

工程力学

——课后练习题讲解

教师 张建平

第一章 静力学基础

课后习题：

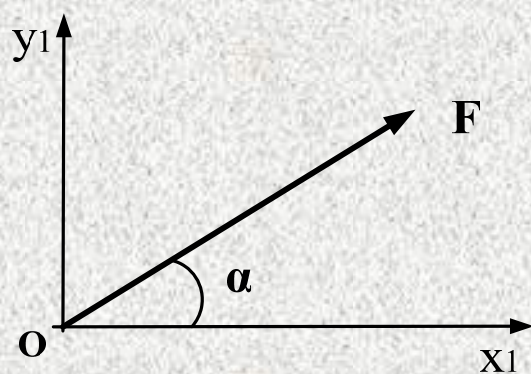
1. P₃₂ 习题 1-1

2. P₃₂ 习题 1-2

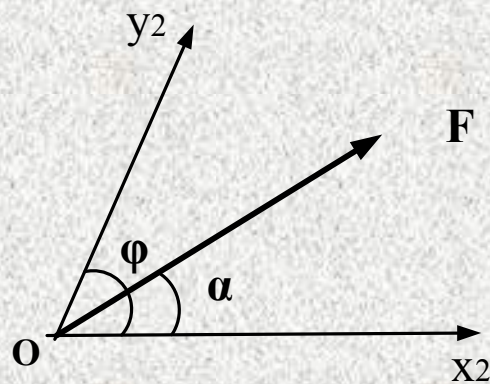
3. P₃₃ 习题 1-8

第1章 静力学基础

★1-1 习题1-1图a和b所示分别为正交坐标系 Ox_1y_1 与斜交坐标系 Ox_2y_2 。试将同一个力 F 分别在两种坐标系中分解和投影，比较两种情形下所得的分力与投影。



a)



b)

解：图 (a)： $F = F \cos \alpha i_1 + F \sin \alpha j_1$

分力： $F_{x_1} = F \cos \alpha i_1, F_{y_1} = F \sin \alpha j_1$

投影： $F_{x_1} = F \cos \alpha, F_{y_1} = F \sin \alpha$

第1章 静力学基础

讨论 $\varphi = 90^\circ$ 时，投影与分力的模相等；分力是矢量，投影是代数量。

图 (b) :

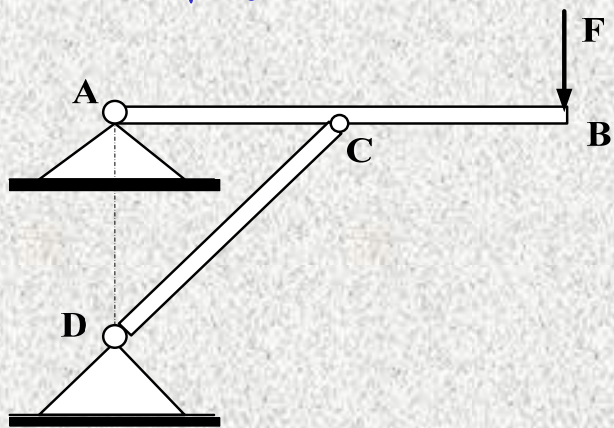
分力:
$$F_{x_2} = (F \cos \alpha - F \sin \alpha \cot \varphi) i_2, F_{y_2} = \frac{F \sin \alpha}{\sin \varphi} j_2$$

投影:
$$F_{x_2} = F \cos \alpha, F_{y_2} = F \cos(\varphi - \alpha)$$

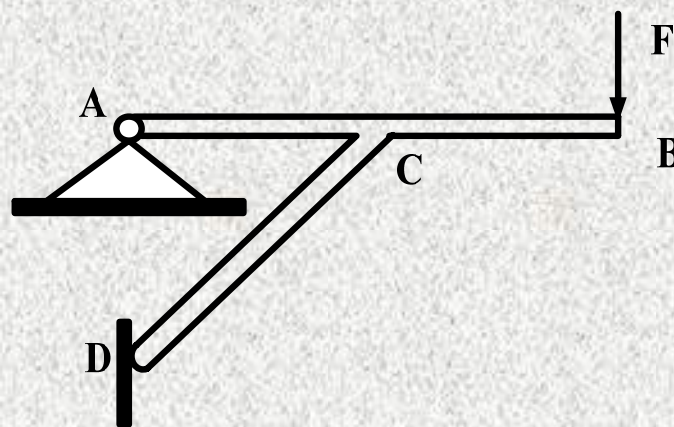
讨论: $\varphi \neq 90^\circ$ 时，投影与分量的模不等。

第1章 静力学基础

★ 1-2 试画出习题1-2图a和b两种情形下各构件的受力图，并加以比较。



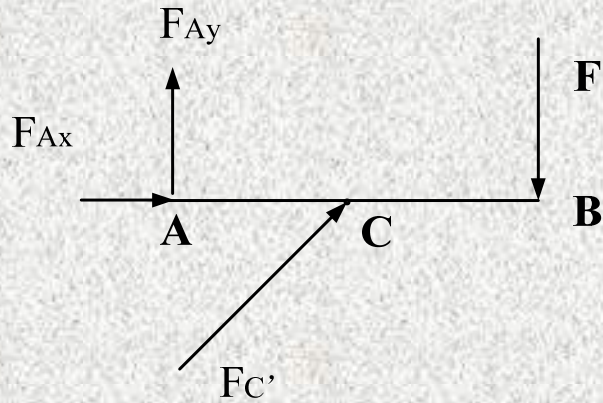
a)



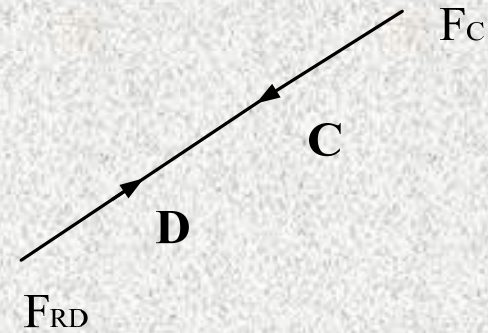
b)

比较：解a图与解b图，两种情形下受力不同，二者的 F_{RD} 值大小也不同。（图解如下）

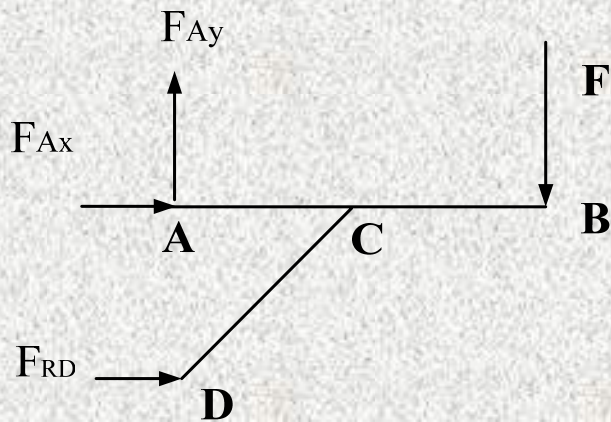
第1章 静力学基础



习题1-2a解1图



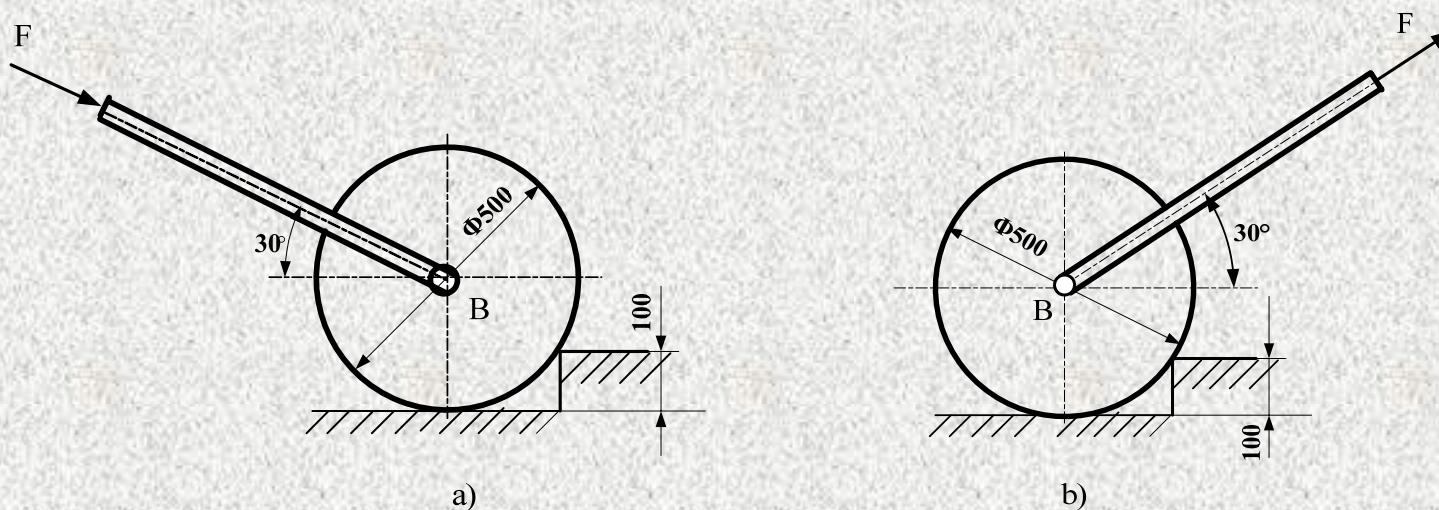
习题1-2a解2图



习题1-2b解 (左) 图

第1章 静力学基础

1-8 习题1-8图示压路机的碾子可以在推力或拉力作用下滚过100mm高的台阶。假定力F都是沿着杆AB的方向，杆与水平面的夹角为 30° ，碾子重量为250N。试比较这两种情况下，碾子越过台阶所需力F的大小。



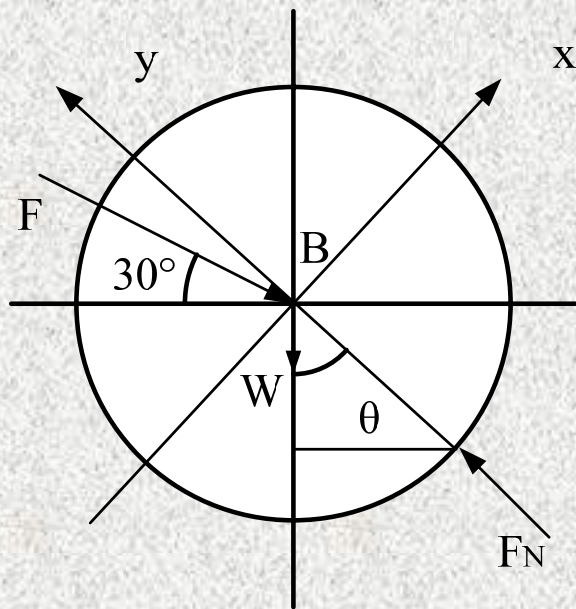
解：图 (a)：

$$\theta = \arcsin \frac{4}{5}, \quad \sum F_x = 0, \quad F \sin(60^\circ - \theta) - W \sin \theta = 0, \quad F = 1672N$$

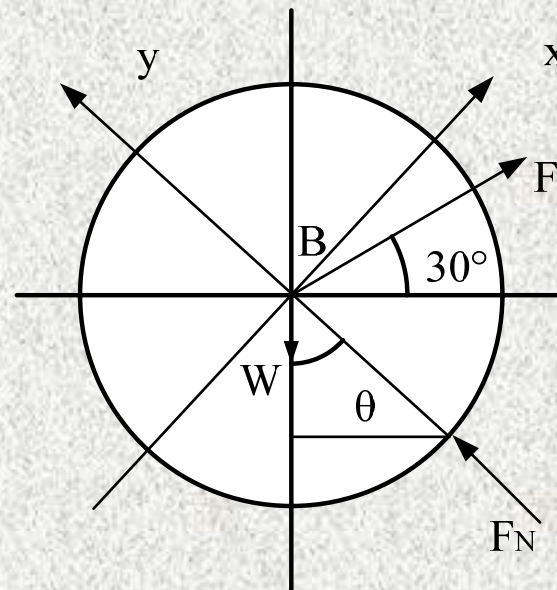
第1章 静力学基础

图 (b) :

$$\theta = 53.13^\circ, \quad \sum F_x = 0, \quad F \cos(\theta - 30^\circ) - W \sin \theta = 0, \quad F = 217N$$



习题1-8 a解图



习题1-8 b解图

第二章 力系的简化

课后习题：

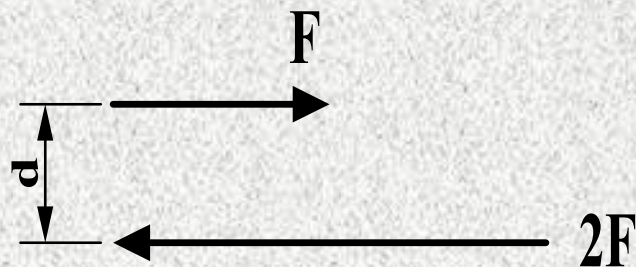
1. P₄₃ 习题 2-1

2. P₄₃ 习题 2-2

3. P₄₄ 习题 2-4

第2章 力系的简化

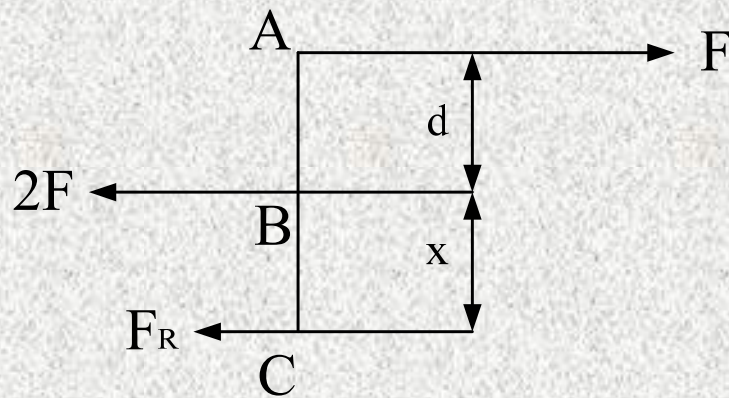
★ 2-1 由作用线处于同一平面内的两个力 F 和 $2F$ 所组成平行力系，如图所示。二力作用线之间的距离为 d 。试问这一力系向哪一点简化，所得结果只有合力，而没有合力偶；确定这一合力的大小和方向；说明这一合力矢量属于哪一类矢量。



