 4 厘米.它同时为入瞳.

2．设照相物镜的焦距等于 75mm，底片尺寸为 55 $\times 55mm^2$，求该照相物镜的最大视场角等于多少？

解：

$$tg\omega=\frac{\sqrt{55^2+55^2}}{2\times 75}$$

$$\Rightarrow 2\omega=54.8^o$$

第五章习题

一个 100W 的钨丝灯，发出总光通量为，求发光效率为多少?

解：

$$\eta=\frac{\phi_V}{P}=1400lm/100W=14lm/W$$

2、有一聚光镜，$\sin U = 0.5$（数值孔径 $NA = n\sin U$），求进入系统的能量占全部能量的百分比。

解：

$$\left.\begin{array}{l} \because \Omega = 4\pi\sin^2(\frac{u}{2}) \\ \sin u = 0.5 \Rightarrow u = 30^o \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow \Omega_1 = 0.84(Sr)$$

而一点周围全部空间的立体角为 $\Omega_2 = 4\pi(Sr)$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = 0.84/4\pi = 6.7\%$$

3、一个 $6v,15W$ 的钨丝灯，已知：$\eta = 14lm/W$，该灯与一聚光镜联用，灯丝中心对聚光镜所张的孔径角 $u \approx \sin U = 0.25$，若设灯丝是各向均匀发光，求 1）灯泡总的光通量及进入聚光镜的能量；2）求平均发光强度

解:

1）求总的光通量 ϕ_v：$\eta = \frac{\phi}{P} \Rightarrow\Rightarrow \phi = P\cdot\eta = 14\times15 = 210lm$

2）求进入系统的能量：$\Omega = 4\pi\sin^2(\frac{U}{2}) \Rightarrow\Rightarrow \Omega = \pi u^2 = \pi\cdot 0.25^2 = \frac{\pi}{16}(Sr)$

$u \approx \sin U = 0.25$

那么一点周围全部空间的立体角为? $\Omega_2 = 4\pi \Rightarrow\Rightarrow \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{\frac{\pi}{16}}{4\pi} = 0.016$

即进入系统的能量占全部能量的 1.6% = ? $\phi' = 0.016\times210 = 3.36lm$

3）发光强度：$I_0 = \frac{\phi}{\Omega} = 210/4\pi = 16.7(cd)$

4、一个 $40W$ 的钨丝灯发出的总的光通量为 $\phi = 500lm$，设各向发光强度相等，求以灯为中心，半径分别为：$r = 1m,2m,3m$ 时的球面的光照度是多少？

解：

$$E_v = \frac{\phi_v}{A}$$

$$r = 1m \Rightarrow\Rightarrow A = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow\Rightarrow E_v = \frac{500}{4\pi} = 40lx$$

$$r = 2m \Rightarrow\Rightarrow A = 4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow\Rightarrow E_v = \frac{500}{16\pi} = 10lx$$

$$r = 1m \Rightarrow\Rightarrow A = 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow\Rightarrow E_v = \frac{500}{36\pi} = 4.4lx$$

5、一房间，长、宽、高分别为：$5m,3m,3m$，一个发光强度为 $I = 60cd$ 的灯挂

在天花板中心，离地面$2.5m$，1）求灯正下方地板上的光照度；2）在房间角落处地板上的光照度。

解：

根据点光源照度的计算公式有：$E_v=\dfrac{I\cos\theta}{r^2}$

1)当分析灯正下方地板上的光照度时，$\theta=0$

$$\Rightarrow\Rightarrow E=\frac{I}{r^2}=\frac{60}{2.5^2}=9.6lx$$

2)设灯到角落的距离为r，则：$r=\sqrt{2.5^2+(\frac{5}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=3.841m$

根据光照度的公式：

$$E=\frac{I\cos\theta}{r^2}---\cos\theta=?$$

$$\cos\theta=\frac{2.5}{r}$$

故有：$E=\dfrac{I\cos\theta}{r^2}=\dfrac{I\frac{2.5}{r}}{r^2}=2.65lx$

第六章习题

1．如果一个光学系统的初级子午彗差等于焦宽（），则ΣS_{II}应等于多少？

解：

$$\left.\begin{aligned}K_{T'}&=-\frac{3}{2n'u'}\sum S_{II}\\K_{T'}&=\frac{\lambda}{n'u'}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum S_{II}=-\frac{2}{3}\lambda$$

2．如果一个光学系统的初级球差等于焦深（），则ΣS_I应为多少？ 解：

$$\delta_L=-\frac{1}{2n'u'^2}\sum S_I=\frac{\lambda}{n'u'^2}\Rightarrow\sum G=-2\lambda$$

3． 设计一双胶合消色差望远物镜，$f'=100mm$，采用冕牌玻璃 K9（$n_D=1.5163$，$\upsilon_D=64.1$）和火石玻璃 F2（$n_D=1.6128$，$\upsilon_D=36.9$），若正透镜半径$r_1=-r_2$，求：正负透镜的焦距及三个球面的曲率半径。

解：

$$\varphi_1+\varphi_2=\phi=1/100 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1=0.01-\varphi_2$$

$$\frac{\varphi_1}{\nu_1}+\frac{\varphi_2}{\nu_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\varphi_1}{64.1}+\frac{\varphi_2}{36.9}=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{0.01-\varphi_2}{64.1}=-\frac{\varphi_2}{36.9}$$

$$\varphi_1=(n_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \quad\Rightarrow\quad r_2=-44 \qquad r_1=44$$

$$\varphi_2=(n_2-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right) \quad\Rightarrow\quad r_3=1425$$

$$\varphi_1=0.023566 \quad\Rightarrow\quad f'_1=42.4$$

$$\varphi_2=0.013566 \quad\Rightarrow\quad f'_2=73$$

4．指出图 6-17 中

（1） $\delta L'_m=?$

（2） $\delta L_{0.707}=?$

（3） $\Delta L'_{FC}=?$

（4） $\Delta l'_{FC}=?$

（5） $\Delta L'_{FC0.707}=?$

（6） 色球差 $\delta L'_{FC}=?$

（7）二级光谱 $\Delta L'_{FCD}=?$

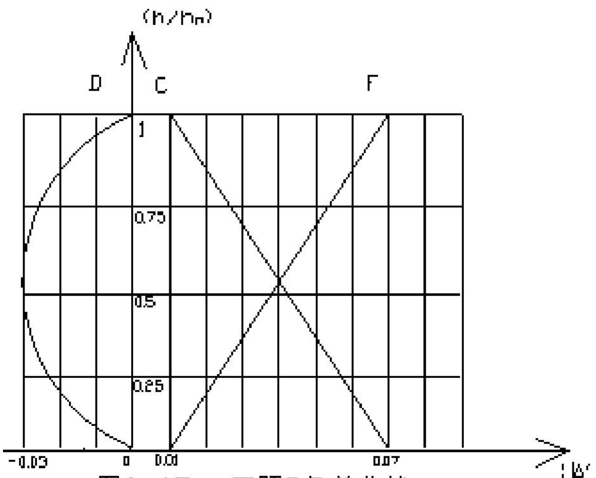


图6-17　习题8色差曲线

解：

$\delta_{Lm}{}' = 0$

$\delta_{L'0.707} = -0.03$

$\Delta L_{FC}{}' = 0.06$

$\Delta l_{FC}{}' = -0.06$

$\Delta L_{FC0.7}{}' = 0$

$\delta'_{LFC} = \Delta L'_{FC} - \Delta l'_{FC} = 0.06 - (-0.06) = 0.12$

$\Delta L'_{FC} = 0.07$

第七章习题

1．一个人近视程度是（屈光度），调节范围是 8D，求：

（1） 其远点距离；

（2） 其近点距离；

（3） 配带 100 度的近视镜，求该镜的焦距；

（4） 戴上该近视镜后，求看清的远点距离；

（5） 戴上该近视镜后，求看清的近点距离。

解：远点距离的倒数表示近视程度

（1） $\frac{1}{l_r} = -2(D) \Rightarrow l_r = -\frac{1}{2} = 0.5\text{m}$

（2） $\text{R}-\text{P}=\bar{A} \Rightarrow -2-\text{P}=\bar{A}=8 \Rightarrow \text{P}=-10$，$\frac{1}{l_p}=-\frac{1}{10}=-0.1\text{m}$

（3） $\left.\begin{array}{l} f' = l_r \\ \frac{1}{l_r} = R = -1(D) \Rightarrow l_r = -1m \end{array}\right\} \Rightarrow f' = -1m$

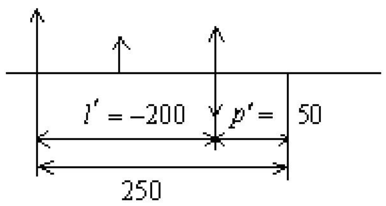
（4） $f' = l_r = -1m$

（5） $\begin{cases} \frac{1}{l_1'} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{-1000} \\ l_1' = -0.5m = 500mm \end{cases} \Rightarrow l_1 = -1000mm = -1m$

$\text{R}-\text{P}=\bar{A}=8$，$-1-\text{P}=8 \Rightarrow \text{P}=-9$，$l_p = -\frac{1}{9}$（m）

2．一放大镜焦距 $f' = 25mm$，通光孔径 $D = 18mm$，眼睛距放大镜为 50mm，像距离眼睛在明视距离 250mm，渐晕系数 K=50%，试求：（1）视觉放大率；（2）线视场；（3）物体的位置。

解：



（1）$\Gamma=\dfrac{250}{f'}+1-\dfrac{p'}{f'}=10+1-\dfrac{50}{25}=9^{\times}$

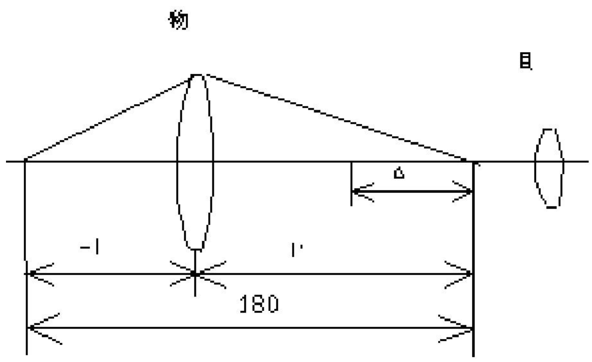
（2）$2y=\dfrac{500h}{\Gamma p'}=\dfrac{500\times9}{9\times50}=10$

（3）$\begin{cases}\dfrac{1}{l'}-\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{f'}\\ l'=-200\end{cases}\Rightarrow l=-\dfrac{200}{9}$

3．一显微物镜的垂轴放大倍率 $\beta=-3^{\times}$，数值孔径 NA=0.1，共轭距 L=180mm，物镜框是孔径光阑，目镜焦距 $f'_e=25mm$ 。

（1） 求显微镜的视觉放大率；
（2） 求出射光瞳直径；
（3） 求出射光瞳距离（镜目距）；
（4） 斜入射照明时，$\lambda=0.55\mu m$ ，求显微镜分辨率；
（5） 求物镜通光孔径；
设物高 2y=6mm，渐晕系数 K=50%，求目镜的通光孔径。

解：



（1）$\Gamma=\beta\Gamma_{目}=-3\times\dfrac{250}{25}=-30^{\times}$

$\begin{cases}\beta=-3=\dfrac{l'}{l}\Rightarrow l'=-3l\\ l'-l=180\end{cases}\Rightarrow l=-45, l'=135$

（2） $\beta = \frac{l'}{l} = \frac{29.6}{-160} = \frac{2h'}{2h}$　　$2h$：物孔径　　$2h'$：出瞳距

$$NA = n\sin u = 0.1 = \sin u \approx tgu \approx \frac{h}{45} = 0.1$$

$$h = 4.5 \quad \Rightarrow \quad 2h = 9$$

$$2h = \frac{29.6}{-160} \times 9 = 1.67mm$$

（3）物方孔阑　它经目镜成像
　物目距离　$135+25=160$

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'_{目}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{l'} - \frac{1}{-100} = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad l = 29.6$$

（4） $\sigma = \frac{0.5\lambda}{NA} = \frac{0.5\times 0.55\mu}{0.1} = 0.00275mm$

（6） $tg\omega = \frac{3}{45} = \frac{D_{目}/2}{135+25} \quad \Rightarrow \quad D_{目} = 21.33$

4．欲分辨 0.000725mm 的微小物体，使用波长 $\lambda = 0.00055mm$，斜入射照明，问：

（1）　显微镜的视觉放大率最小应多大？

（2）　数值孔径应取多少适合？

解：　此题需与人眼配合考虑

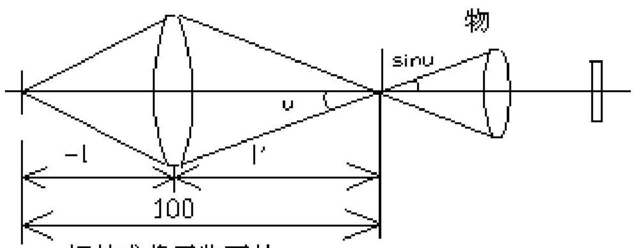
（1） $\sigma = \frac{0.5\lambda}{NA} = 0.000725 \quad \Rightarrow \quad NA = \frac{0.5\times 0.00055}{0.000725} = 0.4$