习题2-1图

解：由习题2-1解图，假设力系向C点简化所得结果只有合力，而没有合力偶，于是，有

第2章 力系的简化



习题2-1解图

$$\sum M_C(F) = 0, \quad -F(d+x) + 2F \cdot x = 0$$

$$\therefore x = d, \quad \therefore F_R = 2F - F = F$$

方向如图示。合力矢量属于滑动矢量。

第2章 力系的简化

2-2 习题2-2图所示一平面力系对A(3, 0), B(0, 4)和C(-4.5, 2)三点的主矩分别为: M_A 、 M_B 和 M_C 。若已知: $M_A = 20\text{kN}\cdot\text{m}$ 、 $M_B = 0$ 和 $M_C = -10\text{kN}\cdot\text{m}$, 求: 这一力系最后简化所得合力的大小、方向和作用线。

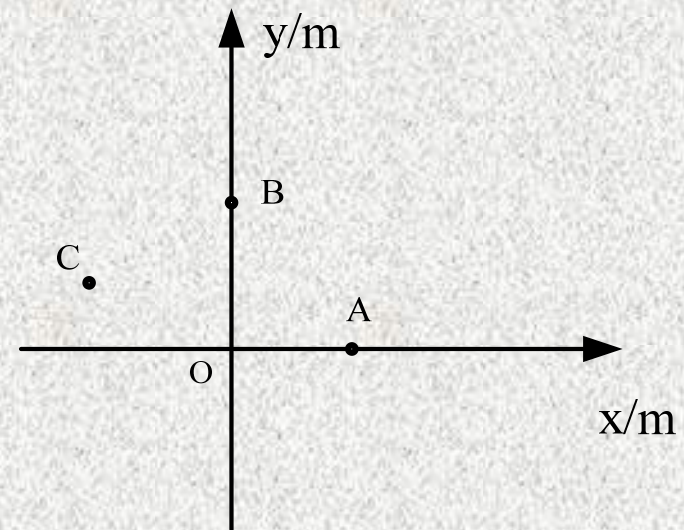
解: 由已知 $M_B=0$ 知合力 F_R 过B点

由 $M_A = 20\text{KN}\cdot\text{m}$, $M_C = -10\text{KN}\cdot\text{m}$

知 F_R 位于A、C间, 且

$\overline{AG} = 2\overline{CD}$ (习题2-2解图)

在图中设 $OF = d$,



第2章 力系的简化

则

$$d = 4 \cot \theta$$

$$(d + 3) \sin \theta = AG = 2CD \quad (1)$$

$$CD = CE \sin \theta = \left(4.5 - \frac{d}{2}\right) \sin \theta \quad (2)$$

即

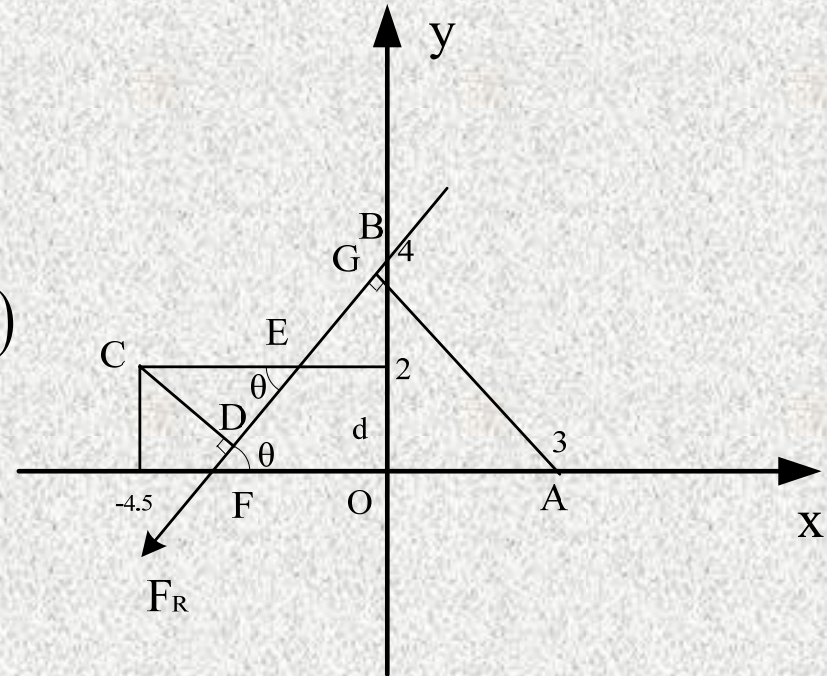
$$(d + 3) \sin \theta = 2 \left(4.5 - \frac{d}{2}\right) \sin \theta$$

$$d + 3 = 9 - d$$

$$d = 3$$

\therefore F点的坐标为 $(-3, 0)$

合力方向如图所示，作用线过B、F点



第2章 力系的简化

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$AG = 6 \sin \theta = 6 \times \frac{4}{5} = 4.8$$

$$M_A = F_R \times AG = F_R \times 4.8$$

$$F_R = \frac{20}{4.8} = \frac{25}{6} \text{ KN}$$

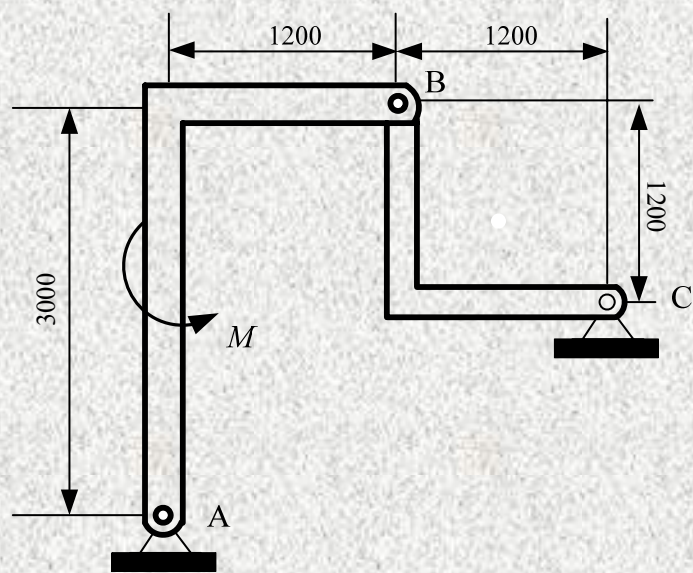
$$F_R = \left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3} \right) \text{ KN}$$

即

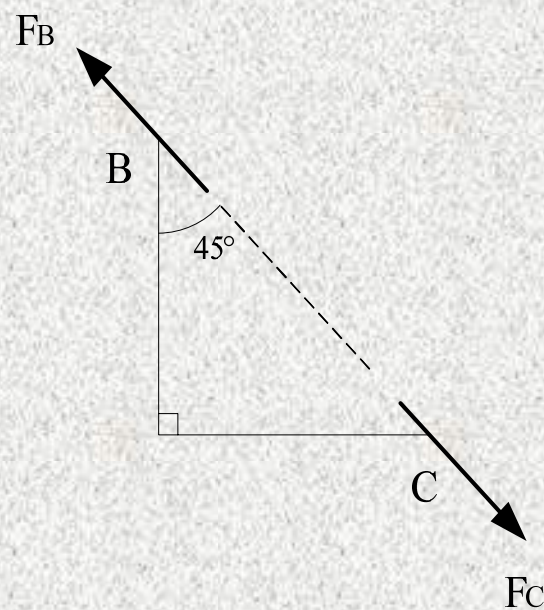
作用线方程: $y = \frac{4}{3}x + 4$

第2章 力系的简化

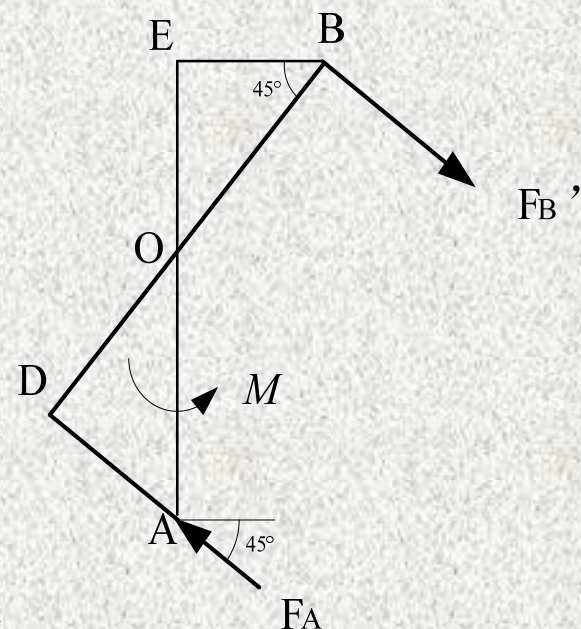
★ 2-4 习题2-4图示的结构中，各构件的自重都略去不计。
在构件AB上作用一力偶，其力偶矩数值 $M = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ 。试求
支承A和C处的约束力。



习题2-4图



习题2-4解1图



习题2-4解2图

第2章 力系的简化

解：BC为二力构件，其受力图如习题2-4解1图所示。考虑AB平衡，由习题2-4解图，A、B二处的形成力偶与外加力偶平衡。

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{BO} + \overline{OD} = \frac{\overline{BE}}{\sin 45^\circ} + \overline{AO} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1.2}{\sqrt{2}} + 1.8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$F_A = F'_B = \frac{M}{\overline{BD}} = \frac{800}{1.2 \times \sqrt{2} + \frac{1.8}{\sqrt{2}}} = 269.4N$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

第三章 工程构件的静力学平衡问题

课后习题：

1. P₆₈ 习题 3-1

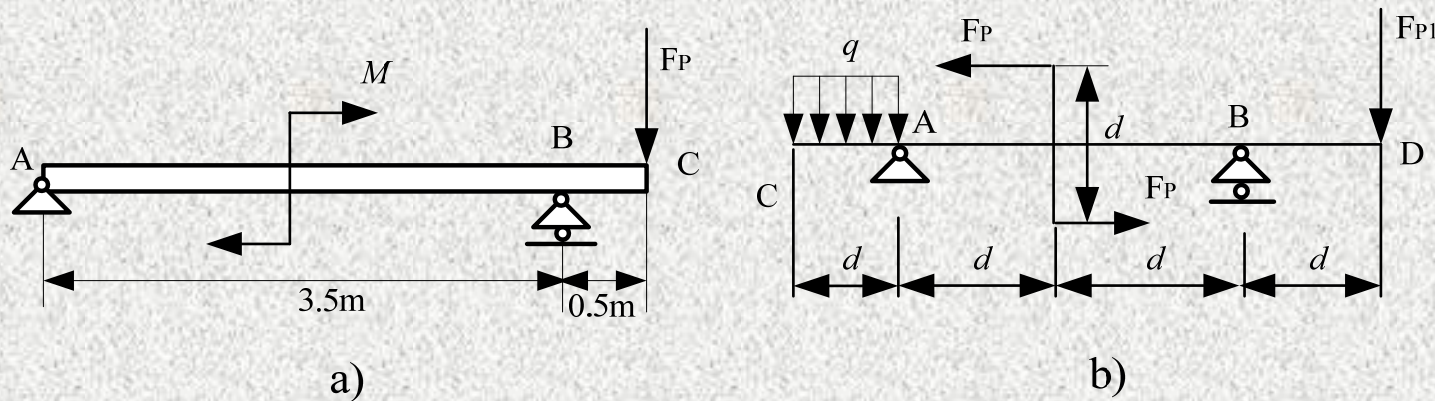
2. P₆₈ 习题 3-3

第3章 工程构件的静力学平衡问题

3-1 试求习题3-1图所示两外伸梁的约束力 F_{RA} 、 F_{RB} 。图a中

$M = 60\text{KN} \cdot \text{m}$ $F_P = 20\text{KN}$, 图b中 $F_P = 10\text{KN}$, $F_{P1} = 20\text{KN}$

$q = 20\text{KN/m}$, $d = 0.8\text{m}$ 。



习题3-1图

解：对于 (a) 中的梁

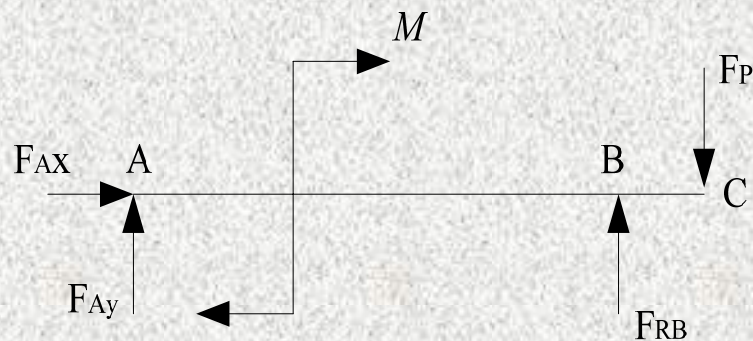
$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

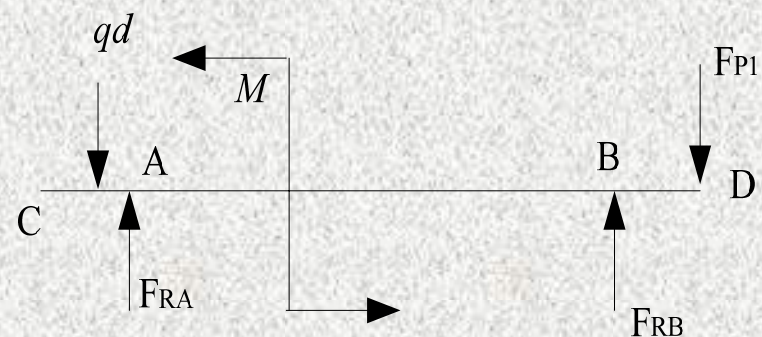
$$\sum M_A = 0, -M - F_P \times 4 + F_{RB} \times 3.5 = 0,$$

$$-60 - 20 \times 4 + F_{RB} \times 3.5 = 0,$$

$$F_{RB} = 40 \text{KN} (\uparrow)$$



习题3-1a解图



习题3-1b解图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{RB} - F_P = 0,$$

$$F_{Ay} = -20kN (\downarrow)$$

对于 (b) 中的梁

$$M = F_p d$$

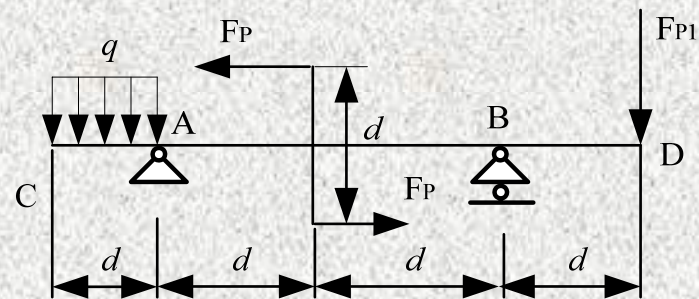
$$\sum M_A = 0, qd \cdot \frac{d}{2} + F_p d + F_{RB} \cdot 2d - F_{P1} \cdot 3d = 0,$$

$$\frac{1}{2} qd + F_p + 2F_{RB} - 3F_{P1} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \times 20 \times 0.8 + 10 + 2F_{RB} - 3 \times 20 = 0,$$

$$F_{RB} = 21kN (\uparrow)$$

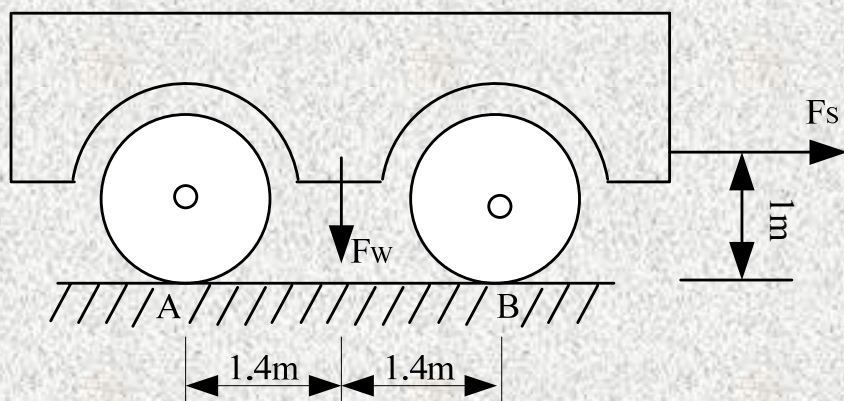
$$\sum F_y = 0, F_{RA} = 15kN (\uparrow)$$



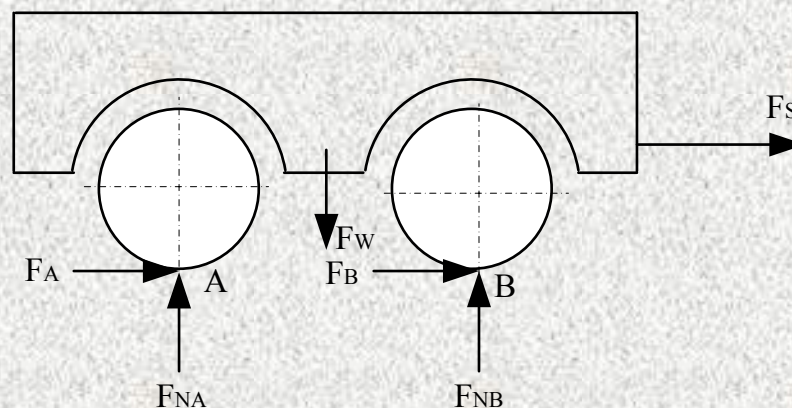
b)

第3章 工程构件的静力学平衡问题

★3-3 拖车产生的重力 $F_W=20\text{KN}$ ，汽车对它的牵引力 $F_S=10\text{KN}$ ，如习题3-3图所示。试求拖车匀速直线行驶时，车轮A、B对地面的正压力。



习题3-3图



习题3-3解图

解：根据习题3-3解图：

$$\sum M_A(F) = 0, -F_W \times 1.4 - F_S \times 1 + F_{NB} \times 2.8 = 0,$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

$$F_{NB} = 13.6kN$$

$$\sum F_y = 0, F_{NA} = 6.4kN$$

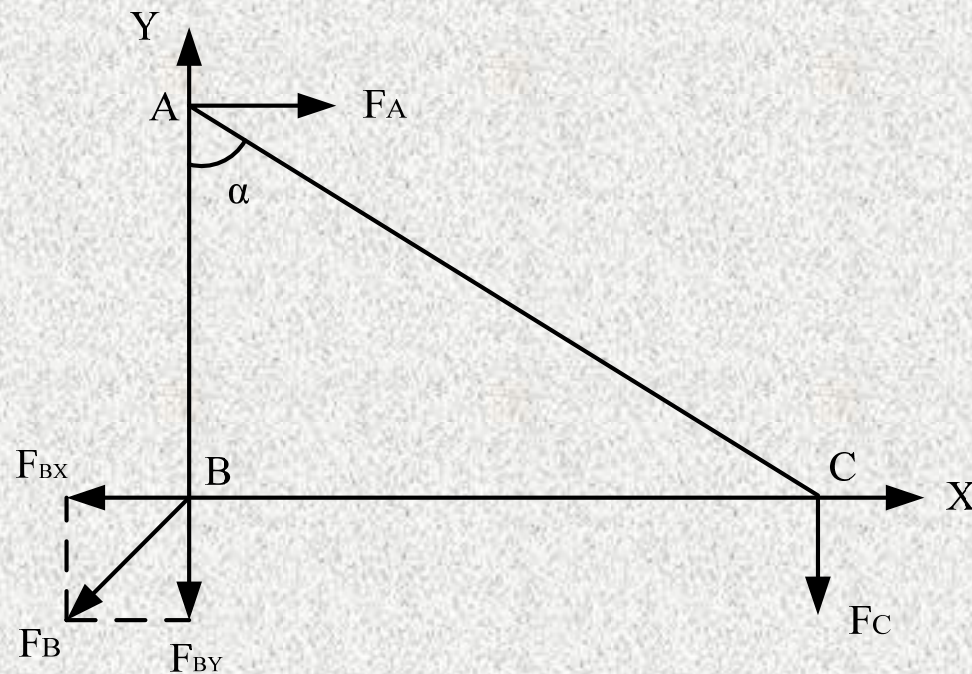
第三章 附加习题

课后习题：

1. P₆₉ 习题 3-5
2. P₆₉ 习题 3-6
3. P₇₀ 习题 3-7
4. P₇₁ 习题 3-13
5. P₇₁ 习题 3-14

第3章 工程构件的静力学平衡问题

★3-5 钥匙的截面为直角三角形，其直角边 $AB=d_1$ ， $BC=d_2$ ，如习题图所示，设在钥匙上作用一个力偶矩为 M 的力偶。若不计摩擦，且钥匙与锁孔之间的间隙很小，试求钥匙横截面三顶点A、B、C对锁孔孔边的作用力。



习题3-5解图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

解：根据题意画出钥匙孔边的受力图，如图3-5解图

列出平衡方程

$$\sum F_X = 0, F_B \cos \alpha - F_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0, F_B \sin \alpha - F_C = 0$$

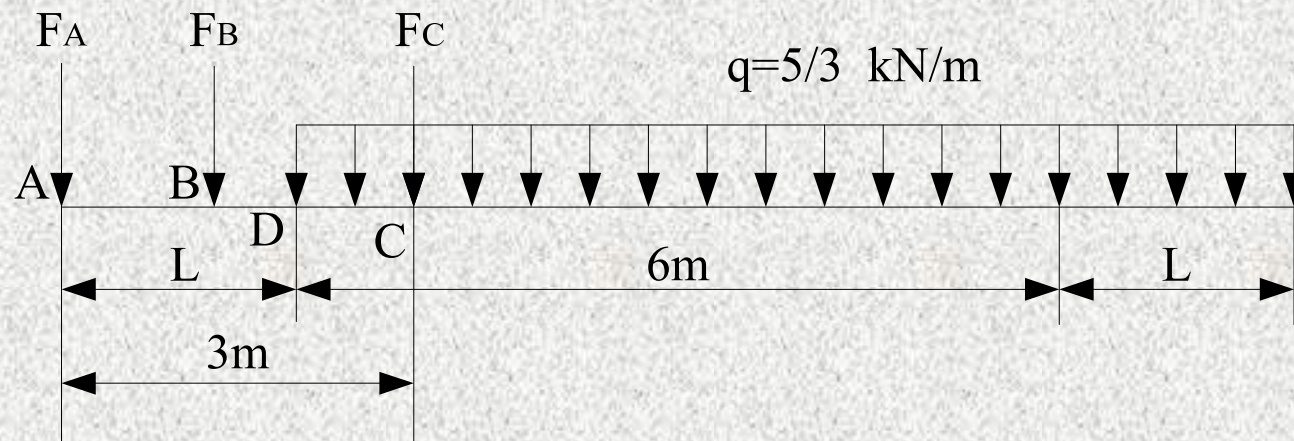
$$\sum M_B = 0, F_C d_2 + F_A d_1 = M$$

解方程得：

$$F_B = \frac{M}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \quad F_A = \frac{Md_1}{d_1^2 + d_2^2} \quad F_C = \frac{Md_2}{d_1^2 + d_2^2}$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

3-6 一便桥自由地放置在支座C和D上，支座间的距离 $CD=2d=6\text{m}$ 。桥面重量可看作均匀分布载荷，载荷集度 $q=5/3\text{ kN/m}$ 。设汽车的前后轮所承受的重力分别为 20 kN 和 40 kN ，两轮间的距离为 3 m ，如图所示。试求：当汽车从桥上面驶过而不致使桥面翻转时桥的悬臂部分的最大长度 L 。



习题3-6解图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

解：此题分两种情况讨论

1. 悬臂 $L > 3\text{m}$ 情况，则前后车轮的停靠位置在A、B两点

列力矩平衡方程得

$$40L + 20(L - 3) = \frac{5}{3}(2d + L)d \quad (d = 3)$$

解以上方程得 $L = 1.8\text{m} < 3\text{m}$ ，与题设矛盾，故不成立

2. 悬臂 $L < 3\text{m}$ 情况，则前后车轮的停靠位置在A、C两点

列力矩平衡方程得

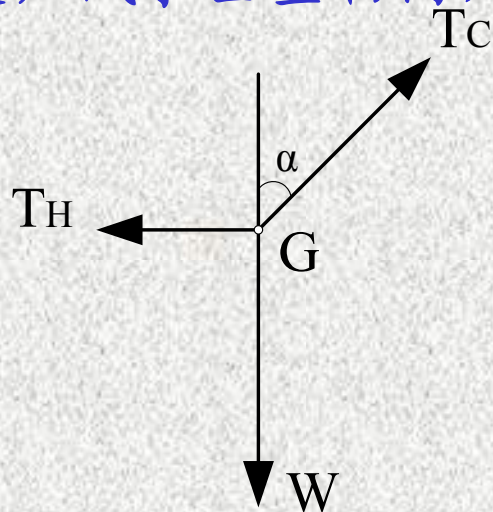
$$40L = 20(3 - L) + \frac{5}{3}(2d + L)d \quad (d = 3)$$

解以上方程得 $L = 1.8\text{m} < 3\text{m}$ ，符合题设，故成立

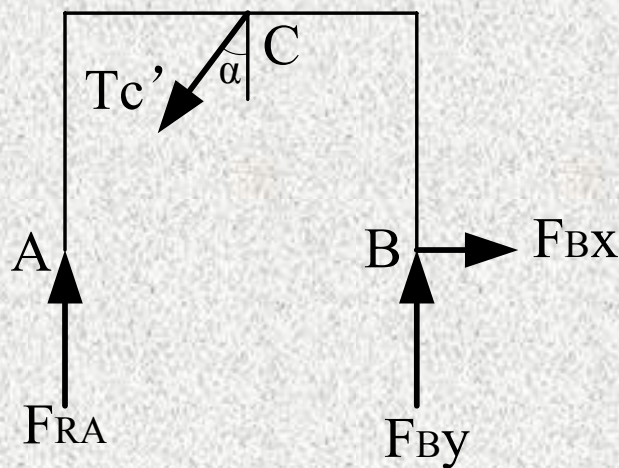
综上得 $L = 1.8\text{m}$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

3-7 装有轮子的起重机，可沿轨道 A、B 移动。起重机桁架下弦 DE 杆的中点 C 上挂有滑轮（图中未画出），用来吊起挂在链索 CO 上的重物。从材料架上吊起重物重量 $F_W = 50\text{kN}$ 的重物。当此重物离开材料架时，链索与铅垂线的夹角 $\alpha = 20^\circ$ 。为了避免重物摆动，又用水平绳索 OH 拉住重物。设链索张力的水平分力仅由右轨道 B 承受，试求当重物离开材料架时轨道 A、B 的受力。



习题3-7解1图



习题3-7解2图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

解：以重物为平衡对象：受力如习题 3-7解1图所示

$$\sum F_y = 0, Tc = W / \cos \alpha$$

以整体为平衡对象：受力如习题3-7解2图所示

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = Tc' \sin \alpha = W \tan \alpha$$