　在明视处人眼能分辨最小距离

（2） $M = \frac{0.00029\times 250}{0.000725} = 100^{\times}$

5．　有一生物显微镜，物镜数值孔径 NA=0.5，物体大小 2y=0.4mm，照明灯丝面积 $1.2\times 1.2mm^2$，灯丝到物面的距离 100mm，采用临界照明，求聚光镜焦距和通光孔径。

解：



视场光阑决定了物面大小，而物面又决定了照明　的大小

$$2y = 0.4$$

$$NA = n\sin u = 0.5 \Rightarrow \sin u \bullet 0.5 =$$

$$\sin u = \tan u = \frac{D/2}{l'}$$

$$\left.\begin{array}{l} l' - l = 100 \\ \dfrac{l'}{l} = \dfrac{0.4}{1.2} = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} l' = 25 \\ l = -75 \end{array}$$

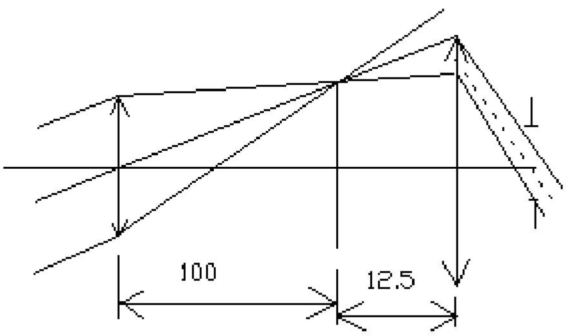
$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{25} - \frac{1}{-75} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = 18.75$$

$$\sin u = tgu = \frac{D/2}{l'} \Rightarrow 0.5l' = D/2 \Rightarrow D = l' = 25$$

6．为看清 4km 处相隔 150mm 的两个点（设 $1' = 0.0003rad$），若用开普勒望远镜观察，则：

（1） 求开普勒望远镜的工作放大倍率；
（2） 若筒长 L=100mm，求物镜和目镜的焦距；
（3） 物镜框是孔径光阑，求出设光瞳距离；
（4） 为满足工作放大率要求，求物镜的通光孔径；
（5） 视度调节在$\pm 5D$（屈光度），求目镜的移动量；
（6） 若物方视场角$2\omega = 8°$，求像方视场角；
（7） 渐晕系数 K=50%，求目镜的通光孔径；

解：



$$\varphi_0 = \frac{150}{4000000} = 0.0000375$$

因为：应与人眼匹配

（1） $M = \dfrac{1'}{\varphi_0} = \dfrac{0.0003}{0.0000375} = 8^{\times}$

（2） $\begin{cases} l = 100 = f_{目}' + f_{物}' \\ \Gamma = \dfrac{f_{物}'}{f_{目}'} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{目}' = 11.1 \\ f_{物}' = 88.9 \end{cases}$

（3）出瞳 $\begin{cases} l = -100 \bullet f_{目}' = 11.1 \\ \dfrac{1}{l'} - \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{f_{目}'} \end{cases} \Rightarrow l' = 12.5$

（4） $\varphi = \dfrac{140''}{D} \Rightarrow D = \dfrac{140}{\varphi} = 18.4$

（5） $x = \dfrac{\pm Df_{目}'^2}{1000} = \pm 0.62$

（6） $\Gamma = 8 = \dfrac{tg\,\omega'}{tg\,\omega} \Rightarrow tg\,\omega' = 8tg4^0 \Rightarrow \omega' = 29.2 \Rightarrow 2\omega' = 58.4^0$

（7） $tg4 = \dfrac{h}{100} \Rightarrow h = tg4 \times 100 = 7 \times 2 = 14$

7．用电视摄相机监视天空中的目标，设目标的光亮度为 2500 cd/m^2，光学系统的透过率为 0.6，摄象管靶面要求照度为 20lx，求摄影物镜应用多大的光圈。

解：

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4} = \tau\pi L(\dfrac{D}{f'})^2 \\ \tau = 0.6 \\ L = 2500 \\ E = 20 \end{cases} \Rightarrow F = \dfrac{f'}{D} = 7.6 \approx 8$$

第十二章 习题及答案

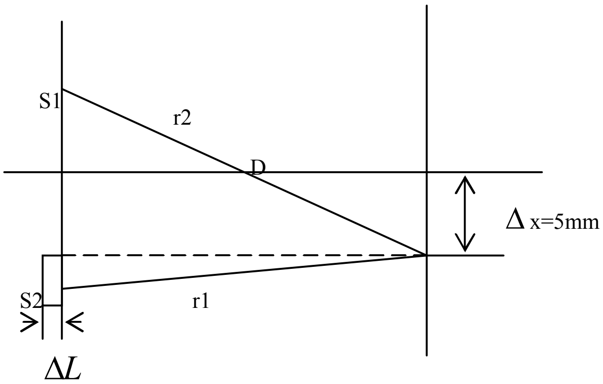
1 。双缝间距为 1 mm，离观察屏 1 m，用钠灯做光源，它发出两种波长的单色光 λ_1=589.0nm 和 λ_2=589.6nm，问两种单色光的第 10 级这条纹之间的间距是多少？

解：由杨氏双缝干涉公式，亮条纹时：$\alpha = \dfrac{m\lambda D}{d}$ （m=0，±1，±2・・・）

m=10 时，$x_1 = \dfrac{10 \times 589 \times 10^{-6} \times 1000}{1} = 5.89nm$，

$x_2 = \dfrac{10 \times 589.6 \times 10^{-6} \times 1000}{1} = 5.896nm$ $\Delta x = x_2 - x_1 = 6\mu m$

2。在杨氏实验中，两小孔距离为 1mm，观察屏离小孔的距离为 50cm，当用一片折射率 1.58 的透明薄片帖住其中一个小孔时发现屏上的条纹系统移动了 0.5cm，试决定试件厚度。



$$n\cdot\Delta l+r_1=r_2$$

$$r_1^2=D^2+\left(\frac{d}{2}-\Delta x\right)^2$$

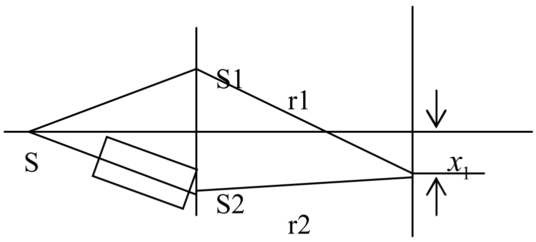
$$r_2^2=D^2+\left(\frac{d}{2}+\Delta x\right)^2$$

$$(r_2-r_1)(r_2+r_1)=$$

$$\left(\frac{d}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\frac{d}{2}-\Delta x\right)^2=d\cdot 2\Delta x$$

$\therefore r_2-r_1=\dfrac{2\Delta x\cdot d}{r_1+r_2}\approx\dfrac{1\times 5}{500}=10^{-2}mm$, $(1.58-1)\Delta l=10^{-2}mm\ \therefore\ \Delta l=1.724\times 10^{-2}mm$

3.一个长 30mm 的充以空气的气室置于杨氏装置中的一个小孔前，在观察屏上观察到稳定的干涉条纹系。继后抽去气室中的空气，注入某种气体，发现条纹系移动了 2 5 个条纹，已知照明光波波长 λ=656.28nm,空气折射率为 $n_0=1.000276$ 。试求注入气室内气体的折射率。



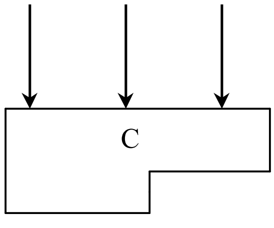
$$\Delta l(n-n_0)=25\lambda$$

$$n-n_0=\frac{25\times 656.28\times 10^{-6}}{30}$$

$$n=1.000276+0.0005469$$

$$=1.0008229$$

4。垂直入射的平面波通过折射率为 n 的玻璃板，透射光经透镜会聚到焦点上。玻璃板的厚度沿着 C 点且垂直于图面的直线发生光波波长量级的突变 d,问 d 为多少时焦点光强是玻璃板无突变时光强的一半。



解：将通过玻璃板左右两部分的光强设为 I_0,当没有突变 d 时， $\Delta=0, I(p)=I_0+I_0+2\sqrt{I_0\cdot I_0}\cdot\cos k\Delta=4I_0$

当有突变 d 时 $\Delta'=(n-1)d$

$$I'(p)=I_0+I_0+2\sqrt{I_0I_0}\cos k\Delta'=2I_0+2I_0\cos k\Delta'$$

$$\because I'(p)=\frac{1}{2}I(p)\therefore\cos k\Delta'=0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)d=m\pi+\frac{\pi}{2},(m=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$$d=\frac{\lambda}{n-1}(\frac{m}{2}+\frac{1}{4})=\frac{\lambda}{2(n-1)}(m+\frac{1}{2})$$

6。若光波的波长为λ，波长宽度为$\Delta\lambda$，相应的频率和频率宽度记为γ和$\Delta\gamma$，

证明：$\left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right|=\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|$，对于$\lambda$＝632.8nm 氦氖激光，波长宽度$\Delta\lambda=2\times10^{-8}nm$，求频率宽度和相干
长度。　解：

$$\because\lambda=CT=C/D,\Delta\lambda=C\left(-\frac{\Delta\gamma}{\gamma^2}\right)=-\frac{C}{\gamma}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)$$

$$\therefore\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right|=\left|\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right|$$

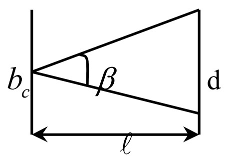
当λ＝632.8nm 时

$$\gamma=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8\times10^9}{632.8}=4.74\times10^{14}Hz$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\therefore\Delta\gamma=4.74\times10^{14}\times\frac{2\times10^{-8}}{632.8}=1.5\times10^4Hz$$

相干长度 $$\Delta_{\max}\approx\frac{\lambda^2}{\lambda}=\frac{(632.8)^2}{2\times10^{-8}}=20.02(km)$$

7。直径为 0.1mm 的一段钨丝用作杨氏实验的光源，为使横向相干宽度大于 1mm，双孔必须与灯相距多远？



$$\because b_c\cdot\beta=\lambda,b_c\cdot\frac{d}{l}=\lambda$$

$$\therefore l=\frac{b_c\cdot d}{\lambda}=\frac{0.1\times1\times10^{-6}}{550\times10^{-9}}=182mm$$

8。在等倾干涉实验中，若照明光波的波长$\lambda=600nm$，平板的厚度 h=2mm，折射率 n=1.5，其下表面涂高折射率介质（n>1.5），问（1）在反射光方向观察到的贺条纹中心是暗还是亮？（2）由中心向外计算，第 10 个亮纹的半径是多少？（观察望远镜物镜的焦距为 20cm）
（3）第 10 个亮环处的条纹间距是多少？

解：（1）因为平板下表面有高折射率膜，所以$\Delta=2\mathrm{nh}\cdot\cos\vartheta_2$

当$\cos\vartheta_2=1$时，中心$\Delta=2\times1.5\times2=6mm$

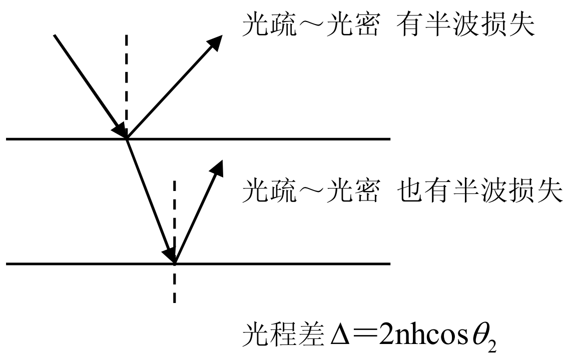
$$m_0=\frac{\Delta}{\lambda}=\frac{6mm}{600nm}=\frac{6\times10^{-6}}{600}=1\times10^4$$ ∴应为亮条纹，级次为10^4

② $$\theta_{1N}\approx\frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}\sqrt{N-1+q}=\sqrt{\frac{1.5\times600}{2\times10^6}}\sqrt{q+1}=0.067(rad)=3.843^o$$

$$R_N=20\times0.067=13.4(mm)$$

(3) $$\because\Delta\theta_1=\frac{n\lambda}{2n'^2\theta_1 h}=\frac{1.5\times600}{2\times0.067\times2\times10^6}=0.00336(rad)\qquad \Delta R_{10}=0.67(mm)$$