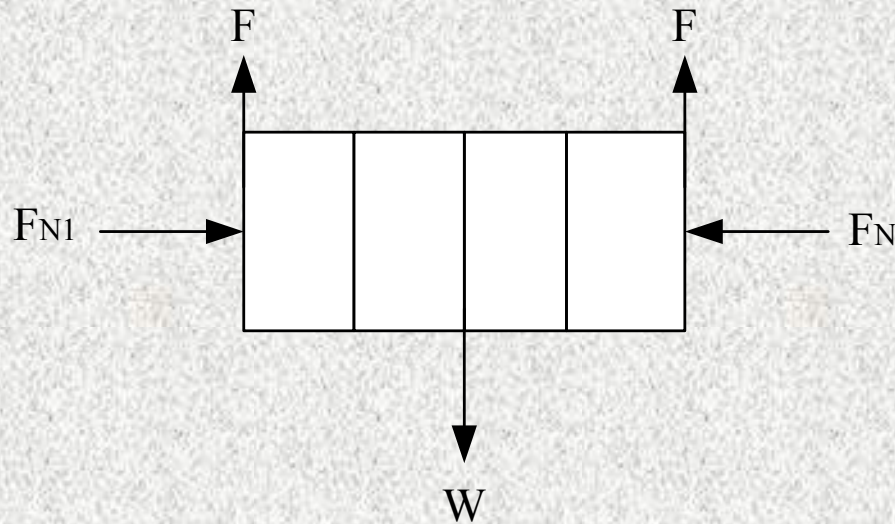
$$\sum M_B = 0, -F_{RA} \cdot 4h + Tc' \cos \alpha \cdot 2h + Tc' \sin \alpha \cdot 4h = 0$$

$$F_{RA} = \left(\frac{1}{2} + \tan \alpha \right) W \quad (\uparrow)$$

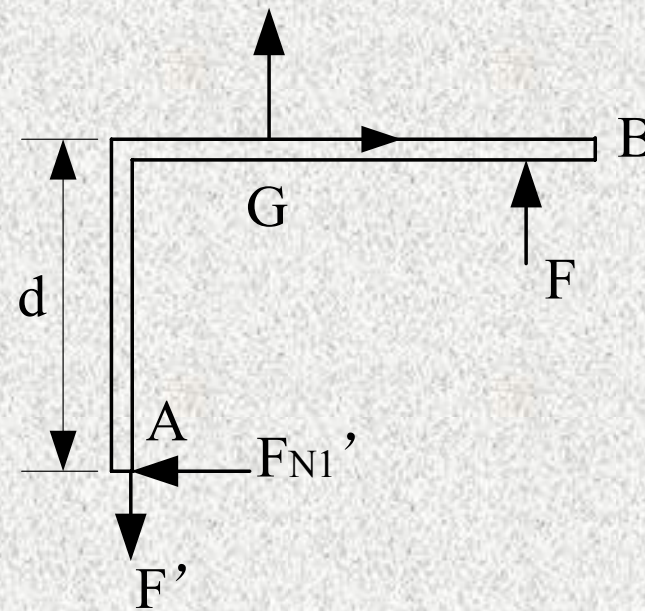
$$\sum F_y = 0, F_{By} = \left(\frac{1}{2} - \tan \alpha \right) W \quad (\uparrow)$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

3-13砖夹的宽度为250mm，杆件AGB和GCED在G点铰接。已知：砖的重量为 F_W ；提砖的合力为 F ，作用在砖夹的对称中心线上；尺寸如图所示；砖夹与砖之间的静摩擦因数 $f_s=0.5$ 。试确定能将砖夹起的 d 值（ d 是G点到砖块上所受正压力作用线的距离）。



习题3-13解1图



习题3-13解2图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

解：1. 以砖夹和砖组成的整体为平衡对象（题图）：

$$\sum F_y = 0, F = W \quad (1)$$

2. 以4块砖组成的整体为平衡对象，由习题3-13解1图，有

$$\sum F_y = 0, F = \frac{W}{2} \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0, F_{N1} = F_{N2}$$

$$F \leq fF_{N1} \quad (3)$$

$$F_{N1} = F_{N2} \geq \frac{F}{f} = \frac{W}{2f} \quad (4)$$

第3章 工程构件的静力学平衡问题

3. 以杠杆AOB为平衡对象-由习题3-13解2图, 有

$$\sum M_G = 0$$

$$F \times 95 + F' \times 30 - F'_{N1} d = 0$$

$$95W + 30 \times \frac{W}{2} - \frac{W}{2f} d = 0$$

$$d \geq 110\text{mm}$$

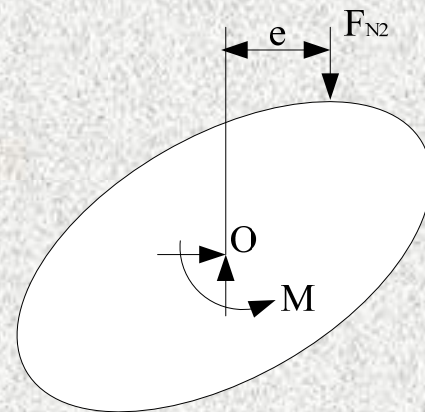
第3章 工程构件的静力学平衡问题

3-14 图示为凸轮顶杆机构，在凸轮上作用有力偶，其力偶矩的大小为 M ，顶杆上作用有力 F_Q 。已知顶杆与导轨之间的静摩擦因数为 f_s ，偏心距为 e ，凸轮与顶杆之间的摩擦可以忽略不计。要使顶杆在导轨中向上运动而不致被卡住。试确定滑道的长度 L 。

解：1. 以凸轮为平衡对象：受力图如习题3-14解2图所示。

$$\sum M_O = 0,$$

$$F_{N2}' = \frac{W}{e} \quad (1)$$



习题3-14解2图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

2. 以顶杆为平衡对象：受力图如习题3-14解1图所示。

$$\sum F_y = 0,$$

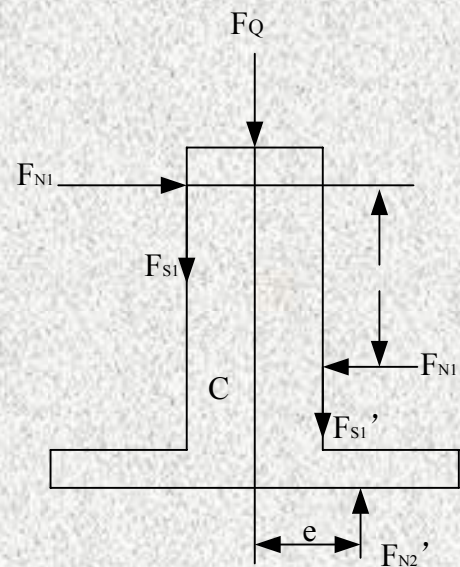
$$F_Q + 2F_S = F_{N2} \quad (2)$$

$$F_S = F_{S1} = F_{S2}$$

$$F_S = f_s F_{N1} \quad (3)$$

(1)、(3) 代入 (2)，得

$$F_Q + 2f_s F_{N1} = \frac{M}{e} \quad (4)$$



习题3-14解1图

第3章 工程构件的静力学平衡问题

$$\sum M_C(F) = 0,$$

$$F_{N1} \cdot l = F_{N2} \cdot e = M$$

$$F_{N1} = \frac{M}{l}$$

代入(4), 得

$$F_Q + 2f_s \cdot \frac{M}{l} = \frac{M}{e}$$

$$\therefore l = \frac{2Mef_s}{M - F_Q e}$$

即 $l_{\min} = \frac{2Mef_s}{M - F_Q e}$

第4章 材料力学的基本概念

第四章 材料力学的基本概念

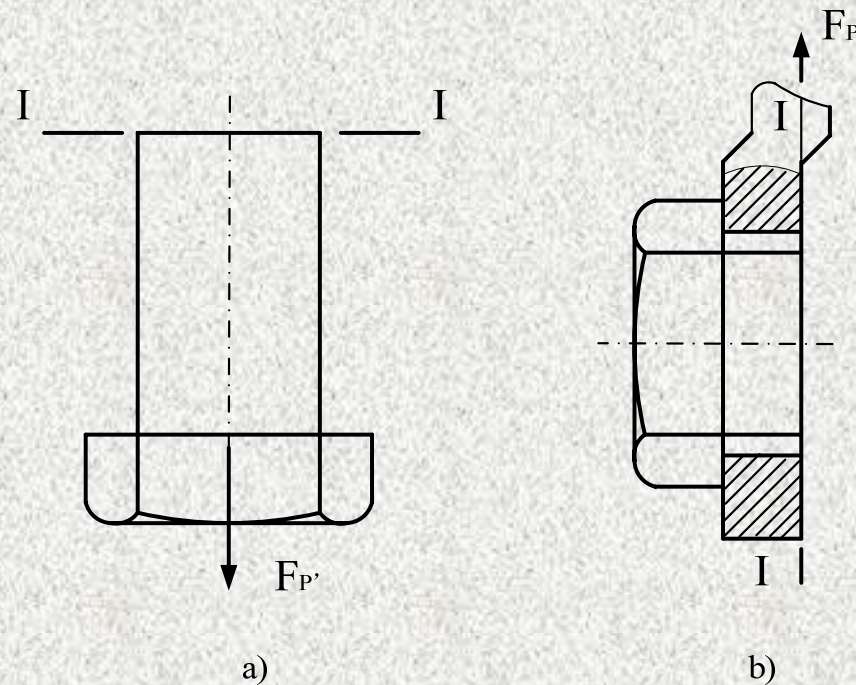
课后习题：

1. P₈₄ 习题 4-1

2. P₈₄ 习题 4-2

第4章 材料力学的基本概念

4-1 确定下列结构中螺栓的指定截面 I - I 上的内力分量，并指出两种结构中的螺栓 分别属于哪一种基本受力与变形形式。



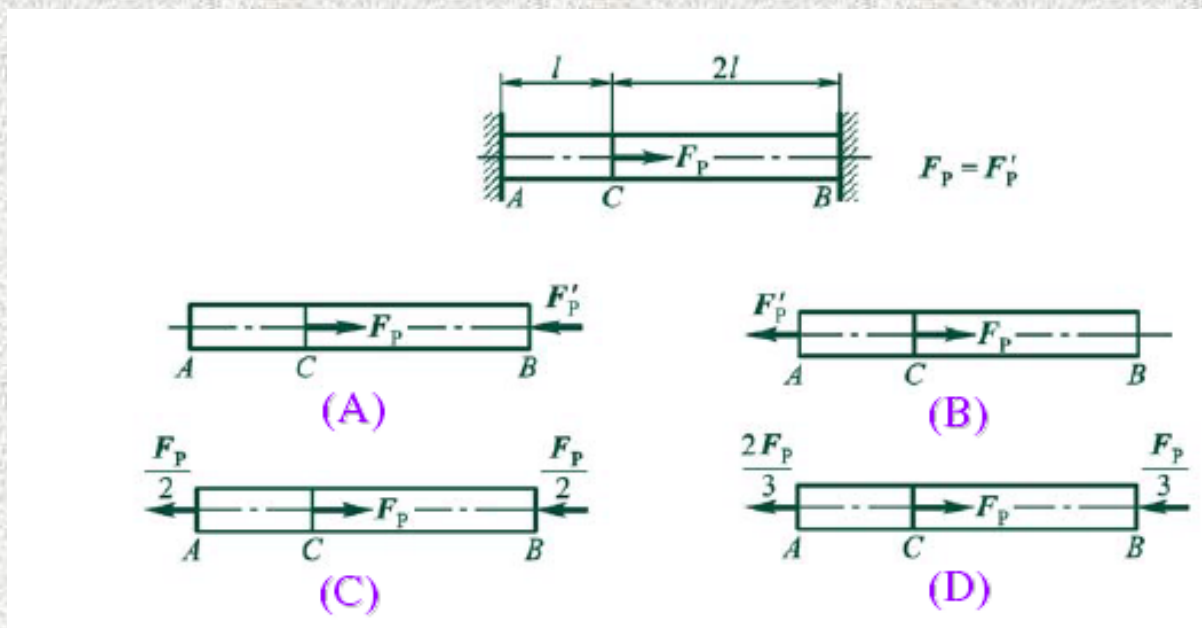
习题4-1图

解：(a) $F_N = F_P$ ，产生轴向拉伸变形。

(b) $F_Q = F_P$ ，产生剪切变形。

第4章 材料力学的基本概念

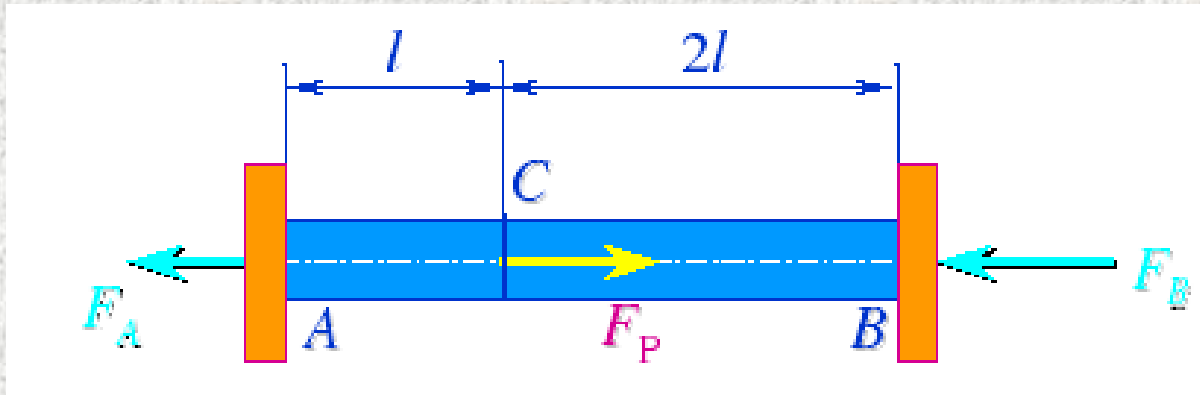
4-2 如习题4-2图所示直杆A、C、B在两端A、B处固定，在C处受有沿直线方向的外力，这一外力将会在A、B两端产生轴线方向的约束力。关于其两端的约束力有（A）、（B）、（C）、（D）四种答案，请判断哪一种是正确的。



习题 4-2图

第4章 材料力学的基本概念

解：首先分析知，该问题属于超静定问题，受力图如图所示：



平衡方程：
$$F_A + F_B = F_P$$

变形协调方程：
$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0$$

本构方程：
$$\Delta l_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} l_{AC} = \frac{F_A l_{AC}}{EA}, \Delta l_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} l_{CB} = \frac{F_B l_{CB}}{EA}$$

补充方程：
$$F_A l_{AC} + F_B l_{CB} = 0$$

求解得：
$$F_A = \frac{2}{3} F_P, F_B = \frac{1}{3} F_P$$

第5章 杆件的内力图

第五章 杆件的内力图

课后习题：

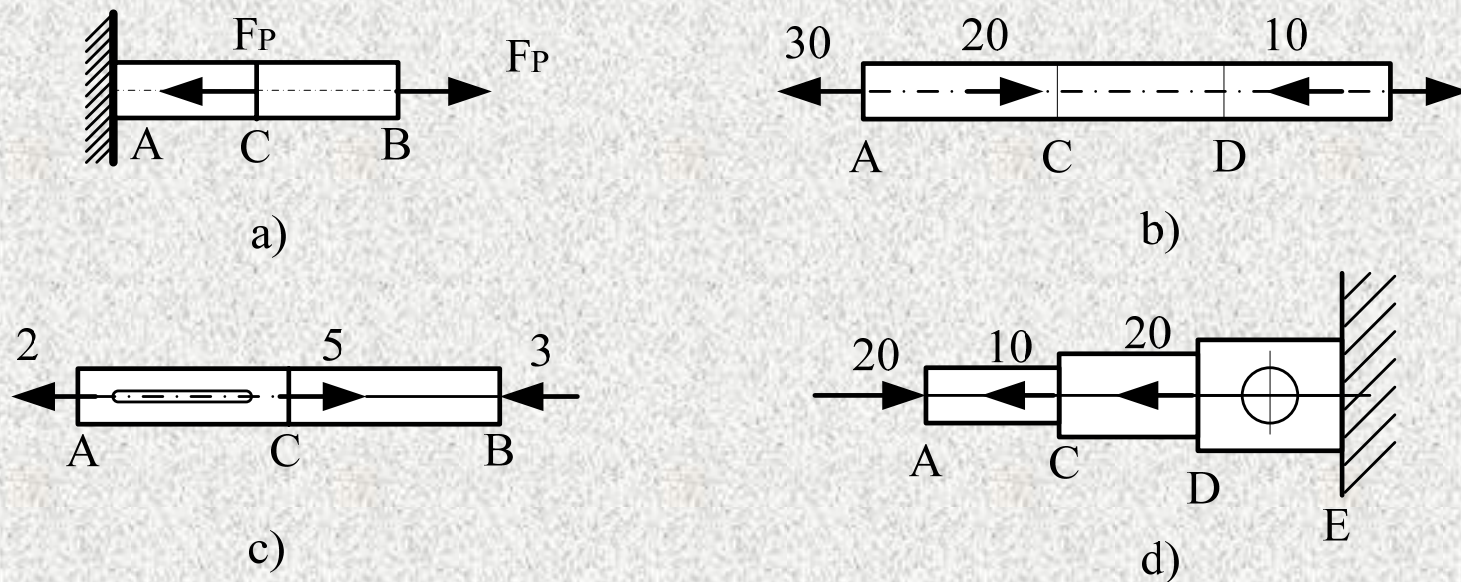
1. P₁₀₂ 习题 5-1

2. P₁₀₃ 习题 5-3

3. P₁₀₃ 习题 5-5

第5章 杆件的内力图

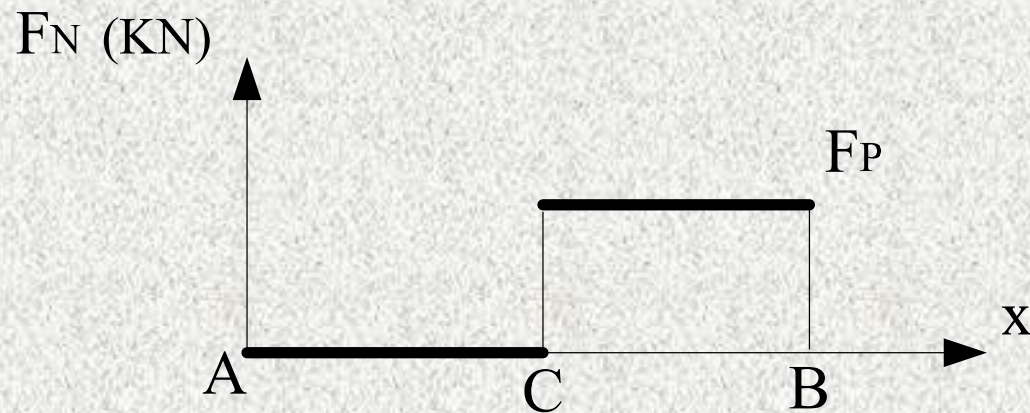
★5-1 试用截面法计算图示杆件各段的轴力，并画轴力图，单位为KN。



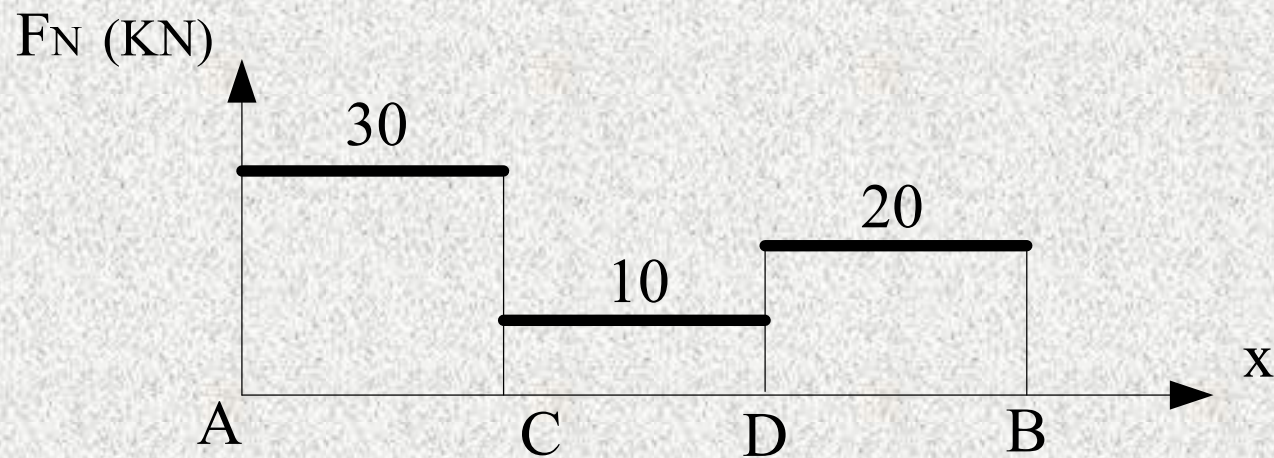
习题 5-1图

第5章 杆件的内力图

解: (a)题

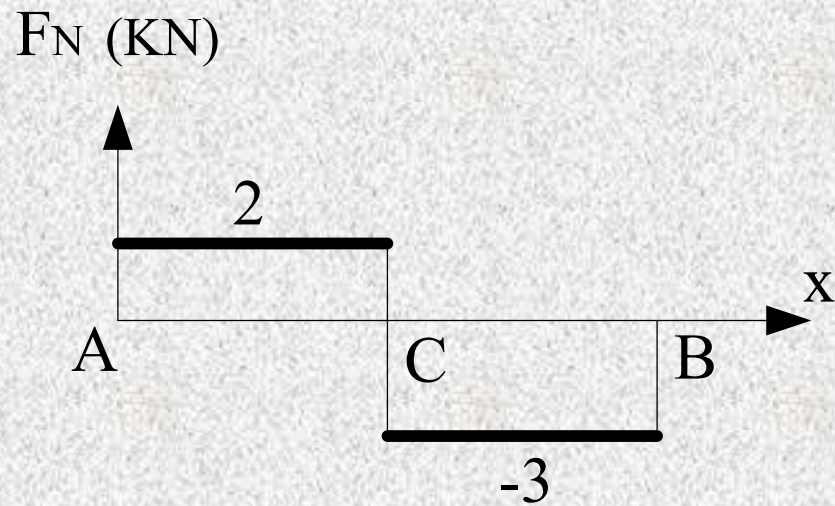


(b)题

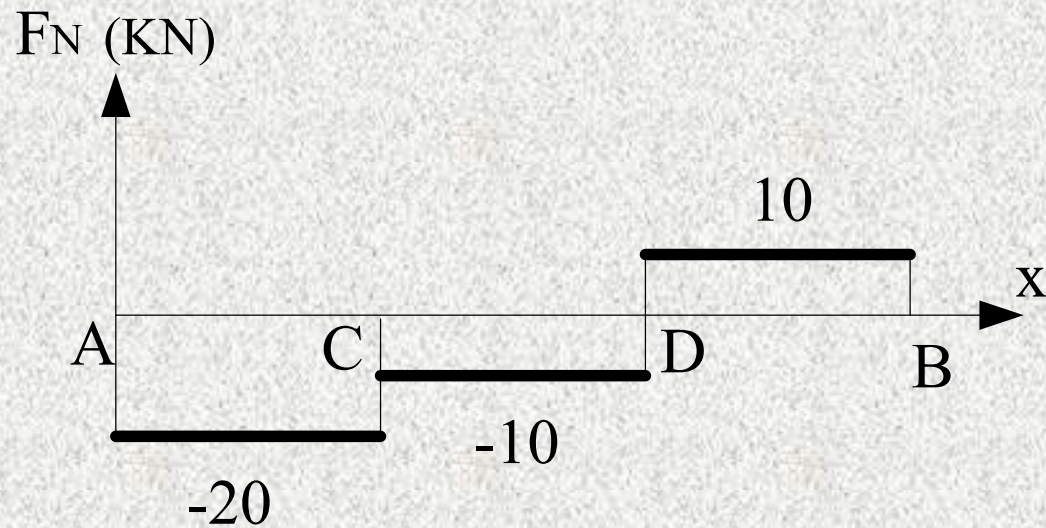


第5章 杆件的内力图

(c)题

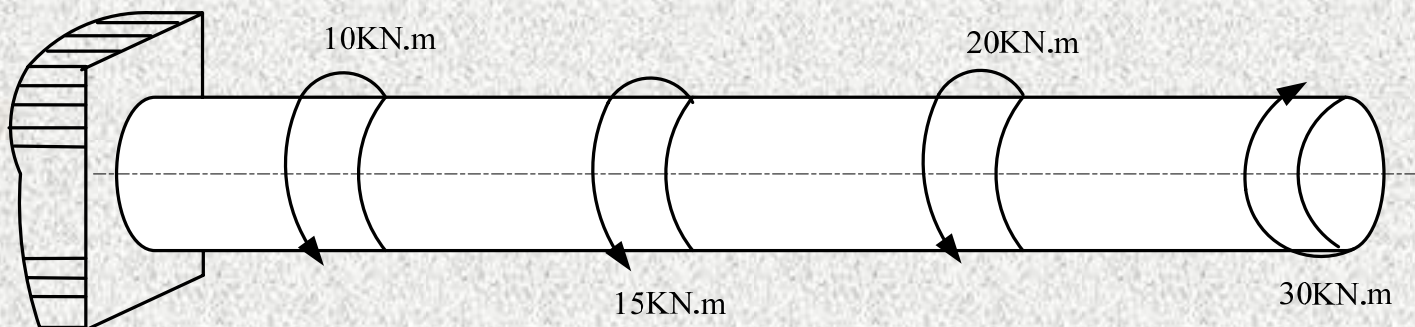


(d)题



第5章 杆件的内力图

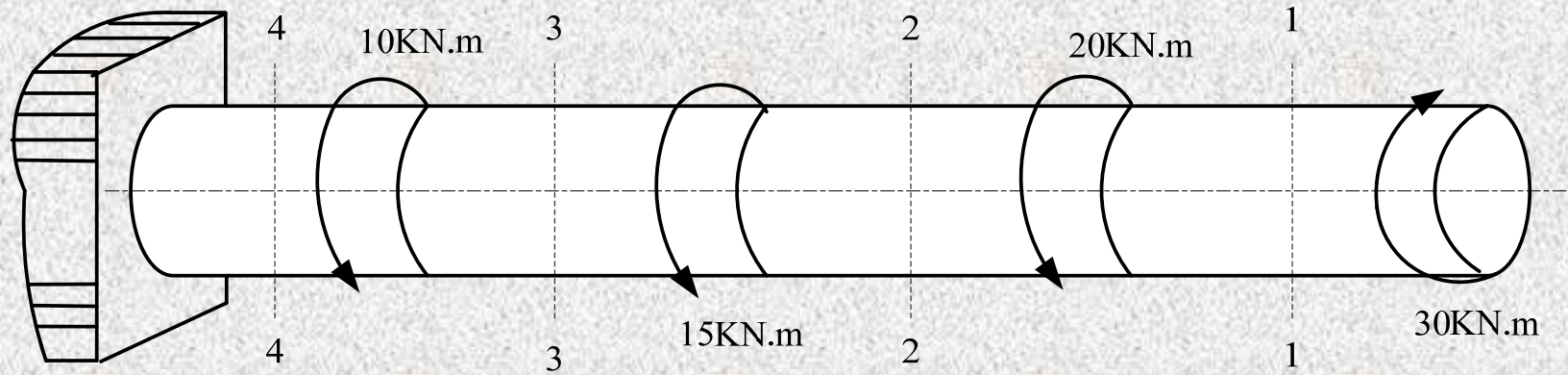
★ 5-3 一端固定另一端自由的圆轴承受四个外力偶作用，如题所示。各力偶的力偶矩数值均示于图中，试画出圆轴的扭矩图。