注意点：（1）平板的下表面镀高折射率介质



(2) $0<q\leq1$

当中心是亮纹时 q=1

当中心是暗纹时 q=0.5

其它情况时为一个分数

9。用氦氖激光照明迈克尔逊干涉仪，通过望远镜看到视场内有 20 个暗环，且中心是暗斑。然后移动反射镜 M1，看到环条纹收缩，并且一一在中心消失了 20 个环，此时视场内只有 10 个暗环，试求（1）M1 移动前中心暗斑的干涉级次（设干涉仪分光板 G1 不镀膜）；

（2）M1 移动后第 5 个暗环的角半径。

解：

(1)在$M1$镜移动前 $\theta_{1N}=\frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h_1}}\sqrt{N_1-1+q}$， $N_1=20.5, q=0.5$

在$M1$镜移动后 $\theta_{1N}'=\frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h_2}}\sqrt{N_2-1+q}$， $N_2=10.5, q=0.5$

又$\because\theta_{1N}=\theta_{1N}'$得$\frac{h_1}{h_2}=\frac{20}{10}\quad\frac{\Delta h}{h_2}=\frac{h_1-h_2}{h_2}=\frac{10}{10}$

$\Delta h=N\cdot\frac{\lambda}{2}=20\times\frac{\lambda}{2}=10\lambda$ 解得$h_1=20\lambda, h_2=10\lambda$

$$\because\Delta=2nh_1+\frac{\lambda}{2}=m_0\lambda=2\times20\lambda+\frac{\lambda}{2}=40.5\lambda\quad\therefore m_0=40.5$$

(2) $$\theta_{1N}=\frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h_1}}\sqrt{N-1+q}\sqrt{5.5-1+0.5}=\sqrt{\frac{\lambda}{20\lambda}}\sqrt{5}=0.707(rad)$$

本题分析：1。视场中看到的不是全部条纹，视场有限

2。两个变化过程中，不变量是视场大小，即角半径不变

3。条纹的级次问题：

亮条纹均为整数级次，暗条纹均与之相差 0.5，公式中以亮条纹记之

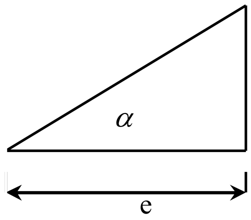
11.用等厚条纹测量玻璃楔板的楔角时,在长达 5cm 的范围内共有 15 个亮纹,玻璃楔板的折射率 n=1.52,所用光波波长为 600nm,求楔角.

$$解:e=\frac{l}{N}=\frac{50}{14}\ (mm)$$

$$\alpha=\frac{\lambda/2n}{e}=\frac{600\times14}{2\times1.52\times50}=5.6\times10^{-5}(rad)$$

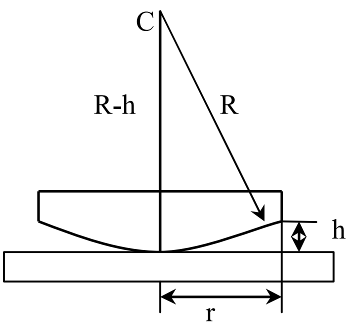
注意:5cm范围内有15个条纹

$$e=\frac{5}{14}\qquad 15个亮条纹相当于14个e$$



$$\Delta h=\frac{\lambda}{2n}$$

12.图示的装置产生的等厚干涉条纹称牛顿环.证明 $R=\frac{r^2}{N\lambda}$,N 和 r 分别表示第 N 个暗纹和对应的暗纹半径. λ 为照明光波波长,R 为球面曲率半径.



证明:由几何关系知,

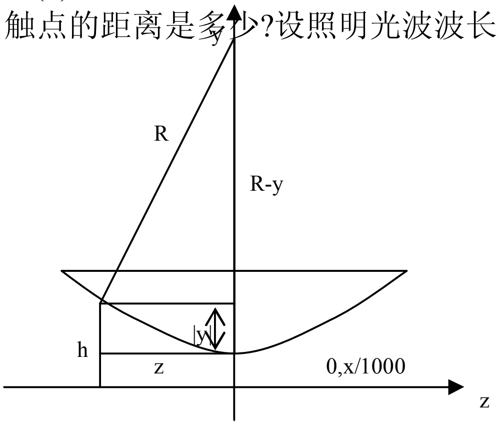
$$r^2=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2$$

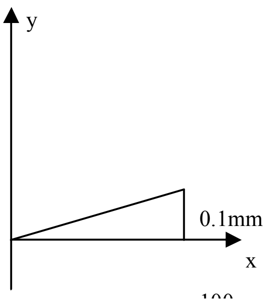
$$略去h^2得\ h=\frac{r^2}{2R}\qquad (1)$$

$$又\because 2h+\frac{\lambda}{2}=(2N+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$h=N\cdot\frac{\lambda}{2}\quad 代入(1)式得R=\frac{r^2}{N\lambda}$$

14.长度为 10 厘米的柱面透镜一端与平面玻璃相接触,另一端与平面玻璃相隔 0.1mm,透镜的曲率半径为 1m.问:(1)在单色光垂直照射下看到的条纹形状怎样0?(2)在透镜长度方向及与之垂直的方向上,由接触点向外计算,第 N 个暗条纹到接触点的距离是多少?设照明光波波长为 500nm.





$$解:(1)斜率k=\frac{0.1}{100}=\frac{1}{1000} \qquad y=kx=\frac{1}{1000}x \qquad 0\le x\le 100mm$$

$$z^2=R^2-(R-y)^2=2R|y|-|y|^2 \qquad |y|=\frac{z^2}{2R}$$

$$h=\frac{1}{1000}x+\frac{z^2}{2R}=\frac{x}{1000}+\frac{z^2}{2000}=常数---(1)$$

$$(2)\ \Delta=2h+\frac{\lambda}{2}=(2N+1)\frac{\lambda}{2} \qquad 2h=N\cdot\lambda \qquad h=N\cdot\frac{\lambda}{2}代入(1)式得$$

$$\mathrm{N}=\frac{2}{\lambda}\left(\frac{x}{1000}+\frac{z^2}{2000}\right) \qquad 解得x=500N\lambda-\frac{z^2}{2}$$

$$x\approx 500\mathrm{N}\cdot 500(\mu m)=0.25N(mm)$$

15. 假设照明迈克耳逊干涉仪的光源发出波长为 λ_1 和 λ_2 的两个单色光波, $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$,

且$\Delta\lambda \ll \lambda_1$,这样当平面镜M1移动时,干涉条纹呈周期性地消失和再现,从而使条纹可见度作周期性变化.(1)试求条纹可见度随光程差的变化规律;(2)相继两次条纹消失时,平面镜 M1 移动的距离Δh;(3)对于钠灯,设$\lambda_1=589.0nm,\lambda_2=589.6nm$均为单色光,求$\Delta h$值.

$$解:\lambda_1的干涉光强\ I_1'=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos k_1\Delta=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda_1}2h$$

$$\lambda_2的干涉光强\ I_2'=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos k_2\Delta=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda_2}2h$$

$$设\mathrm{A}=I_1+I_2 \quad \mathrm{B}=2\sqrt{\mathrm{I_1I_2}}$$

$$\mathrm{I}=\mathrm{I_1'}+\mathrm{I_2'}=2A+B\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda_1}\Delta+\cos\frac{2\pi}{\lambda_2}\Delta\right)$$

$$=2A+B\left[2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}+\frac{2\pi}{\lambda_2}\right)\Delta\cdot\cos\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}\right)\Delta\right]$$

$$=2\mathrm{A}+\mathrm{B}\left[2\cos\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda^2}\pi\Delta\cdot\cos\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda^2}\pi\Delta\right]$$

$$=2\mathrm{A}+\mathrm{B}\left[\cos\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\cos\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\pi\Delta\right]$$

$$=2A+\left[1+\frac{B}{A}\cos\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\pi\Delta\cos\delta\right] \qquad \therefore k=\left|\frac{B}{A}\cos\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\pi\Delta\right|$$

$$(2)条纹k最大满足关系\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\pi\Delta=m\pi \ \therefore\Delta=m\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

$$\therefore\delta\Delta=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\delta_m \qquad 令\delta_m=1 \qquad 且\delta\Delta=2\Delta h \qquad 得\Delta h=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda}$$

$$(3)\quad \Delta h=\frac{589.6\times 589}{2\times(589.6-589)}=0.289(mm)$$

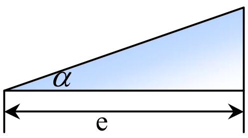
16.用泰曼干涉仪测量气体折射率.D1 和 D2 是两个长度为 10cm 的真空气室,端面分别与光束 I 和 II 垂直.在观察到单色光照明λ=589.3nm 产生的干涉条纹后,缓慢向气室 D2 充氧气,最后发现条纹 移动了 92 个,(1)计算氧气的折射率(2)若测量条纹精度为 1/10 条纹,示折射率的测量精度.

解:(1) $\delta\Delta=(n_{氧}-n)h=N\cdot\frac{\lambda}{2}$ $\quad (n_{氧}-1)\times10cm=92\times\frac{589.3}{2}nm$ $\quad \therefore n_{氧}=1+\frac{589.3\times10^{-9}\times92}{2\times10\times10^{-2}}=1.000271$

(2) $\Delta h\times10cm=\frac{1}{10}\cdot\frac{589.3}{2}nm$ $\quad \Delta n=\frac{1\times589.3\times10^{-9}}{10\times2\times10\times10^{-2}}=2.9465\times10^{-7}$

17.红宝石激光棒两端面平等差为$10''$,将其置于泰曼干涉仪的一支光路中,光波的波长为 632.8nm,棒放入前,仪器调整为无干涉条纹,问应该看到间距多大的条纹?设红宝石棒的折射率 n=1.76

$$解:\alpha=10''=\frac{10}{60\times60}\times\frac{\pi}{180}=4.848\times10^{-5}rad$$
$$\Delta h=\frac{\lambda}{2(n-1)}=\frac{632.8}{2\times(1.76-1)}=416.32nm$$
$$e=\frac{\Delta h}{\alpha}=8.58nm$$



$\Delta h=\frac{\lambda}{2n}$

18.将一个波长稍小于 600nm 的光波与一个波长为 600nm 的光波在 F-P 干涉仪上比较,当 F-P 干涉仪两镜面间距改变 1.5cm 时,两光波的条纹就重合一次,试求未知光波的波长.

解:λ_1对应的条纹组为$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot2h\cdot\cos\theta+2\varphi=2m_1\pi$ $\quad 2h\cdot\cos\theta=m\lambda$

(为胸在金属内表面反射时引起的相位差)

接近中心处时$\cos\theta=1$ $\quad$ 即$\frac{4\pi}{\lambda}\cdot h+2\varphi=2m_1\pi$

同理对λ_2有 $\frac{4\pi}{\lambda_2}h+2\varphi=2m_2\pi$

$$\Delta m=m_2-m_1=\left(\frac{2h}{\lambda_1}+\frac{\varphi}{\pi}\right)-\left(\frac{2h}{\lambda_2}+\frac{\varphi}{\pi}\right)=\frac{2h\cdot\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

$\delta\Delta m=\frac{2\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}\cdot\Delta h$ $\quad$ 当$\delta\Delta m=1$时 $\Delta h=1.5$mm $\quad$ 代入上式得

$\Delta\lambda=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Delta\lambda}=\frac{(600)^2}{2\times1.5\times10^6}==0.12nm$ $\quad \lambda=600-0.12=599.88nm$

关键是理解:每隔 1.5mm 重叠一次,是由于跃级重叠造成的.超过了自由光谱区范围后,就会发生跃级重叠现象.
常见错误:未导出变化量与级次变化的关系,直接将 h 代 1.5mm 就是错误的.