习题 5-3图

解：将轴划分为四个截面

第5章 杆件的內力图



截面1-1扭矩平衡方程

$$M_{x1} + 30 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0, M_{x1} = -30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

截面2-2扭矩平衡方程

$$M_{x2} - 20 \text{ kN}\cdot\text{m} + 30 \text{ kN}\cdot\text{m} = 0, M_{x2} = -10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

第5章 杆件的内力图

截面3-3扭矩平衡方程

$$M_{x3} - 15\text{KN}\cdot\text{m} - 20\text{KN}\cdot\text{m} + 30\text{KN}\cdot\text{m} = 0$$

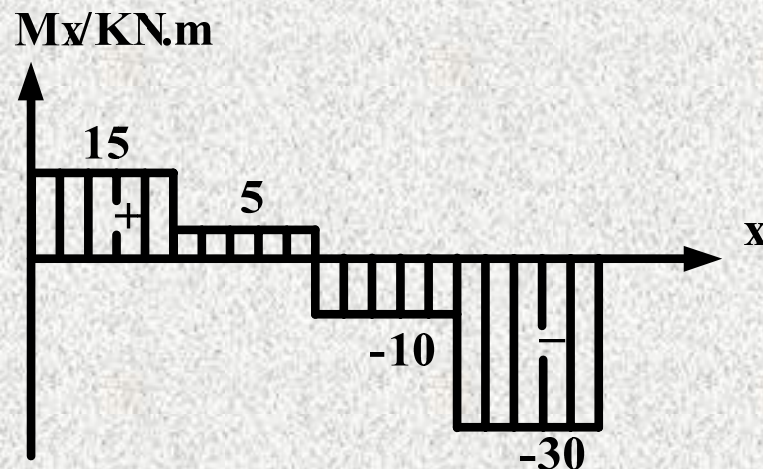
$$M_{x3} = 5\text{KN}\cdot\text{m}$$

截面4-4扭矩平衡方程

$$M_{x4} - 10\text{KN}\cdot\text{m} - 15\text{KN}\cdot\text{m} - 20\text{KN}\cdot\text{m} + 30\text{KN}\cdot\text{m} = 0$$

$$M_{x4} = 15\text{KN}\cdot\text{m}$$

扭矩图如右图所示



第5章 杆件的内力图

★ 5-5 试写出图中所示各梁的剪力方程、弯矩方程

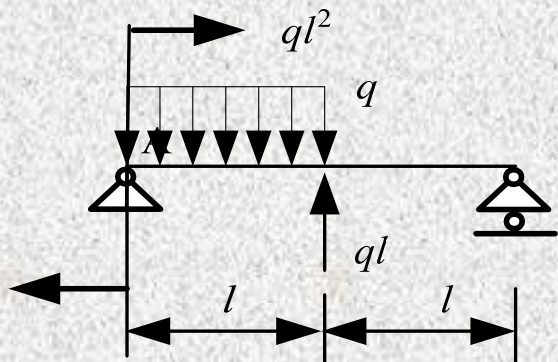


图1

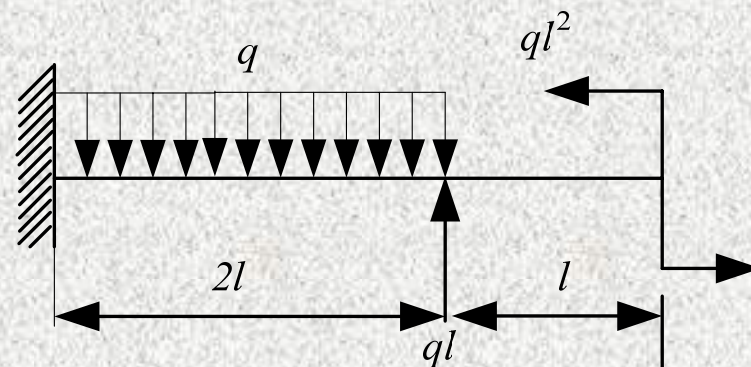


图2

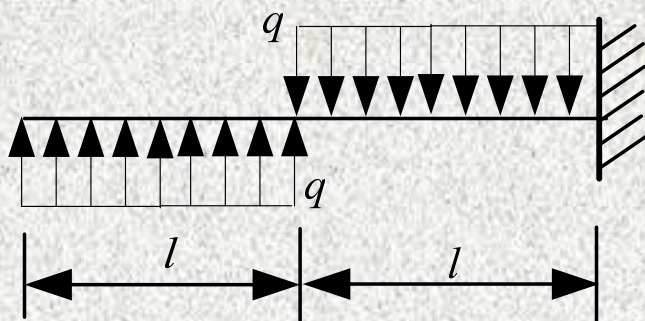
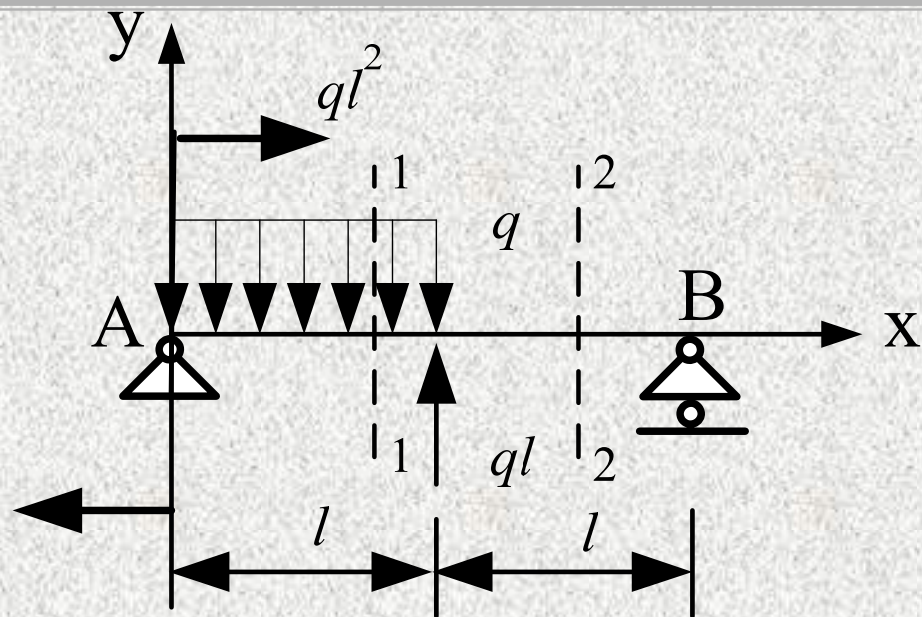


图3

第5章 杆件的内力图



解:

图1解

图1) 取根据力平衡方程和弯矩平衡方程得出

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{RB} = \frac{ql}{4} \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow F_{RA} = -\frac{ql}{4}$$

建立坐标系并确定两个控制面, 如图1解

取控制面1-1左侧为研究对象:

$$\text{剪力方程: } F_{Q1}(x_1) + qx_1 - F_{RA} = 0, \quad F_{Q1}(x_1) = -\frac{ql}{4} - qx_1 \quad (0 \leq x_1 < l)$$

第5章 杆件的内力图

弯矩方程:

$$M(x_1) - ql^2 + \frac{1}{2}qx_1^2 - F_{RA} \cdot x_1 = 0 \quad (0 \leq x_1 < l)$$

$$M(x_1) = -\frac{1}{2}qx_1^2 - \frac{ql}{4}x_1 + ql^2 \quad (0 \leq x_1 < l)$$

取控制面2-2右侧为研究对象:

剪力方程:

$$F_{Q2}(x_2) + F_{RB} = 0 \Rightarrow F_{Q2}(x_2) = -F_{RB} = -\frac{ql}{4} \quad (l < x_2 \leq 2l)$$

弯矩方程:

$$M(x_2) - F_{RB} \cdot (x_2 - l) = 0 \Rightarrow M(x_2) = \frac{ql}{4}(x_2 - l) \quad (l \leq x_2 \leq 2l)$$

第5章 杆件的内力图

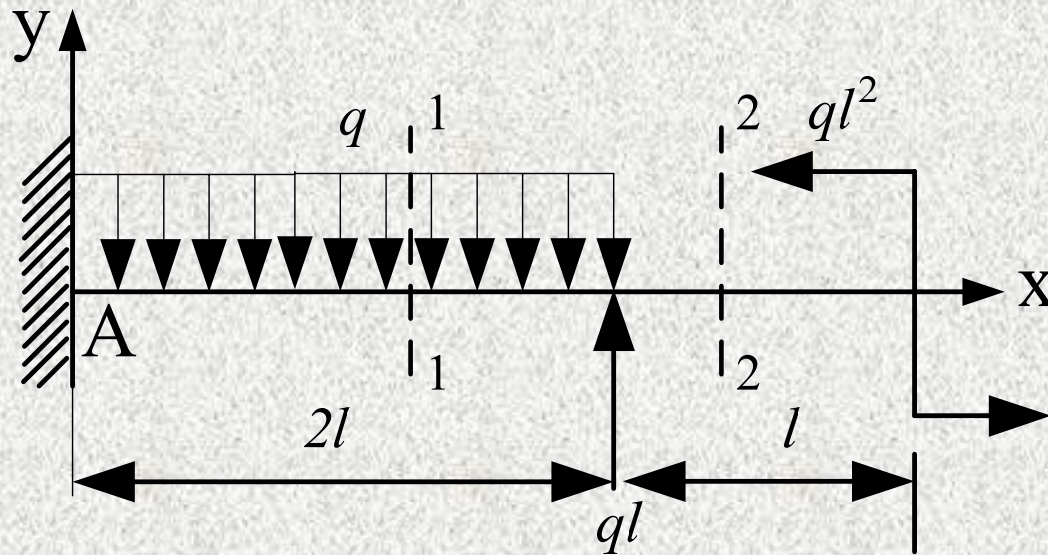


图2解

图2) 建立坐标系, 并取两个控制面, 如图2解
取控制面1-1右侧为研究对象:

剪力方程:

$$F_{Q1}(x_1) - q(2l - x_1) + ql = 0, F_{Q1}(x_1) = ql - qx_1 \quad (0 \leq x_1 \leq 2l)$$

第5章 杆件的内力图

弯矩方程:

$$M(x_1) + \frac{1}{2}q(2l - x_1)^2 - ql^2 - ql(2l - x_1) = 0$$

$$M(x_1) = -\frac{1}{2}qx_1^2 + qlx_1 + ql^2 \quad (0 \leq x_1 \leq 2l)$$

取控制面2-2右侧为研究对象:

剪力方程:

$$F_{Q2}(x_2) = 0 \quad (2l < x_2 \leq 3l)$$

弯矩方程:

$$M_{x2} = ql^2 \quad (2l < x_2 \leq 3l)$$

第5章 杆件的内力图

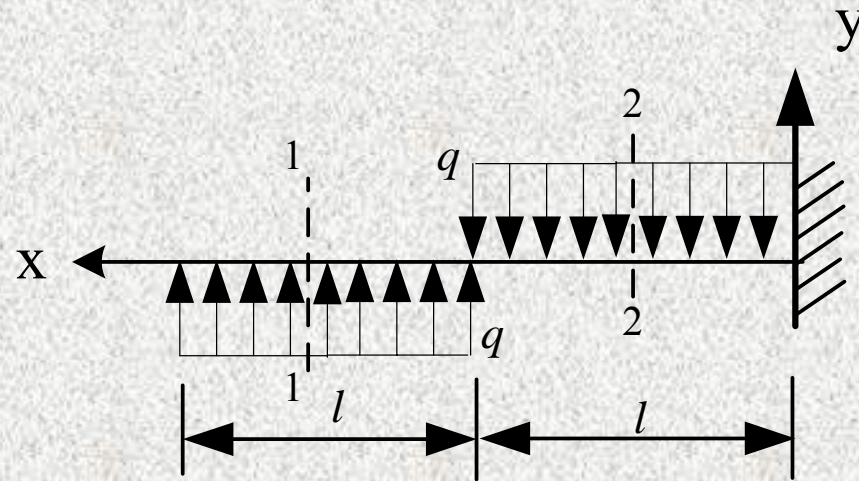


图3解

图3) 建立坐标系, 并取两个控制面, 如图3解

取控制面1-1左侧为研究对象:

剪力方程:

$$F_{Q1}(x_1) - q(2l - x_1) = 0, F_{Q1}(x_1) = 2ql - qx_1 \quad (l < x_1 < 2l)$$

第5章 杆件的内力图

弯矩方程:

$$M(x_1) - q \frac{(2l - x_1)^2}{2} = 0$$

$$M(x_1) = q \left(2l^2 - 2lx_1 + \frac{1}{2}x_1^2 \right) \quad (l < x_1 < 2l)$$

取控制面2-2左侧为研究对象:

剪力方程:

$$F_{Q2}(x_2) + q(l - x_2) - ql = 0, F_{Q2}(x_2) = qx_2 \quad (0 < x_2 < l)$$

弯矩方程:

$$M(x_2) + q \frac{(l - x_2)^2}{2} - ql \left(\frac{l}{2} + (l - x_2) \right) = 0$$

$$M(x_2) = -\frac{1}{2}qx_2^2 + ql^2 \quad (0 < x_2 < l)$$

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

第六章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

课后习题：

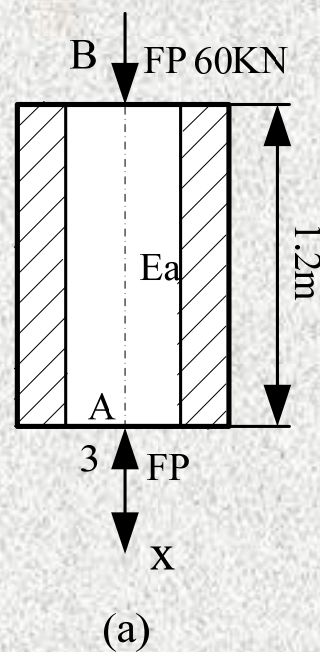
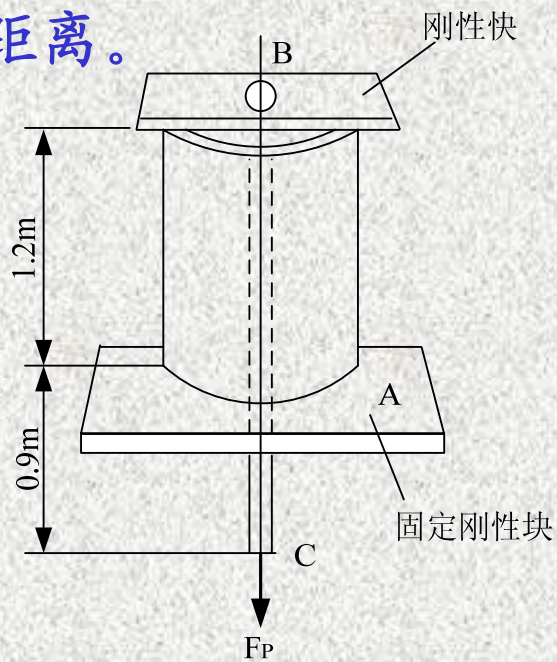
1. P₁₂₃ 习题 6-2

2. P₁₂₃ 习题 6-4

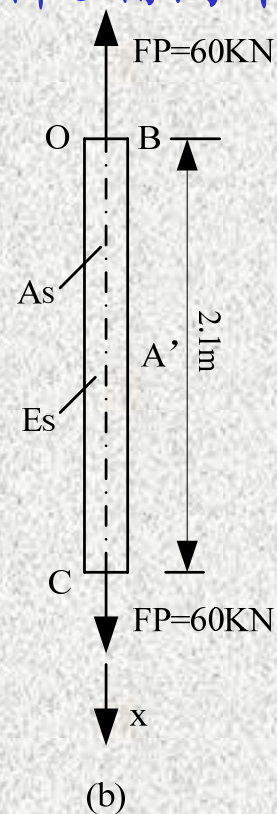
3. P₁₂₄ 习题 6-6

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

★6-2 长度 $L=1.2\text{m}$ 、横截面面积为 $1.10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 的铝制圆筒放置在固定的刚性块上；直径 $d=15\text{mm}$ 的钢杆BC悬挂在铝筒顶端的刚性板上；铝制圆筒的轴线与钢杆的轴线重合。若在钢杆的C端施加轴向拉力 F_p ，且已知钢和铝的弹性模量分别为 $E_s = 200\text{GPa}$ ， $E_a=70\text{GPa}$ ；轴向载荷 $F_p=60\text{kN}$ ，试求钢杆C端向下移动的距离。



习题 6-2图



第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

解:

$$u_A - u_B = \frac{-F_P l_{AB}}{E_a A_a} \quad (\text{其中 } u_A = 0)$$

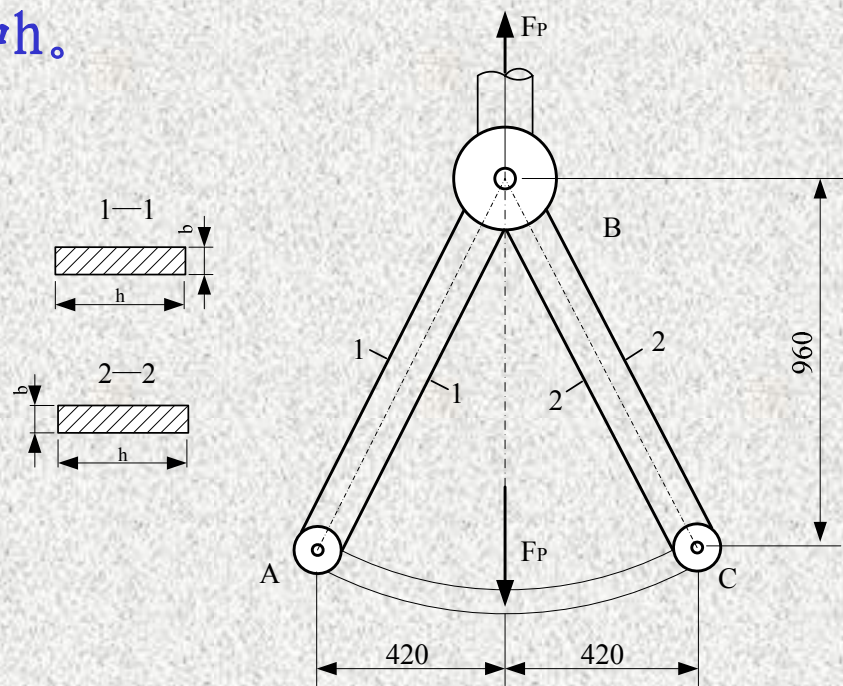
$$\therefore u_B = \frac{60 \times 10^3 \times 1.2 \times 10^3}{70 \times 10^3 \times 1.10 \times 10^{-3} \times 10^6} = 0.935 \text{mm}$$

钢杆C端的位移为

$$u_c = u_B + \frac{F_P l_{Bc}}{E_s A_s} = 0.935 + \frac{60 \times 10^3 \times 2.1 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 15^2} = 4.50 \text{mm}$$

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

6-4 现场施工所用起重机吊环由两根侧臂组成。每一侧臂AB和BC都由两根矩形截面杆所组成，A、B、C三处均为铰链连接，如图所示。已知起重载荷 $F_P=1200\text{kN}$ ，每根矩形杆截面尺寸比例 $b/h=0.3$ ，材料的许用应力 $[\sigma]=78.5\text{MPa}$ 。试设计矩形杆的截面尺寸 b 和 h 。



习题 6-4图

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

解：由对称性得受力图如习题 6-4 解图所示。

$$\sum F_y = 0, 4F_N \cos \alpha = F_P$$

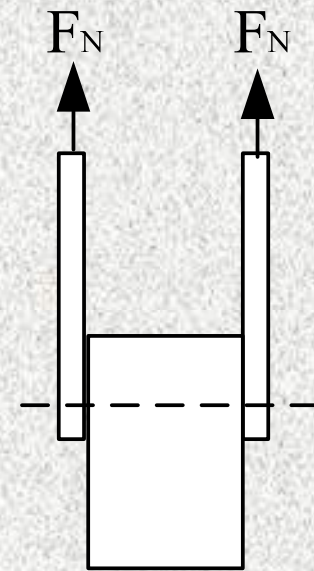
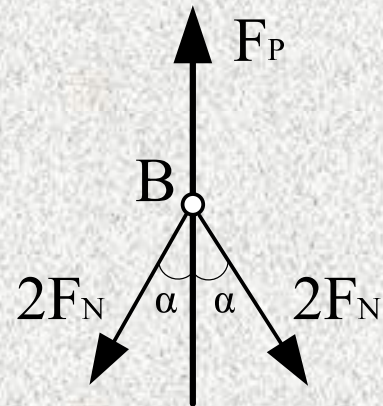
$$F_N = \frac{F_P}{4 \cos \alpha} = \frac{1200 \times 10^3}{4 \times \frac{960}{\sqrt{960^2 + 420^2}}} = 3.275 \times 10^5 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F_N}{0.3h^2} \leq [\sigma]$$

$$h \geq \sqrt{\frac{F_N}{0.3[\sigma]}} = \sqrt{\frac{3.275 \times 10^5}{0.3 \times 78.5 \times 10^6}} = 0.118 \text{ m}$$

$$b = 0.3h \geq 0.3 \times 0.118 = 0.0354 \text{ m} = 35.4 \text{ mm}$$

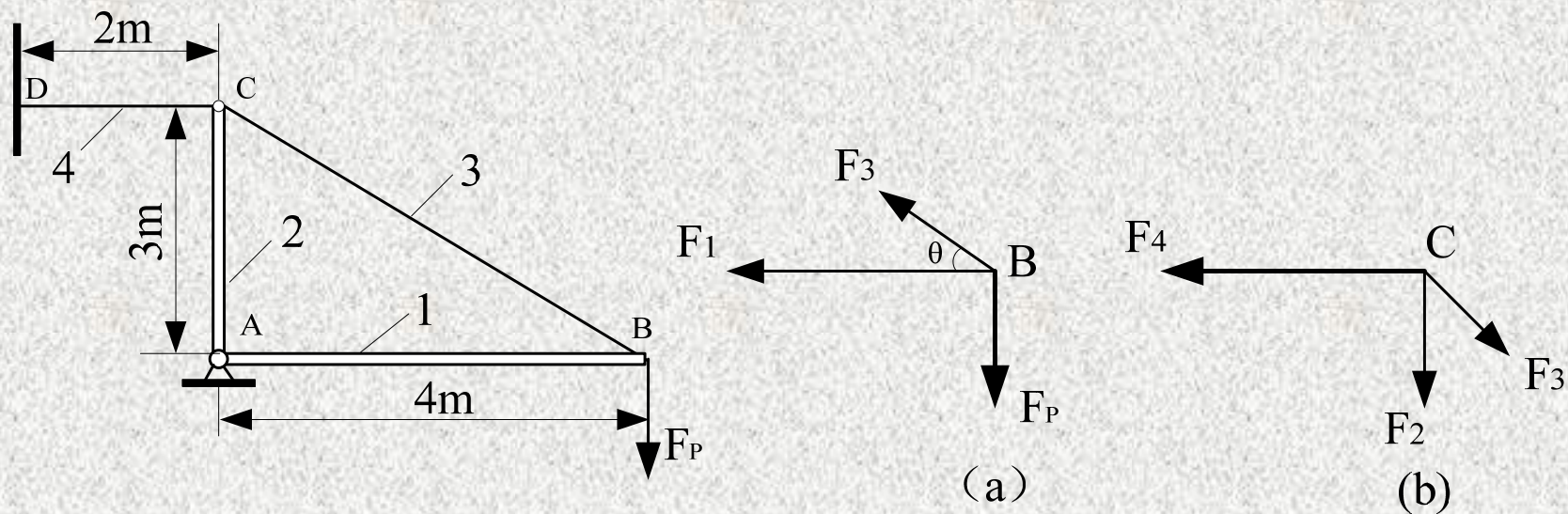
$$h = 118 \text{ mm}, b = 35.4 \text{ mm}$$



习题 6-4解图

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

6-6 图示的杆件结构中1、2杆为木制，3、4杆为钢制。已知1、2杆的横截面面积 $A_1 = A_2 = 4000 \text{ mm}^2$ ，3、4杆的横截面面积 $A_3 = A_4 = 800 \text{ mm}^2$ ；1、2杆的许用应力 $[\sigma_w] = 20 \text{ MPa}$ ，3、4杆的许用应力 $[\sigma_s] = 120 \text{ MPa}$ 。试求结构的许用载荷 $[F_P]$ 。



习题 6-6图

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

解：1. 受力分析：由图（a）有

$$\sum F_y = 0, F_3 = \frac{5}{3} F_P$$

$$\sum F_x = 0, F_1 = -\frac{4}{5} F_3 = -\frac{4}{3} F_P$$

由图（b）由 $\sum F_x = 0, F_4 = \frac{4}{5} F_3 = \frac{4}{3} F_P$

$$\sum F_y = 0, F_2 = -\frac{5}{3} F_3 = -F_P$$

2. 强度计算： $|F_1| > |F_2|$

$$\frac{F_1}{A_1} \leq [\sigma_w]$$

$$\frac{4}{3} F_P \leq A_1 [\sigma_w]$$

第6章 拉压杆件的应力变形分析与强度设计

$$F_P \leq \frac{3}{4} A_1 [\sigma_w] = \frac{3}{4} \times 4000 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^6 = 60 \text{ KN}$$

$$|F_3| > |F_4| \Rightarrow \frac{F_3}{A_3} \leq [\sigma_s], \quad \frac{5}{3} F_P \leq [\sigma] A_3$$

$$F_P \leq \frac{3}{5} [\sigma] A_3 = \frac{3}{5} \times 120 \times 10^6 \times 800 \times 10^{-6} = 57.6 \text{ KN}$$

$$[F_P] = 57.6 \text{ KN}$$

第7章 梁的强度问题

第七章 梁的强度问题

课后习题：

1. P₁₅₈ 习题 7-5

2. P₁₅₈ 习题 7-7

3. P₁₆₀ 习题 7-12

第7章 梁的强度问题

7-5 悬臂梁受力及截面尺寸如图所示。图中的尺寸单位为 mm。

求：梁的1-1截面上A、B两点的正应力。

解：1. 计算梁的 1-1 截面上的弯矩：

$$M = -\left(1 \times 10^3 \text{ N} \times 1 \text{ m} + 600 \text{ N/m} \times 1 \text{ m} \times \frac{1}{2} \text{ m}\right) = -1300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 确定梁的 1-1 截面上 A、B 两点的正应力：

A 点：

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_Z y}{I_Z} = \frac{1300 \text{ N} \cdot \text{m} \times \left(\frac{150 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} - 20 \times 10^{-3} \text{ m}\right)}{\frac{100 \times 10^{-3} \text{ m} \times (150 \times 10^{-3} \text{ m})^3}{12}} \\ &= 2.54 \times 10^6 \text{ Pa} = 2.54 \text{ MPa} \quad (\text{拉应力})\end{aligned}$$

第7章 梁的强度问题

B点:

$$\sigma_B = \frac{M_Z y}{I_Z} = \frac{1300 \text{ N} \cdot \text{m} \times \left(\frac{150 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} - 40 \times 10^{-3} \text{ m} \right)}{\frac{100 \times 10^{-3} \text{ m} \times (150 \times 10^{-3} \text{ m})^3}{12}}$$
$$= 162 \text{ MPa} \quad (\text{压应力})$$

第7章 梁的强度问题

★7-7 图示矩形截面简支梁，承受均布载荷 q 作用。若已知 $q=2\text{kN/m}$ ， $L=3\text{m}$ ， $h=2b=240\text{mm}$ 。试求：截面竖放(图c)和横放(图b)时梁内的最大正应力，并加以比较。