19.F-P 标准具的间隔为 2.5mm,问对于 500nm 的光,条纹系中心的干涉级是是多少?如果照明光波包含波长 500nm 和稍小于 500 的两种光波,它们的环条纹距离为 1/100 条纹间距,问未知光波的波长是多少?

$$解:2nh = m\lambda \quad m = \frac{2\times2.5\times10^{-3}}{500\times10^{-9}} = \frac{5\times10^{-3}}{5\times10^{-7}} = 10000$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta e}{e}\cdot\frac{\lambda^2}{2h} = \frac{1}{100}\times\frac{500\times10^{-9}\times500}{2\times2.5\times10^{-3}} = 5\times10^{-4}nm$$

$$\lambda_2 = 499.9995nm$$

20.F-P 标准具的间隔为 0.25mm,它产生的 λ_1 谱线的干涉环系中的第 2 环和第 5 环的半径分别是 2mm 和 3.8mm, λ_2 谱系的干涉环系中第 2 环和第 5 环的半径分别是 2.1mm 和 3.85mm.两谱线的平均波长为 500nm,求两谱线的波长差.

$$解:对于多光束干涉,考虑透射光 I_t = \frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}}I_i$$

$$当\delta = 2m\pi(m=0,\pm1,\pm2)时,对应亮条纹$$

$$即\Delta = 2nh\cdot\cos\theta+\frac{\lambda}{2} = m\lambda 时对应亮条纹$$

$$\because \theta_{1N} \approx \frac{1}{n'}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}\sqrt{N-1+q}$$

$$对于\lambda_1有\begin{cases}\theta_{12}'\cdot f' = \sqrt{\frac{n\lambda_1}{h}}\sqrt{1+q}\cdot f' = 2mm & (1)\\ \theta_{15}'\cdot f' = \sqrt{\frac{n\lambda_1}{h}}\sqrt{4+q}\cdot f' = 3.8mm & (2)\end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{\sqrt{1+q}}{\sqrt{4+q}} = \frac{2}{3.8} \qquad q = 0.1494$$

$$(1)式可写成 \quad 1.072\sqrt{\frac{n\lambda_1}{h}}\cdot f' = 2 \qquad (3)$$

$$对于\lambda_2有\begin{cases}\theta_{12}' = \sqrt{\frac{n\lambda_2}{h}}\sqrt{1+q'}\cdot f' = 2.1mm & (4)\\ \theta_{15}'' = \sqrt{\frac{n\lambda_2}{h}}\sqrt{4+q'}\cdot f' = 3.85mm & (5)\end{cases}$$

$$\frac{(4)}{(5)}: \quad \frac{\sqrt{1+q'}}{\sqrt{4+q'}} = \frac{2.1}{3.85} \qquad q' = 0.2706$$

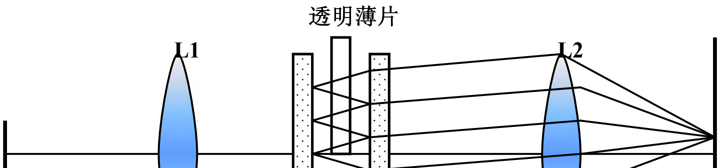
$$(4)式可写成 \quad 1.1272\sqrt{\frac{n\lambda_2}{h}}\cdot f' = 2.1 \qquad (6)$$

$$\frac{(3)}{(6)}: \quad \frac{1.072}{1.1272}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{2}{2.1} \qquad 整理得\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1.002845$$

$$又知 \quad \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = 500nm \qquad 联立得\begin{cases}\lambda_1 = 500.71024nm\\ \lambda_2 = 499.28976nm\end{cases}$$

$$\Delta\lambda = 1.42nm$$

21.F-P 标准具两镜面的间隔为 1cm,在其两侧各放一个焦距为 15cm 的准直透镜 L1 和会聚透镜 L2.直径为 1cm 的光源(中心在光轴上)置于 L1 的焦平面上,光源为波长 589.3nm 的单色光;空气折射率为 1.(1)计算 L2 焦点处的干涉级次,在 L2 的焦面上能看到多少个亮条纹?其中半径最大条纹的干涉级和半径是多少?(2)若将一



片折射率为 1.5,厚为 0.5mm 的透明薄片插入其间至一半位置,干涉环条纹应该怎么变化?

解：$\Delta_{中心}=2nh+\dfrac{\lambda}{2}=m_0\lambda \qquad m_0=\dfrac{2nh}{\lambda}+0.5=\dfrac{2\times10\times10^6}{589.3}+0.5=33939$ 中心为亮斑

$\alpha=\dfrac{b/2}{f'}=\dfrac{0.5}{15}=\dfrac{1}{30}rad=1.90986^o \qquad R_{\max}=\alpha\cdot f'=\dfrac{1}{30}\times15=5mm$

$\theta_{1N}=\dfrac{1}{n'}\sqrt{\dfrac{n\lambda}{h}}\sqrt{N-1+q}=\dfrac{1}{30} \qquad q=1 \qquad \sqrt{N-1+q}=\dfrac{1}{30}\sqrt{\dfrac{10\times10^6}{589.3}}=4.3 \qquad$ N=18

$\theta_{1N}=\dfrac{b/2}{f'}=\dfrac{0.5}{15}=\dfrac{1}{30}rad=1.90986^o \qquad \Delta_{边缘}=2nh\cdot\cos\theta+\dfrac{\lambda}{2}=m\lambda$

$m=\dfrac{2nh\cdot\cos\theta}{\lambda}+0.5=\dfrac{2\times10\times10^6\cos\theta}{589.3}+0.5=33920$

$m_1=33938 \qquad m_1-(N-1)=33920 \qquad \Rightarrow$ N=19

25。有一干涉滤光片间隔层的厚度为$2\times10^{-4}mm$，折射率 n=1.5。求（1）正入射时滤光片在可见区内的中心波长;（2）$\rho=0.9$ 时透射带的波长半宽度;（3）倾斜入射时，入射角分别为10^o和30^o时的透射光波长。

解 ① 正入射时 $\lambda_c=\dfrac{2nh}{m}=\dfrac{2\times1.5\times2\times10^{-4}\times10^6}{m}=\dfrac{600}{m}nm \qquad m=1$时$\lambda_c=600nm$

(2) $\Delta\lambda=\dfrac{\lambda^2}{2\pi nh}\cdot\dfrac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}=\dfrac{600^2}{2\pi\times1.5\times2\times10^{-4}\times10^6\times\sqrt{0.9}}=20nm$

③ $\sin\theta_1=n\cdot\sin\theta_2 \qquad \sin\theta_2=\dfrac{\sin\theta_1}{n}$

入射角为10^o时折射角为$\theta_2=6.65^o$

入射角为30^o时折射角为θ_2=19.47^o 由公式$2nh\cos\theta_2=m\lambda$得

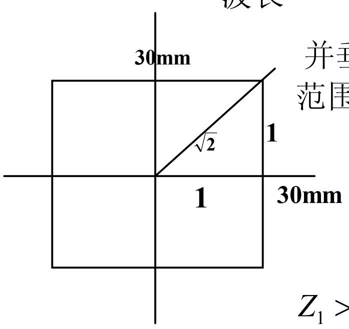
$\therefore 10^o$角入射时$\lambda_c=\dfrac{2\times1.5\times2\times2\times10^{-4}\cos6.65^o}{m}=\dfrac{595.96325}{m} \qquad m=1$时$\lambda_c=595.96325nm$

30^o角入射时$\lambda_c=\dfrac{600\cos19.47^o}{m}=\dfrac{565.68969}{m} \qquad m=1$时$\lambda_c=565.68969nm$

注意:光程差公式中的θ_2是折射角,已知入射角应变为折射角.

第十三章习题解答

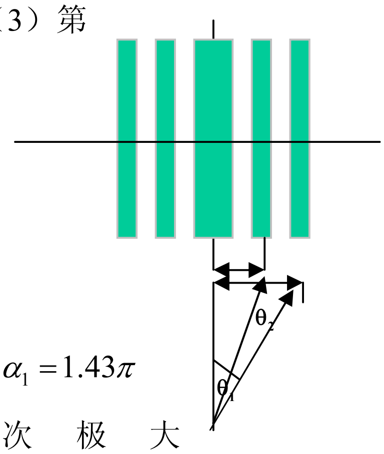
波长$\lambda=500nm$的单色光垂直入射到边长为 3cm 的方孔，在光轴（它通过孔中心并垂直方孔平面）附近离孔 z 处观察衍射，试求出夫琅和费衍射区的大致范围。



解： ∵夫琅和费衍射应满足条件 $k\dfrac{(x_1^2+y_1^2)_{\max}}{2Z_1}<<\pi$

$$Z_1>\frac{k(x_1^2+y_1^2)_{\max}}{2\pi}=\frac{(x_1^2+y_1^2)_{\max}}{\lambda}=\frac{a^2}{2\lambda}=\frac{9\times10^7}{2\times500}(cm)=900(m)$$

波长为 500nm 的平行光垂直照射在宽度为 0.025mm 的单逢上，以焦距为 50cm 的会聚透镜将衍射光聚焦于焦面上进行观察，求（1）衍射图样中央亮纹的半宽度；（2）第一亮纹和第二亮纹到中央亮纹的距离；（3）第一亮纹和第二亮纹相对于中央亮纹的强度。



解：$I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \qquad \alpha = \dfrac{kal}{2} = \dfrac{ka\cdot y}{2f} = \dfrac{\pi}{\lambda}\cdot a\sin\theta$

（1）$\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{500}{0.025\times10^6} = 0.02(rad) \qquad d = 10(rad)$

（2）亮纹方程为 $tg\alpha=\alpha$。 满足此方程的第一次极大 $\alpha_1 = 1.43\pi$ 第二次极大 $\alpha_2 = 2.459\pi$

$$\alpha = \frac{kla}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\cdot a\cdot\sin\theta_x \qquad \sin\theta_x = \frac{\lambda\alpha}{\pi a}$$

一级次极大 $\theta_x \approx \sin\theta_x = \dfrac{500\times1.43\pi}{\pi\times0.025\times10^6} = 0.0286(rad) \qquad x_1 = 14.3(mm)$

二级次极大 $\theta_x \approx \sin\theta_x = \dfrac{500\times2.459\pi}{\pi\times0.025\times10^6} = 0.04918(rad) \qquad x_1 = 24.59(mm)$

（3）$\dfrac{I_1}{I_0} = \left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{\sin1.43\pi}{1.43\pi}\right)^2 = 0.0472$

$$\frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin2.459\pi}{2.459\pi}\right)^2 = 0.01648$$

10．若望远镜能分辨角距离为 $3\times10^{-7}rad$ 的两颗星，它的物镜的最小直径是多少？同时为了充分利用望远镜的分辨率，望远镜应有多大的放大率？

解：$\theta_0 = \dfrac{1.22\lambda}{D} \qquad D = \dfrac{1.22\times550\times10^{-9}}{3\times10^{-7}} = 2.24(m)$

$$\Gamma = \frac{60''}{\varphi} = \frac{60\times\pi}{60\times60\times180\times10^{-7}\times3} = 969^{\times}$$

11． 若要使照相机感光胶片能分辨 $2\mu m$ 线距，（1）感光胶片的分辨率至少是没毫米多少线；（2）照相机镜头的相对孔径 D/f 至少是多大？（设光波波长 550nm）

解：$N=\dfrac{1}{2\times10^{-3}}=500(线/_{mm})$

$$D/_{f'}\approx\frac{N}{1490}=0.3355$$

12． 一台显微镜的数值孔径为 0。85，问（1）它用于波长$\lambda=400nm$时的最小分辨距离是多少？（2）若利用油浸物镜使数值孔径增大到 1.45,分辨率提高了多少倍？（3）显微镜的放大率应该设计成多大？（设人眼的最小分辨率是$1'$）

解：（1）$\varepsilon=\dfrac{0.61\lambda}{NA}=\dfrac{0.61\times400}{0.85}=0.287(\mu m)$

（2）$\varepsilon'=\dfrac{0.61\lambda}{NA}=\dfrac{0.61\times400}{1.45}=0.168(\mu m)$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{1.45}{0.85}=1.706$$

（3）设人眼在 250mm 明视距离初观察

$$y'=250\times {}^{1}/_{60}\times {}^{\pi}/_{180}=72.72(\mu m)$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{72.72}{0.168}\approx430$$

$$\Gamma=\beta=430$$

13． 在双逢夫琅和费实验中，所用的光波波长$\lambda=632.8nm$，透镜焦距$f=50cm$，观察到两相临亮条纹间的距离$e=1.5mm$，并且第 4 级亮纹缺级。试求：（1）双逢的逢距和逢宽；（2）第 1，2，3 级亮纹的相对强度。

解：(1) $\because d\cdot\sin\theta=m\lambda \quad (m=0,\pm1,\pm2\cdots)$

又 $\because\sin\theta=\dfrac{x}{f} \quad \therefore x=\dfrac{m\lambda}{d}f \quad e=\dfrac{\lambda}{d}f$

$$\therefore d=\frac{\lambda f}{e}=\frac{632.8\times10^{-6}}{1.5}\times500=0.21(mm)$$

$\because \mu_1=n\cdot(\frac{d}{a})$ 将 $\begin{cases}\mu_1=4\\ n=1\end{cases}$ 代入得

$$a=\frac{d}{4}=0.053(mm)\Rightarrow\frac{a}{d}=\frac{1}{4}$$

（2）当 m=1 时 $\sin\theta_1=\frac{\lambda}{d}$

当 m=2 时 $\sin\theta_2=\frac{2\lambda}{d}$

当 m=3 时 $\sin\theta_3=\frac{3\lambda}{d}$

代入单缝衍射公式 $I=N^2I_0(\frac{\sin\beta}{\beta})^2 \quad \beta=\frac{\pi}{\lambda}\cdot a\sin\theta$

∴ 当 m=1 时 $\frac{I_1}{I_0}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda}a\cdot\frac{\lambda}{d}\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}a\cdot\frac{\lambda}{d}\right)^2}=\frac{\sin^2(\frac{\pi a}{d})}{(\frac{\pi a}{d})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{\pi}{4})^2}=0.81$

当 m=2 时 $\frac{I_2}{I_0}=\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi a}{d}\right)}{\left(\frac{2\pi a}{d}\right)^2}=\frac{1}{(\frac{2\pi}{4})^2}=0.405$

当 m=3 时 $\frac{I_3}{I_0}=\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2}=0.09$

15. 一块光栅的宽度为 10cm ,每毫米内有 500 条逢，光栅后面放置的透镜焦距为 500nm。问：（1）它产生的波长 $\lambda=632.8nm$ 的单色光的 1 级和 2 级谱线的半宽度是多少？（2）若入射光线是波长为 632.8nm 和波长与之相差 0.5nm 的两种单色光，它们的 1 级和 2 级谱线之间的距离是多少？

解：$d=\frac{1}{500}=2\times10^{-3}(mm)$ $\quad N=100\times500=5\times10^4$

由光栅方程 $d\sin\theta=m\lambda$ 知

$\sin\theta_1=\frac{\lambda}{d}=\frac{632.8}{2\times10^{-3}\times10^6}=0.3164$ ，$\cos\theta_1=0.9486$

$\sin\theta_2=\frac{2\lambda}{d}=0.6328$ ，$\cos\theta_2=0.774$

这里的 θ_1，θ_2 确定了谱线的位置

（1） $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta}$ （此公式即为半角公式）

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_1} = \frac{632.8}{5\times10^4\times2\times10^{-3}\times10^6\times0.9486} = 6.67\times10^{-6}(rad)$$

$$\Delta\theta_2 = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_2} = \frac{632.8}{5\times10^4\times2\times10^3\times0.774} = 8.17\times10^{-6}(rad)$$

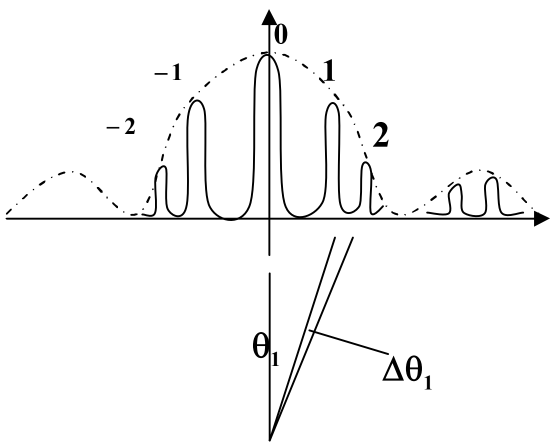
$$dl_1 = f\Delta\theta_1 = 3.34\times10^{-3}(mm)$$

$$dl_2 = f\Delta\theta_2 = 4.08\times10^{-3}(mm)$$

（2）由公式 $\dfrac{dl}{d\lambda} = f\cdot\dfrac{m}{d\cos\theta}$ （此公式为线色散公式）

可得

$$dl_1 = d\lambda\cdot f\cdot\frac{1}{d\cos\theta_1} = 0.5\times10^{-6}\times500\times\frac{1}{2\times10^{-3}\times0.9486} = 0.131(mm)$$



$$dl_2 = d\lambda\cdot f\cdot\frac{2}{d\cos\theta_2} = 0.5\times10^{-6}\times500\times\frac{2}{2\times10^{-3}\times0.774} = 0.32(mm)$$

16． 设计一块光栅，要求：（1）使波长 $\lambda = 600nm$ 的第二级谱线的衍射角 $\theta \le 30^\circ$，（2）色散尽可能大，（3）第三级谱线缺级，（4）在波长 $\lambda = 600nm$ 的第二级谱线处能分辨 0.02nm 的波长差。在选定光栅的参数后，问在透镜的焦面上只可能看到波长 600nm 的几条谱线？

解：设光栅参数 逢宽 a ，间隔为 d

由光栅方程 $d\sin\theta = m\lambda$

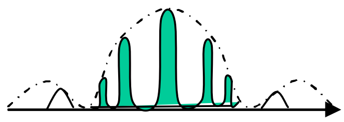
$$d=\frac{m\lambda}{\sin\theta}\geq\frac{2\times600nm}{1/2}=2400nm$$

由于 $\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta}$ 若使 $\frac{d\theta}{d\lambda}$ 尽可能大，则 d 应该尽可能小

$\therefore d=2400nm$

$\because d=a\left(\frac{m}{n}\right)$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}d=800nm$

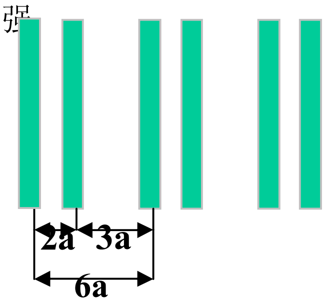
$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{mN}\Rightarrow N=\frac{\lambda}{m\cdot\Delta\lambda}=\frac{600}{2\times0.02}=15000$$



$$m=\frac{d\sin\theta}{\lambda}=\frac{2400}{600}=4$$

$\therefore$ 能看到 5 条谱线

19. 有多逢衍射屏如图所示，逢数为 2N，逢宽为 a，逢间不透明部分的宽度依次为 a 和 3a。试求正入射情况下，这一衍射的夫琅和费衍射强度分布公式。



解：将多逢图案看成两组各为 N 条，相距 d=6a

$\Delta=d\cdot\sin\theta=m\lambda$

$$I(p)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sin\frac{N}{2}\cdot\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right]^2\qquad\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

其中 $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=\frac{2\pi}{\lambda}\times6a\cdot\sin\theta=\frac{12\pi}{\lambda}a\cdot\sin\theta=12\alpha$

代入得 $I(p)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin6N\alpha}{\sin6\alpha}\right)^2$

两组光强分布相差的光程差 $\Delta'=2a\sin\theta$ $\quad\delta'=\frac{4\pi}{\lambda}a\sin\theta$

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cdot\cos k\Delta'$$

$$=2I(p)(1+\cos k\Delta')=4I(p)\cdot\cos^2\frac{\delta'}{2}$$

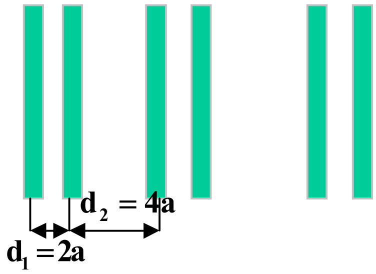
$$=4I(p)\cdot\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta\right)$$

将 $\alpha=\frac{ka\sin\theta}{2}=\frac{\pi}{\lambda}\cdot a\sin\theta$ 及 $I(p)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin6N\alpha}{\sin6\alpha}\right)^2$

代入上式

$$I = 4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left\{\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right\}^2\cos^2 2\alpha$$

[解法 I] 按照最初的多逢衍射关系推导



设最边上一个单逢的夫琅和费衍射图样是：$\widetilde{E}(p) = A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$

其中 $\alpha = \frac{kma}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\cdot\sin\theta$

d_1 对应的光程差为： $\Delta_1 = d_1\sin\theta$ $\quad \delta_1 = 2a\cdot\sin\theta\times\frac{2\pi}{\lambda} = 4\alpha$

d_2 对应的光程差为： $\Delta_2 = d_2\sin\theta$ $\quad \delta_2 = 4a\cdot\sin\theta\times\frac{2\pi}{\lambda} = 8\alpha$

$$\sum\widetilde{E}(p) = A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)[1+\exp i(12\alpha)+\exp i(24\alpha)+\cdots\exp i(N-1)12\alpha+$$

$$\exp i(4\alpha)(1+\exp i(12\alpha)+\exp i(24\alpha)+\cdots+\exp i(N-1)12\alpha)]$$

$$= A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)[1+\exp i(4\alpha)]\cdot\frac{1-\exp[iN(12\alpha)]}{1-\exp i(12\alpha)}$$

$$= A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)[1+\exp i(4\alpha)]\cdot\frac{\exp\frac{iN(12\alpha)}{2}\left(\exp\frac{-iN(12\alpha)}{2}-\exp\frac{iN(12\alpha)}{2}\right)}{\exp i6\alpha\left(\exp\frac{-i(12\alpha)}{2}-\exp\frac{i(12\alpha)}{2}\right)}$$

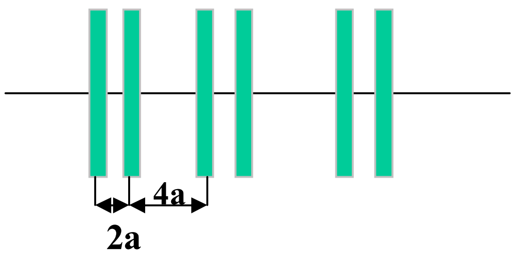
$$= A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\exp i(2\alpha)[\exp-i(2\alpha)-\exp i(2\alpha)]\cdot\frac{\exp i(6N\alpha)}{\exp i(6\alpha)}\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}$$

$$= 2A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos 2\alpha\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\exp i(6N-4)\alpha$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\cos 2\alpha\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\alpha}\right)^2$$

[解法 II] N 组双逢衍射光强的叠加

设 $\alpha = \frac{\pi}{\lambda}a\cdot\sin\theta$ $\qquad d = 2a$



$\Delta = d\cdot\sin\theta = 2a\cdot\sin\theta$

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2a \cdot \sin\theta = 4\alpha$$

$$\tilde{E}(p) = A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)(1 + \exp i\delta)$$

$$= A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\exp\frac{i\delta}{2}\left(\exp -\frac{i\delta}{2} + \exp\frac{i\delta}{2}\right)$$

$$= 2A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\frac{\delta}{2}\exp\frac{i\delta}{2}$$

$$= 2A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos 2\alpha \exp i2\alpha$$

N 组 $\tilde{E}(p)$ 相叠加 d=6a $\Delta_2 = 6a\sin\theta$ $\delta_2 = 12\alpha$

$$\sum \tilde{E}(p) = \tilde{E}(p)[1 + \exp i(12\alpha) + \exp i(24\alpha) + \cdots \exp i(N-1)12\alpha]$$

$$= \tilde{E}(p)\frac{1 - \exp iN(12\alpha)}{1 - \exp i(12\alpha)} = \tilde{E}(p)\frac{\exp\frac{iN(12\alpha)}{2}}{\exp\frac{i(12\alpha)}{2}} \cdot \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}$$

$$= 2A\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos 2\alpha \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\exp i(6N-4)\alpha$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \cos 2\alpha\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\alpha}\right)^2$$

20. 一块闪耀光栅宽 260mm，每毫米有 300 个刻槽，闪耀角为 $77^\circ 12'$。（1）求光束垂直于槽面入射时，对于波长 $\lambda = 500nm$ 的光的分辨本领；（2）光栅的自由光谱范围多大？（3）试同空气间隔为 1cm，精细度为 25 的法布里•珀罗标准具的分辨本领和光谱范围做一比较。

解：

$$\left.\begin{aligned} N &= 260 \times 300 = 7.8 \times 10^4 \\ d &= \frac{1}{300} = 3.333 \times 10^{-3}(mm) \end{aligned}\right\} \text{光栅常数}$$

由 $2d\sin\gamma = m\lambda$ 解得

$$m = \frac{2d\sin\gamma}{\lambda} = \frac{2\sin 77^\circ 12'}{300 \times 500 \times 10^{-6}} = 13$$

$$A = m \cdot N = 13 \times 7.8 \times 10^4 = 1.014 \times 10^6$$

（2） $$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{500nm}{13} = 38.46(nm)$$

（3） $2nh = m\lambda$

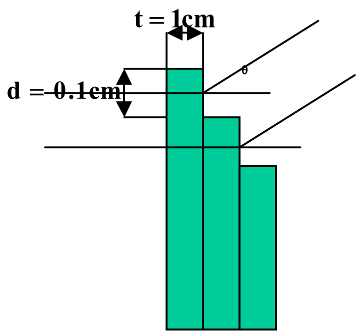
$$m = \frac{2 \times 10 \times 10^6}{500} = 4 \times 10^4$$

$$A = 0.97ms = 0.97 \times 4 \times 10^4 \times 25 = 9.7 \times 10^5$$

$$(\Delta\lambda)_{S.R} = \frac{\overline{\lambda}^2}{2h} = \frac{500 \times 500}{2 \times 1 \times 10^7} = 0.0125(nm)$$

结论：此闪耀光栅的分辨率略高于 F-P 标准量，但其自由光谱区范围远大于 F-P 标准量。

21． 一透射式阶梯光栅由 20 块折射率相等、厚度相等的玻璃平板平行呈阶梯状叠成，板厚 t=1cm，玻璃折射率 n=1.5，阶梯高度 d=0.1cm。以波长 $\lambda = 500nm$ 的单色光垂直照射，试计算（1）入射光方向上干涉主极大的级数；（2）光栅的角色散和分辨本领（假定玻璃折射率不随波长变化）。



解：（1） $\Delta = (n-1)t + d\sin\theta = m\lambda$ （*）

将 $n = 1.5$ $t = 1cm$ $d = 0.1cm$ $\theta = 0$ 代入上式

得：

$$m = 10^4$$

（2）对（*）式两边进行微分：

$$d \cdot \cos\theta \cdot d\theta = m \cdot d\lambda$$

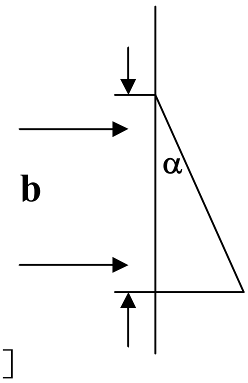
$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \approx \frac{m}{d} = \frac{10^4}{0.1 \times 10^7} = 10^{-2}\left(rad/mm\right)$$

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN = 2 \times 10^5$$

23． 在宽度为 b 的狭逢上放一折射率为 n、折射棱角为 α 的小光楔，由平面单色波垂直照射，求夫琅和费衍射图样的光强分布及中央零级极大和极小的方向。

解：将该光楔分成 N 个部分，近似看成是一个由 N 条逢构成的阶梯光栅。则逢宽为 $\frac{b}{N}$，间隔为 $\frac{b}{N}$。

由多逢衍射公式：
$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left[\frac{\sin\frac{N}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right]^2$$



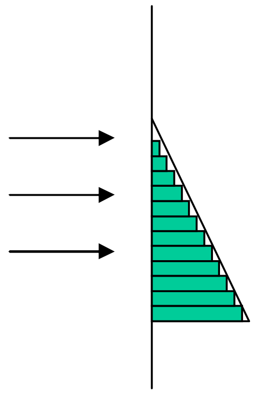
其中 I_0 为一个 $\frac{b}{N}$ 宽的逢产生的最大光强值

$$\alpha = \frac{kla}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\cdot\sin\theta$$

［a 为逢宽，θ 为衍射角］

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n-1)\alpha\frac{b}{N} + \frac{b}{N}\sin\theta\right]$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\left[(n-1)\alpha + \sin\theta\right]$$



代 入 上 式 得 ：

$$I = I_0\left(\frac{\sin\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\sin\theta}{\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\sin\theta}\right)^2 \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}b\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right]\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}\frac{b}{N}\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right]\right\}}$$

当 $N\to\infty$ 时 $\quad \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\sin\theta \to 0$

$$\therefore \left[\frac{\sin\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\sin\theta}{\frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{b}{N}\sin\theta}\right]^2 \to 1$$

$$\sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{b}{N}\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right] \approx \frac{\pi}{\lambda}\frac{b}{N}\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right]$$

$$I = N^2 I_0\left[\frac{\sin\frac{\pi}{\lambda}b\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right]}{\frac{\pi}{\lambda}b\left[(n-1)\alpha+\sin\theta\right]}\right]^2$$

单逢衍射发生了平移。

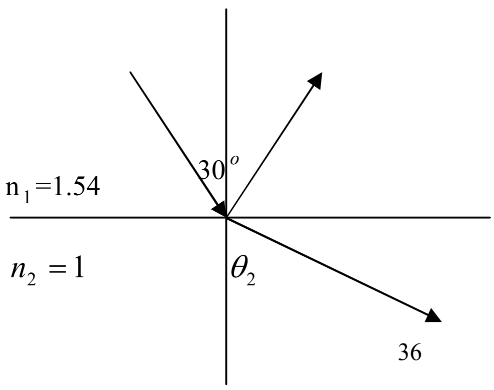
第十五章习题答案

1．一束自然光以 30^o 角入射到玻璃和空气界面

玻璃的折射率 n=1.54，试计算：

（1）反射光的偏振度

（2）玻璃空气界面的布儒斯特角



（3）以布儒斯特角入射时透射光的振幅。

解：（1）$\because n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$$\sin\theta_2 = 1.54\text{x}\frac{1}{2} = 0.77$$

$$\theta = \arcsin 0.77 = 50.35^\circ$$

$$r_s = \frac{A_{1r}'}{A_{1s}} = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{0.3478}{0.9858} = 0.352792$$

设入射光强为 $I_0 = I_{os} + I_{op}$

$$\therefore I_s' = (\frac{A_{1s}'}{A_{1s}})^2 I_{os} = 0.12446\, I_{os} = 0.06223\, I_{os} = 0.06223\, I_o$$

$$r_p = \frac{A_{1p}'}{A_{1p}} = \frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)} = -\frac{0.3709}{5.8811} = -0.063066$$

$$I_p' = \left(\frac{A_{1p}'}{A_{1p}}\right)^2 I_{op} = 3.9773\text{x}10^{-3}\, I_{op} = 1.98866\text{x}10^{-3}\, I_o$$

$$p = \frac{0.0602413}{0.0642187} \approx 94\%$$

（2）$\text{tg}\,\theta_p = \dfrac{1}{1.54}$ $\quad\therefore \theta_p = 32.9977^\circ \approx 33^o = \theta_1$

$$\sin\theta_2 = 1.54\times\sin 33^o \qquad \therefore \theta_2 = 57^o$$

(3) $t_s = \dfrac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = 1.4067$

$$t_p = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} = \frac{2\cos 33^o \sin 57^o}{\sin 90^o \cos 24^o} = 1.54$$

$$p = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} = \frac{1.54^2-1.41^2}{1.54^2+1.41^2} \approx 9\%$$

2.自然光以 θ_B 入射到 10 片玻璃片叠成的玻璃堆上，求透射的偏振度。

解: $t_s = \dfrac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$ ① $\qquad t_p = \dfrac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$ ②

$\sin\theta_B = n\sin\theta_2 \qquad tg\theta_B = n \qquad \theta_B = 56.3^o \qquad \theta_2 = 33.7^o$

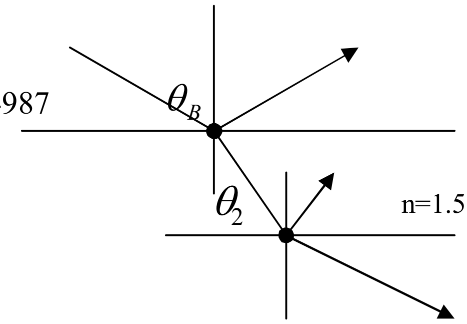
在光线入射到上表面上时 $\theta_1 = \theta_B = 56.3^o \qquad \theta_2 = 33.7^o$ 代入①②式得

$t_s = \dfrac{2\cos 56.3^o \sin 33.7}{\sin 90^o} =$ 0.6157, $\quad t_p = \dfrac{2\sin 33.7^o}{\sin 90^o}$ =0.6669

光线射到下表面时 $\theta_1 = 33.7^o \qquad \theta_2 = 56.3^o$

$t_s = \dfrac{2\cos 33.7^o \ \sin 56.3^o}{\cos 22.6^o} = 1.384 \qquad t_p = \dfrac{2\sin 56.3^o \cos 33.7^o}{\cos 22.6^o} = 1.4994$

透过一块玻璃的系数：$t_s^{'} = 0.8521 \qquad t_p^{'} = 0.9999499$

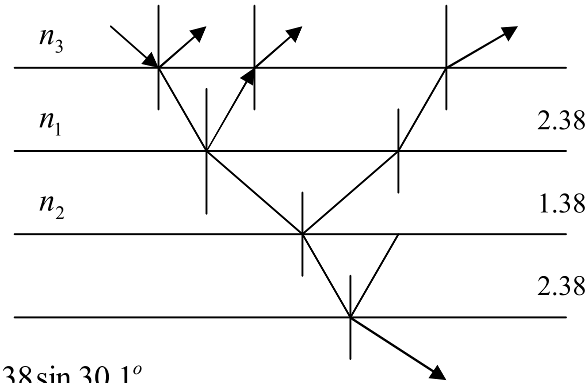


透过 10 块玻璃后的系数：$t_s^{''} = 0.20179 \qquad t_p^{''} = 0.9994987$

$$p = \frac{t_p^{''2} - t_s^{''2}}{t_p^{''2} + t_s^{''2}} = \frac{0.9989977 - 0.0407}{0.9989977 + 0.0407} = 92\%$$

3.已知 $n_1 = 2.38$， $n_2 = 1.38 \quad \lambda = 632.8nm$

求 n_3 和膜层厚度。



解：（1） $n_3 \sin 45^o = n_1 \sin\theta_p$ ①

$$tg\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \qquad ②$$

由②式得 $\theta_p = arctg(\dfrac{1.38}{2.38}) = 30.1^o \qquad n_3 = \dfrac{2.38\sin 30.1^o}{\sin 45^o} = 1.688$

（2）膜层厚度应满足干涉加强条件 即：

$$\Delta = 2nh\cos\theta_2 + \frac{\lambda}{2} = m\lambda$$ （m 为整数）

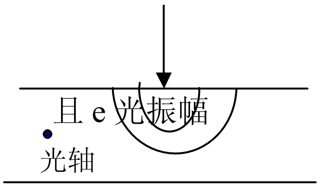
对于 $n_2 = 1.38$ 的膜层 有：$n_1 \sin\theta_p = n_2 \sin\theta_2$ 代入数得 $\theta_2 = 59.87^o$

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2n\cos\theta_2} = \frac{0.5 \times 632.8}{2 \times 1.38\cos 59.87^o} = 228.4(\text{nm})$$

对于 $n_1=2.38$ 的膜层 $h_1=\dfrac{\frac{1}{2}\lambda}{2n\cos\theta_p}=\dfrac{632.8\times\frac{1}{2}}{2\times2.38\times\cos30.1^o}=76.83(nm)$

4.线偏振光垂直入射到一块光轴平行于界面的方解石晶体上，若光蕨量的方向与晶体主截面成（1）$30^o(2)45^o(3)60^o$ 的夹角 求 o 光和 e 光从晶体透射出来后的强度比？

解：



设光矢量方向与晶体主截面成 θ 角，入射光振幅为 A，且 e 光振幅为 A$\cos\theta$,o 光振幅为 A$\sin\theta$.在晶体内部 o 光并不分开.

由 公 式 $t_s=\dfrac{2}{h+1}$，

$t_s=t_p$ $t_p=\dfrac{2}{h+1}$，$\dfrac{I_o}{I_e}=(\dfrac{A\sin\theta}{A\cos\theta})^2=tg^2\theta$

①当 $\theta=30^o$，$\dfrac{I_o}{I_e}=tg^2 30^o=0.3333$

②当 $\theta=45^o$，$\dfrac{I_o}{I_e}=tg^2 45^o=1$

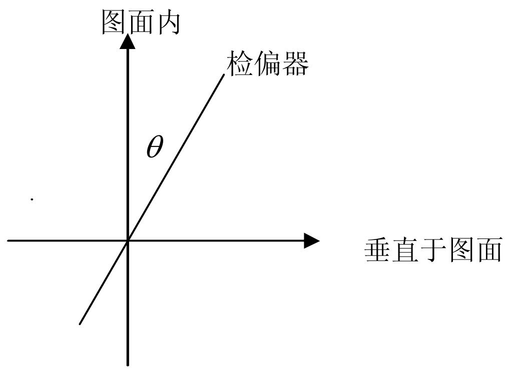
③当 $\theta=60^o$，$\dfrac{I_o}{I_e}=3$

10.解：设 s_1 的光强为 I_1，s_2 的光强为 I_2。设从 W 棱镜射出后平行分量所占比例为 γ

垂直分量所占比例为 1－γ. 从 s_1 出射的光强为 γI_1,从 s_2 射出的光强为（1－γ）I_2.

它们沿检偏器的投影 $\gamma I_1\cos\theta=$（1－γ）$I_2\sin\theta$

自然光入射时 $\gamma=0.5$，$tg\theta=\dfrac{I_1}{I_2}$。



12.已知：$\alpha_o = 3.6/cm$ $\alpha_e = 0.8/cm$ 自然光入射 p=98% 求 d

解：自然光入射，则入射光中 o 光与 e 光强度相等，设为 I

o 光出射光强 $I_o = Ie^{-3.6d}$ e 光强度 $I_e = Ie^{-0.8d}$

$$p = \frac{I_e - I_o}{I_e + I_o} = \frac{e^{-0.8d} - e^{-3.6d}}{e^{-0.8d} + e^{-3.6d}} = 0.98$$

整理得：$0.02e^{-0.8d} = 1.98e^{-3.6d}$ $e^{2.8d} = 99$ d=1.64cm

除真空外，一切介质对光均有吸收作用。在均匀介质中，可用朗佰特定律来描述光的吸收定律。朗佰特定律的数学表达式是：

$I = I_o e^{-kx}$ 式中 I_o 是入射光强 I—出射光强 x 是介质厚度 k 为吸收系数

14.已知：λ =589.3nm d=1.618$\times 10^{-2}$ nm n_o=1.54424 n_e=1.55335 光轴沿 x 轴方向

解：$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}|n_o - n_e|d = \frac{1}{589.3}|1.54424 - 1.55335| \times 1.618 \times 10^{-2} \times 10^6 = \frac{1}{4}$$

$\delta = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$ 玻片的琼斯矩阵 G=$\begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix}$

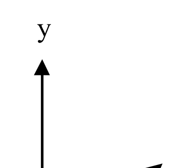
①入射光与 x 轴成 45^o $E_{45^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$E_{出} = GE_{45^o} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$ 左旋圆偏振光

② $E_{-45^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $E_{出} = GE_{-45^o} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ 右旋圆偏振光

③ $E_{30^o} = \begin{bmatrix} \cos 30^o \\ \sin 30^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $E_{出} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ i \end{bmatrix}$ 左旋椭圆偏振光

15.设计一个产生椭圆偏振光的装置，使椭圆的长轴方向在竖直方向，且长短轴



之比为 2：1。详细说明各元件的位置与方位。

解：设起偏器与 x 轴的夹角为 θ

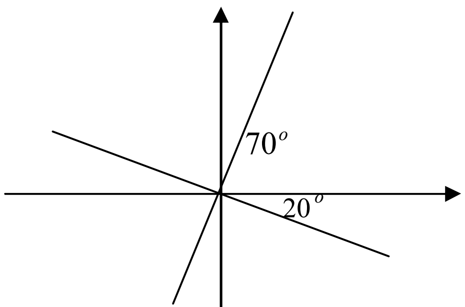
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

$A_y = 2A_x, \sin\theta = 2\cos\theta$

$tg\theta = 2, \vartheta = 63.43^o$

再通过$\frac{\lambda}{4}$波片，使A_x, A_y的位相差相差$\frac{\pi}{2}$

16.通过检偏器观察一束椭圆偏振光，其强度随着检偏器的旋转而改变。当检偏器在某一位置时，强度为极小，此时在检偏器前插一块$\frac{\lambda}{4}$片，转动$\frac{\lambda}{4}$片使它的快轴平行于检偏器的透光轴，再把检偏器沿顺时针方向转过 20^o 就完全消光。试问（1）该椭圆偏振光是右旋还是左旋？（2）椭圆的长短轴之比？



解：设$\frac{\lambda}{4}$波片的快轴在 x 轴方向

根据题意：椭圆偏光的短轴在 x 轴上

设 $E_\lambda = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 e^{i\delta} \end{bmatrix}$，快轴在 x 方向上$\frac{\lambda}{4}$波片的琼斯矩阵

$G = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix}$

$$E_{出} = GE_\lambda = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 e^{i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})} \end{bmatrix}$$

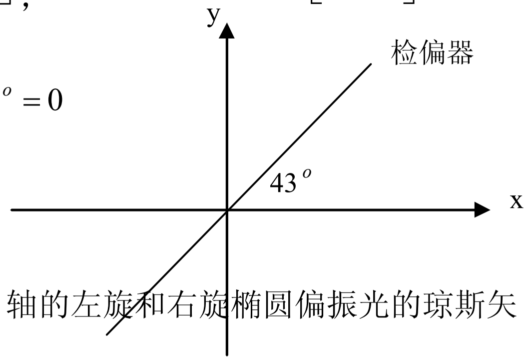
$E_{出}$ 向检偏器的投影为 $A_1\cos 20^o - A_2 e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})}\cos 70^o = 0$

0。9396926 A_1 - A_2 ×0.3420201 $e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})}$ =0，$\delta = -\frac{\pi}{2}$ (右旋)，$\frac{A_2}{A_1} = \frac{0.9396926}{0.3420201} = 2.747$

17.为了决定一束圆偏振光的旋转方向，可将$\frac{\lambda}{4}$片置于检偏器之前，再将后者转至消光位置。此时$\frac{\lambda}{4}$片快轴的方位是这样的：须将它沿着逆时针方向转 45^o 才能

与检偏器的透光轴重合。问该圆偏振光是右旋还是左旋？

解：设入射 $E_{\lambda}=\begin{bmatrix}1\\e^{i\delta}\end{bmatrix}$， $\frac{1}{4}$ 波片 $G=\begin{bmatrix}1,0\\0,i\end{bmatrix}$， $E_{出}=\begin{bmatrix}1,0\\0,i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\e^{i\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})}\end{bmatrix}$



沿检偏器透光轴投影 $\cos 45^{o}+e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})}\cos 45^{o}=0$

$e^{i(\delta+\frac{\pi}{2})}=-1$ $\delta=-\frac{\pi}{2}$ （左旋）

18.导出长、短轴之比为 2：1，且长轴沿 x 轴的左旋和右旋椭圆偏振光的琼斯矢量，并计算这两个偏振光叠加的结果。

解：长、短轴之比为 2：1，且长轴沿 x 轴的左旋偏光 $E_{左}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\e^{i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$

长、短轴之比为 2：1，且长轴沿 x 轴的右旋偏光 $E_{右}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$

$E_{左}+E_{右}=$ $E_{左}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}4\\e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ 沿 x 轴方向的线偏光。

19.为测定波片的相位延迟角 δ，采用图 14－72 所示的实验装置：使一束自然光相继通过起偏器、待测波片、$\frac{\lambda}{4}$ 片和检偏器。当起偏器的透光轴和 $\frac{\lambda}{4}$ 片的快轴没 x 轴，待测波片的快轴与 x 轴成 45^{o} 角时，从 $\frac{\lambda}{4}$ 片透出的是线偏振光，用检偏器确定它的振动方向便可得到待测波片的相位延迟角。试用琼斯计算法说明这一测量原理。

解：自然光经起偏器后 $E_{1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 待测波片琼斯矩阵： $G_{1}=\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1,-i\cdot tg\frac{\delta}{2}\\-i\cdot tg\frac{\delta}{2},1\end{bmatrix}$

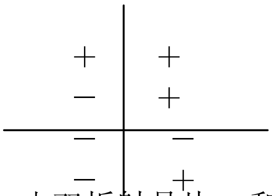
$\frac{\lambda}{4}$片的琼斯矩阵 $G_2=\begin{bmatrix}1,0\\0,i\end{bmatrix}$

出射光应为与 x 轴夹角为 θ 的线偏光。其琼斯矩阵为 $E_2=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$

由关系式 $E_2=G_2G_1E_1$ 得 $\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,0\\0,i\end{bmatrix}\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1,\text{-i}\cdot\text{tg}\frac{\delta}{2}\\\text{-i}\cdot\text{tg}\frac{\delta}{2},1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$=\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1,\text{-i}\cdot\text{tg}\frac{\delta}{2}\\\text{-i}\cdot\text{tg}\frac{\delta}{2},1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1\\tg\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\delta}{2}\\\sin\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}\cos\theta=\cos\frac{\delta}{2}\\\sin\theta=\sin\frac{\delta}{2}\end{cases}$ $\theta=\frac{\delta}{2}$



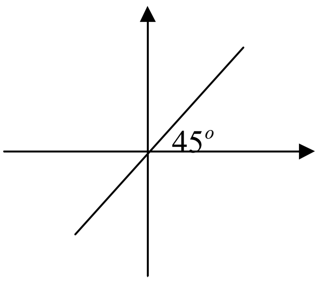
20.一种观测太阳用的单色滤光器如图所示，由双折射晶片 c 和偏振片 p 交替放置而成。滤光器的第一个和最后一个元件是偏振片，晶片的厚度相继递增，即后者是前者的两倍，且所有晶体光轴都互相平行并与光的传播方向垂直。所有偏振片的透光轴均互相平行，但和晶体光轴成 45^o 角，设该滤光器共有 n 块晶体组成。试用琼斯矩阵法证明该滤光器总的强度透射比 τ是ϕ的函数，即 $\tau=\left(\frac{\sin 2^N\varphi}{2^N\sin\varphi}\right)^2,\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(n_o-n_e)d}{2}$

因此该滤光器对太阳光的各种波长有选择作用。

解：设晶体快轴在 x 方向 根据题意，偏振器方向为 45^o

①当只有一个晶体 c 与偏振器构成系统时 设入射光复振幅为 a_o 光强为 I_o，$I_o=a_o^2$

$E_x=a_o\cos 45^o,E_y=a_o\sin 45^o$， $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(h_o-n_e)d=2\varphi$



透过晶体后 $E_x^{'}=a_o\cos 45^o,E_y^{'}=a_o\cos 45^o e^{i2\varphi}$

再沿偏振器透光轴投影

$$E_x^{'} = a_o\cos 45^o + E_y^{'}\cos 45^o = a_o^2\cos^2 45^o + a_o^2\cos^2 45^o e^{i2\varphi} = \frac{1}{2}a_o(1+e^{i2\varphi})$$

强度透过比：

$$\tau = \frac{|E|^2}{I_o} = \frac{1}{4}\left|1+e^{i2\varphi}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{i2\varphi}(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})\right|^2 = \cos^2\varphi = \left(\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{2\sin\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\sin 2\varphi}{2\sin\varphi}\right)^2$$

由此可证：当 N＝1 时，公式成立。

②假设当 N＝n-1 时成立，则在由 n 个晶片组成的系统中，从第 n-1 个晶片出射的光强为

$$I = \left(\frac{\sin 2^{n-1}\varphi}{2^{n-1}\sin\varphi}\right)^2 I_o\text{，复振幅为}a = \left(\frac{\sin 2^{n-1}\varphi}{2^{n-1}\sin\varphi}\right)a_o$$

沿快、慢轴方向分解： $E_x = a\cos 45^o, E_y = a\sin 45^o, \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)2^{n-1}d = 2^n\varphi$

透过晶片后， $E_x^{'} = a\cos 45^o, E_y^{'} = a\sin 45^o e^{i2^n\varphi}$ ，沿透光轴分解：

$$E = E_x^{'}\cos 45^o + E_y^{'}\sin 45^o = a\cdot\frac{1}{2}\left[1+e^{i2^n\varphi}\right]$$

$$I = |E|^2 = \frac{1}{4}a^2\,|\,e^{i2^{n-1}\varphi}(e^{-i2^{n-1}\varphi}+e^{i2^{n-1}\varphi})\,|^2 = \frac{1}{4}a^2(2\cos 2^{n-1}\varphi)^2$$

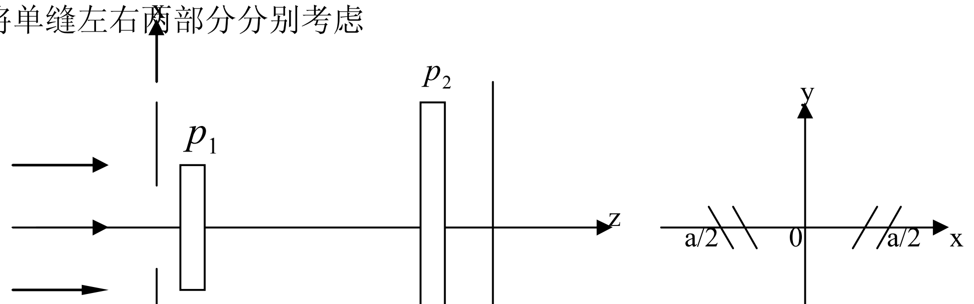
将 $a = \left(\frac{\sin 2^{n-1}\varphi}{2^{n-1}\sin\varphi}\right)a_o$ 代入上式，

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2^{n-1}\varphi}{2^{n-1}\sin\varphi}\right)^2 a_o^2\left(2\cos 2^{n-1}\varphi\right)^2 = \left(\frac{\sin 2^{n-1}\varphi\cos 2^{n-1}\varphi}{2^{n-1}\sin\varphi}\right)^2 a_o^2 = \left(\frac{\sin 2^n\varphi}{2^n\sin\varphi}\right)^2 a_o^2$$

$$\tau = \left(\frac{\sin 2^n\varphi}{2^n\sin\varphi}\right)^2$$ $\therefore$原命题得证。

21。如图所示的单缝夫琅和弗衍射装置，波长为 λ，沿 x 方向振动的线偏振光垂直入射于缝宽为 a 的单缝平面上，单缝后和远处屏幕前各覆盖着偏振片 p_1 和 p_2 缝面上 x>0 区域内 p_1 的透光轴与 x 轴成 45^o;x<0 区域内 p_1 的透光轴与 x 轴成－ 45^o，而 p_2 的透光轴方向沿 y 轴（y 轴垂于 xz 平面），试讨论屏幕上的衍射光强分布。

解：将单缝左右两部分分别考虑



$$x>0, E_{透} = A\cos 45^o, E_y = A\cos 45^o \cos 45^o = \frac{1}{2}A$$

$$x<0, E_{透} = A\cos(-45^o), E_y = -\frac{1}{2}A$$

$\therefore$ 由左右两部分发出的光往相差为 $\pm\pi$

$$E(p) = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}A\{1+\exp[i(\delta\pm\pi)]\}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}A(1-\exp i\delta)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

其中 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta = 2\alpha, \alpha = \frac{\pi}{\lambda}\frac{a}{2}\sin\theta$

$$E(p) = \frac{1}{2}A\exp(i\frac{\delta}{2})\left[\exp(-i\frac{\delta}{2}) - \exp(i\frac{\delta}{2})\right]\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

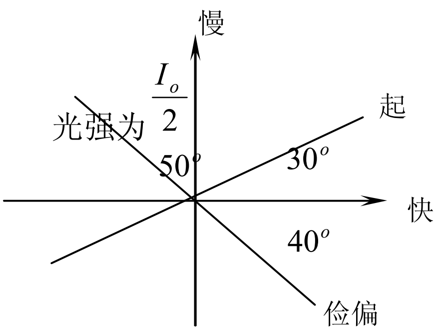
$$I(p) = A^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2 = I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2(\sin\alpha)^2$$

双缝衍射公式 $I(p) = I_o(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2(2\cos\frac{\delta}{2})^2$

两相比较可知：这样形成的条纹与双缝衍射条纹互补。

22。将一块 $\frac{\lambda}{8}$ 片插入两个正交的偏振器之间，波片的光轴与两 偏振器透光轴的夹角分别为 -30^o 和 40^o，求光强为 I_o 的自然光通过这一系统后的强度是多少？（不考虑系统的吸收和反向损失）

解：



设自然光 I_o 入射到起偏器上透过的光强为 $\frac{I_o}{2}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{x}{\frac{\lambda}{8}}, x = \frac{\pi}{4}$$

设入射到波片上的振幅为 a，且 $a^2 = \frac{I_o}{2}$

$$E_x = a\cos 30^o, E_y = a\sin 30^o, E_x' = a\cos 30^o, E_y' = a\sin 30^o e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$E = a\cos 30^o \cos 40^o - a\sin 30^o e^{i\frac{\pi}{4}} = a[\cos 30^o \cos 40^o - \sin 30^o e^{i\frac{\pi}{4}}]$$

=a[0.6634-0.3535534-i0.3535534]=a[0.3098466-i0.3535534]

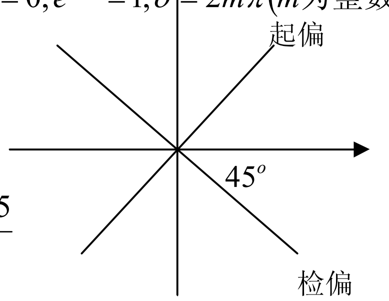
$$\therefore |E|^2 = 0.4701116a^2 = 0.235I_o$$

23.一块厚度为 0.05mm 的方解石波片放在两个正交的线偏振器中间，波片的光轴方向与两线偏振器透光轴的夹角为 45^o，问在可见光范围内哪些波长的光不能透过这一系统。

解：设波片的快轴在 x 轴上

$$E_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix}1,0\\0,e^{-i\delta}\end{bmatrix}, E_\lambda = GE_\lambda = \begin{bmatrix}1,0\\0,e^{-i\delta}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\e^{-i\delta}\end{bmatrix}$$

沿检偏器透光轴分解：$\cos 45^o - e^{-i\delta}\sin 45^o = 0, e^{-i\delta} = 1, \delta = 2m\pi(m为整数)$



$$\because \delta = \frac{2\pi}{\lambda}|n_e - n_o|d, \lambda = \frac{|n_e - n_o|d}{m}$$

$$\lambda = \frac{|1.6544 - 1.4846| \times 0.05}{m}$$

参照表 14—1 得

m=11 λ=771.8nm; m=12 λ=707.5nm ; m=13 λ=653nm; m=14 λ=606nm ;

m=15 λ=566nm; m=16 λ=530nm; m=17 λ=499nm; m=18 λ=471nm

m=19 λ=446 ; m=20 λ=424nm; m=21 λ=404nm; m=22 λ=385nm

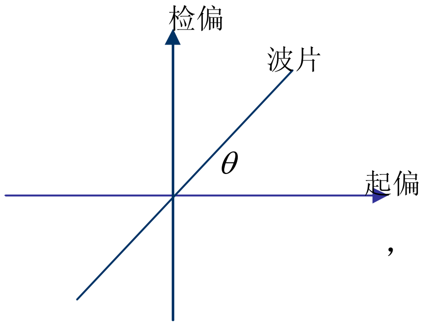
24。在两个正交偏振器之间插入一块 $\frac{\lambda}{2}$ 片，强度为 I_o 的单色光通过这一系统。如果将波片绕光的传播方向旋转一周，问（1）将看到几个光强的极大和极小值？相应的波片方位及光强数值;（2）用 $\frac{\lambda}{4}$ 片和全波片替代 $\frac{\lambda}{2}$ 片，又如何？

①设入射光经起偏器后的振幅为 a，有 $a^2 = \frac{I_o}{2}, E_\lambda = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，琼斯矩阵：

$$G=\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,e^{i\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}$$

代入 $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}=\pi$ 得：

$$G=\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}$$



，

$$E_{出}=GE_{\lambda}=a\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=a\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$，出射光矢量 $E=a\sin 2\theta$

当 $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$ 时，$I=0$ ；当 $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 时，$I_{\max}=\frac{1}{2}I_o$

②用 $\frac{\lambda}{4}$ 波片代替时，$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}$，$G=\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}$

$$E_{出}=GE_{\lambda}=a\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix}\cos\theta,-\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -i\sin\theta\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}\cos^2\theta+i\sin^2\theta\\ \sin\theta\cos\theta-i\sin\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$E_y=\frac{a}{2}(\sin 2\theta-i\sin 2\theta)=\frac{a}{2}\sin 2\theta(1-i)$$，

$$|E_y|^2=\frac{a^2}{4}\sin^2 2\theta(1-i)(1+i)=\frac{a^2}{4}\sin^2 2\theta\times 2=\frac{a^2}{2}\sin^2 2\theta$$

4 个极大值点 $I_{\max}=\frac{I_o}{4}$；4 个极小值点 $I_{\min}=0$

③用全波片 $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\lambda=2\pi$　　$G=\begin{bmatrix}\cos\theta,-i\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}$

$$E_{出}=a\begin{bmatrix}\cos\theta,-i\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\ 0,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}\cos\theta,-i\sin\theta\\ \sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

使用全波片时，旋转波片一周都不能得到光强输出。

25。在两个正交偏振器之间放入相位延迟角为 δ 的波片，波片的光轴与起、检偏器的透光轴分别成 α,β 角。利用偏振光干涉的强度表达式 14—57 证明：当旋转检偏器时，从系统输出的光强最大值对应的 β 角为 $tg2\beta=(tg2\alpha)\cos\delta$。

解：据公式 $I_o=a^2\cos^2(\alpha-\beta)-a^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}$ 对 β 求导并令之为 0 得：

$$\frac{dI}{d\beta}=2a^2\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-2a^2\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}=0$$

$$\frac{1}{2}\sin(2\alpha-2\beta)-\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}=0$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2\alpha\cos 2\beta-\cos 2\alpha\sin 2\beta)-\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin^2\frac{\delta}{2}=0$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta\left[\frac{1}{2}-\sin^2\frac{\delta}{2}\right]=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\sin 2\beta$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta\left[1-2\sin^2\frac{\delta}{2}\right]=\cos 2\alpha\sin 2\beta$$

$$tg2\beta=tg2\alpha(\cos\delta)$$

解法二：

$$I=a^2\left[\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\sin\beta\sin^2(\frac{\delta}{2})\right]$$

$$=a^2\left[\frac{1+\cos(2\alpha-2\beta)}{2}-\sin 2\alpha\sin 2\beta\frac{1-\cos\delta}{2}\right]=$$

$$\frac{a^2}{2}[1+\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta-\sin 2\alpha\sin 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\delta]======$$

$$\frac{a^2}{2}[1+\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\cos\delta\sin 2\beta]$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[1+\sqrt{\cos^2 2\alpha+(\sin 2\alpha\cos\delta)^2}\sin(\gamma+2\beta)\right]$$，其中 $tg\gamma=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos\delta}$

当 I 为最大值时

$$\sin(\gamma+2\beta)=1,\gamma+2\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$$

$$2\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\gamma,tg2\beta=ctg\gamma=\frac{\sin 2\alpha\cos\delta}{\cos 2\alpha}=tg2\alpha(\cos\delta)$$

思考题：

1。购买太阳镜应考虑哪些光学参数？

反紫外

反红外

无光焦度 $\varphi = 0$

透过率 T 适中

透光曲线符合光谱光效率函数

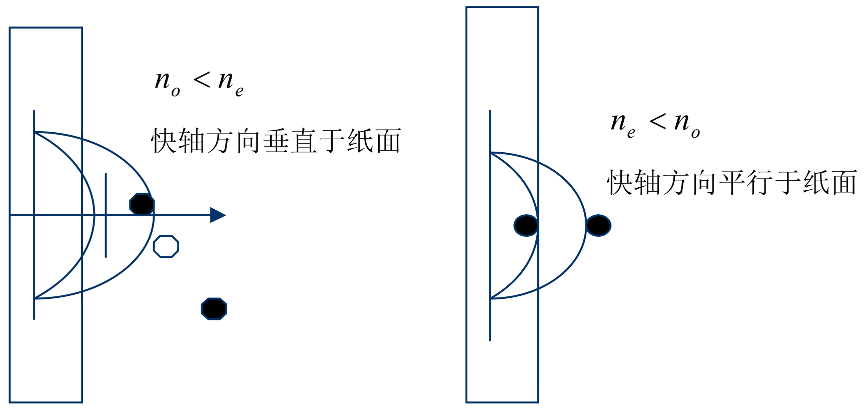
偏振要求

美学要求

性能要求

性能价格比

2。波片的光轴与快轴的关系问题：



用负单轴晶体制成的波片，其快轴：

平行于光轴　　垂直于光轴　　平行于入射表面　　垂直于入射表面

用正单轴晶体制成的波片，其快轴：

平行于光轴　　垂直于光轴　　平行于入射表面　　垂直于入射表面

补充题

1。用矩阵法证明右（左）旋圆偏光经半波片后变为左（右）旋圆偏光

证明：设 $E_\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ 与 x 轴成 θ 角的半波片琼斯矩阵为

$$G = \begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0 \\ 0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$E_{出} = GE_\lambda = \begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0 \\ 0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0 \\ 0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta + i\sin\theta \\ \sin\theta - i\cos\theta\end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos\theta, \sin\theta \\ \sin\theta, -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta + i\sin\theta \\ -(\sin\theta - i\cos\theta)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) - \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) \\ \sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta) + \cos\theta(\sin\theta - i\cos\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta+i\sin 2\theta\\ \sin^2\theta+i(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 2\theta+i\sin 2\theta\\ \sin 2\theta-i\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{(\sin 2\theta-i\cos 2\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)}\end{bmatrix}=\frac{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$$

为右旋偏光。　同理可证：右旋偏光入射时，出射光为左圆偏光。

〔解法二〕　设入射 $E_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ 与 x 轴成 θ 角半波片的琼斯矩阵为：

$$G=\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ \sin\theta,-\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,0\\0,-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ \sin\theta,-\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ \sin\theta,-\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta,\sin\theta\\ -\sin\theta,\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta,\sin 2\theta\\ \sin 2\theta,\sin^2-\cos^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta,\sin 2\theta\\ \sin 2\theta,-\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

$$E_{出}=GE_\lambda=\begin{bmatrix}\cos 2\theta,\sin 2\theta\\ \sin 2\theta,-\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 2\theta+i\sin 2\theta\\ \sin 2\theta-i\cos 2\theta\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 2\theta+i\sin 2\theta\\ \cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)-i\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\cos 2\theta+i\sin 2\theta\\ \cos[-(\frac{\pi}{2}-2\theta)]+i\sin[-(\frac{\pi}{2}-2\theta)]\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}e^{i2\theta}\\ e^{i(2\theta-\frac{\pi}{2})}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i2\theta}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$$

2。一束线偏振的黄光（λ =589.3nm）垂直经过一块厚度为 $1.618\times10^{-2}mm$ 的石英晶片,折射率为 $n_o=1.54428$，$n_e=1.55335$，试求以下三种情况下出射光的偏振态：　（1）入射光的振动方向与晶片光轴成 45^o（2）成 -45^o（3）成 30^o

解：以晶片快轴为 x 轴建立坐标系

（　1　）　$E_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}|n_o-n_e|d=\frac{22}{589.3}|1.54428-1.55335|\times1.618\times10^{-2}\times10^6\approx\frac{\pi}{2}$ 则该晶片为 $\frac{\lambda}{4}$ 晶片 其琼斯矩阵为 $\begin{bmatrix}1,0\\0,-i\end{bmatrix}$，$E_{出}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1,0\\0,-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$,右旋圆偏光

（2） $E_{入} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $E_{出} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ 左旋圆偏光

（3） $E_{入} = \begin{bmatrix} \cos 30^o \\ \sin 30^o \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ $E_{出} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,-\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -i \end{bmatrix}$ 右旋椭圆偏光

3。导出长短轴之比为 2：1，长轴沿 x 轴的右旋椭圆偏光的单位琼斯矩阵

解：设长轴为 2a，矩轴为 a，$\tilde{E}_x = 2a, \tilde{E}_y = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ，$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$

$$\sqrt{\tilde{E}_x^2 + \tilde{E}_y^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5a^2}$$

归一化：$$\tilde{E} = \frac{1}{\sqrt{5a^2}}\begin{bmatrix} 2a \\ ae^{-i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$$