解：1. 计算最大弯矩：

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \times 10^3 \text{ N/m} \times (3\text{m})^2}{8} = 2.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 确定最大正应力：

$$\text{平放: } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{2.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 6}{240 \times 10^{-3} \text{ m} \times (120 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 3.91 \text{ MPa}$$

第7章 梁的强度问题

竖放:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{2.25 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \times 6}{120 \times 10^{-3} \text{ m} \times (240 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 1.95 \text{ MPa}$$

3. 比较平放与竖放时的最大正应力:

$$\frac{\sigma_{\max}(\text{平放})}{\sigma_{\max}(\text{竖放})} = \frac{3.91}{1.95} \approx 2.0$$

第7章 梁的强度问题

7-12 习题7-12图所示之AB为简支梁，当载荷 F_P 直接作用在梁的跨度中点时，梁内最大弯曲正应力超过许用应力30%。为减小AB梁内的最大正应力，在AB梁配置一辅助梁CD，CD也可以看作是简支梁。试求辅助梁的长度 a 为何值时，梁AB满足要求。

解： 1. 不加辅助梁时

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad \frac{F_P l}{4W} = 1.30[\sigma]$$

2. 加辅助梁时

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad \frac{F_P (3 - a/2)}{2W} = [\sigma]$$

第7章 梁的强度问题

$$\frac{\frac{F_P}{2}(3-a/2)}{W} = \frac{\frac{F_P l}{4}}{1.30 \times W} = [\sigma]$$

$$1.30 \times (3 - a/2) = 3$$

$$a = 1.385m$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

第八章 梁的位移分析与刚度设计

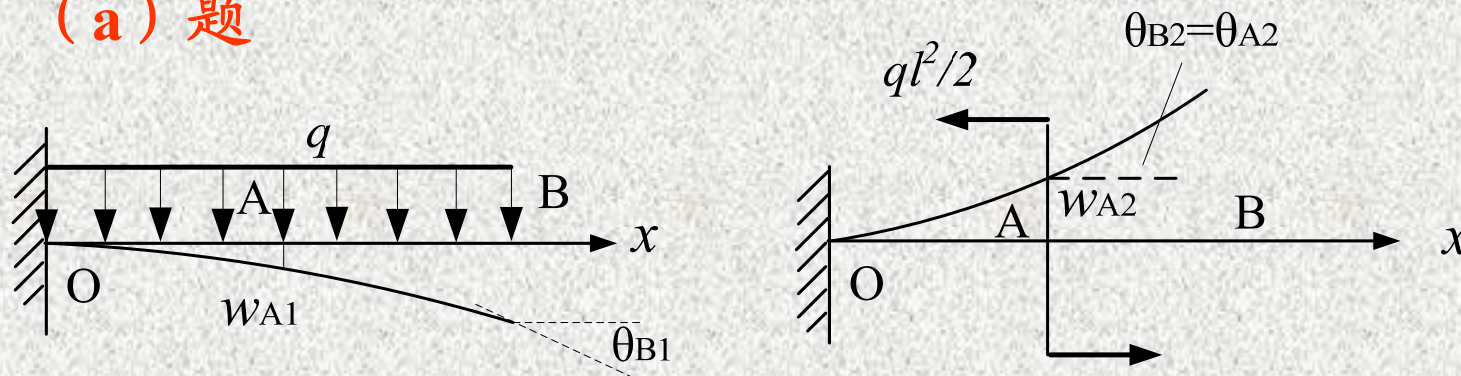
课后习题：

1. P₁₈₂ 习题 8-4
2. P₁₈₂ 习题 8-5
3. P₁₈₃ 习题 8-8
4. P₁₈₄ 习题 8-10

第8章 梁的位移分析与刚度设计

8-4 试用叠加法求下列各梁中截面A的挠度和截面B的转角。习题8-4图中 q 、 l 、 a 、 EI 等为已知。

解：(a) 题



习题8-4图 (a) 解

$$1. w_A = w_{A1} + w_{A2}$$

$$w_{A1} = \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 6l^2 - 4l \left(\frac{l}{2}\right) \right]}{24EI} = \frac{17ql^4}{384EI}$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

$$w_{A2} = -\frac{\frac{ql^2}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} = -\frac{ql^4}{16EI}$$

$$w_A = w_{A1} + w_{A2} = -\frac{17ql^4}{384EI} (\uparrow)$$

$$2.\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2}$$

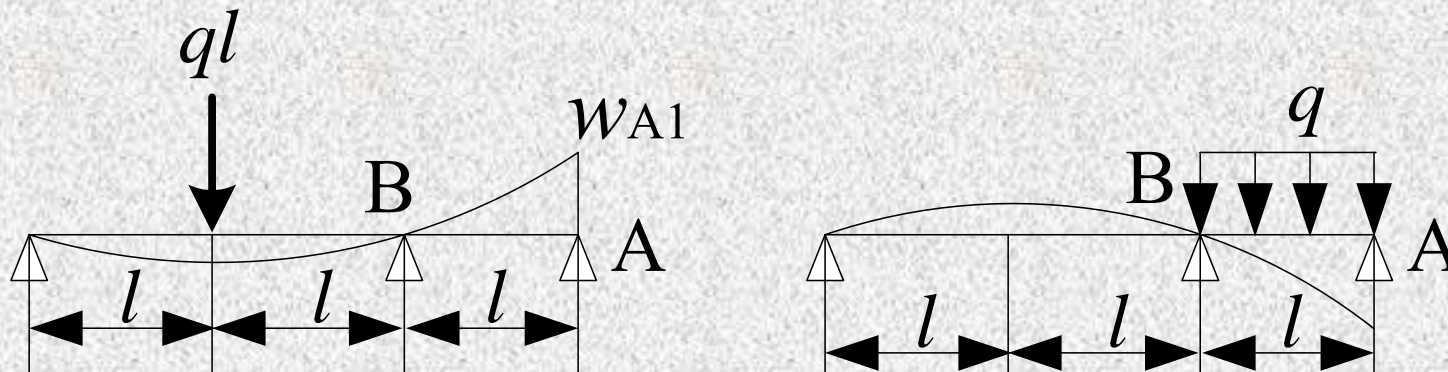
$$\theta_{B1} = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$\theta_{B2} = \theta_{A2} = -\frac{\frac{ql^2}{2} \times \left(\frac{l}{2}\right)}{EI} = -\frac{ql^3}{4EI}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \frac{ql^3}{6EI} - \frac{ql^3}{4EI} = -\frac{ql^3}{12EI} (\text{逆时针})$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

(b) 题



习题8-4图 (b) 解

$$1. w_A = w_{A1} + w_{A2}$$

$$w_{A1} = \theta_{B1} \times l = -\frac{ql \cdot l \cdot l \cdot (2l + l)}{12EI} \times l = -\frac{ql^4}{4EI}$$

$$w_{A2} = \frac{ql^3(3l + 4 \times 2l)}{24EI} = \frac{11ql^4}{24EI}$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

$$w_A = w_{A1} + w_{A2} = \frac{5ql^4}{24EI}$$

$$2.\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2}$$

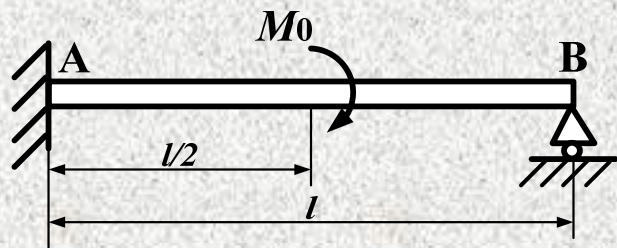
$$\theta_{B1} = -\frac{ql \cdot l \cdot l \cdot (2l + l)}{12lEI} = -\frac{ql^3}{4EI}$$

$$\theta_{B2} = \frac{ql^2(2l)}{16EI} = \frac{ql^3}{3EI}$$

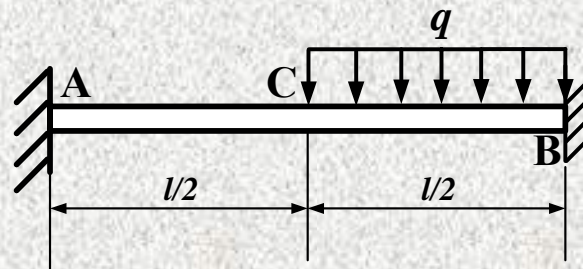
$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \frac{ql^3}{3EI} - \frac{ql^3}{4EI} = \frac{ql^3}{12EI}$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

★8-5 试求图示梁的约束力，并画出剪力图和弯矩图。



图a



图b

解：图a 变形协调方程

解除A点约束为简支

$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = 0$$

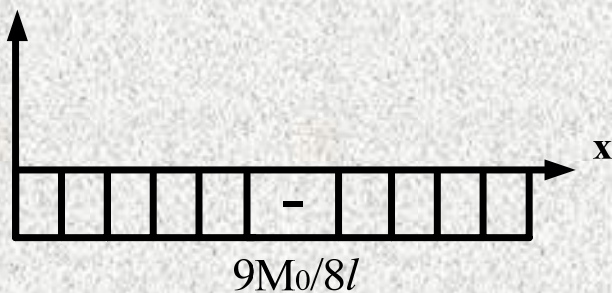
$$-\frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_0}{6EI} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$\therefore M_A = \frac{M_0}{8}$$

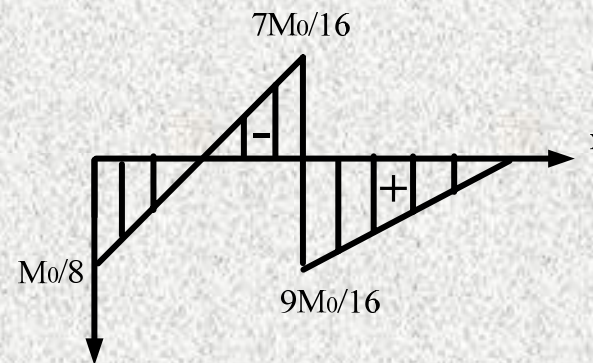
第8章 梁的位移分析与刚度设计

约束力:

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{M_0 + \frac{M_0}{8}}{l} = \frac{9}{8} \frac{M_0}{l}$$



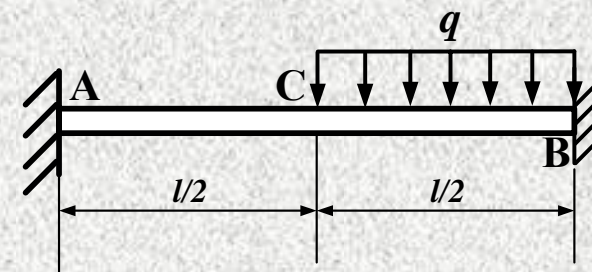
剪力图



弯矩图

图b: 解除A点约束

$$\theta_A = 0 : \frac{1}{EI} \left[M_A l + \frac{F_{RA}}{2} l^2 - \frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} \right] = 0$$



图b

第8章 梁的位移分析与刚度设计

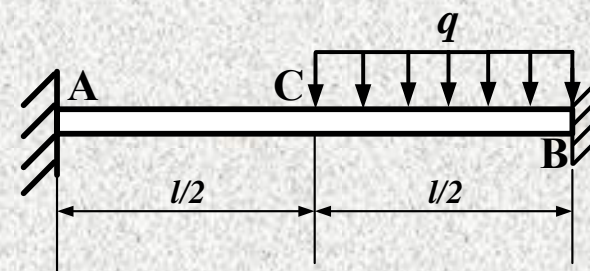
$$48M_A + 24lF_{RA} = ql^2 \quad (1)$$

$$w_A = 0: \frac{1}{EI} \left[\frac{M_A}{2} l^2 + \frac{F_{RA}}{3} l^3 - \left(\frac{q(\frac{l}{2})^4}{8} + \frac{q(\frac{l}{2})^3}{6} \times \frac{l}{2} \right) \right] = 0$$

$$192M_A + 128lF_{RA} = 7ql^2 \quad (2)$$

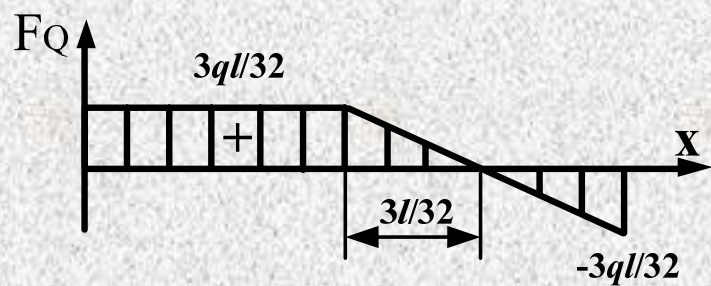
联立 (1)、(2) 解得

$$\begin{cases} M_A = -\frac{5}{192} ql^2 \\ F_{RA} = \frac{3}{32} ql \end{cases}$$

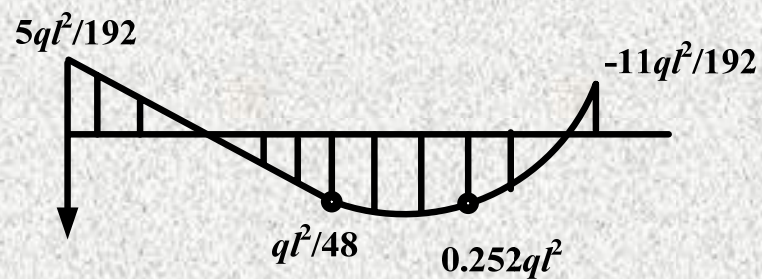


图b

第8章 梁的位移分析与刚度设计



剪力图



弯矩图

第8章 梁的位移分析与刚度设计

8-8 轴受力如图所示，已知 $F_P=1.6\text{kN}$ ， $d=32\text{mm}$ ， $E=200\text{GPa}$ 。若要求加力点的挠度不大于许用挠度 $[w]=0.05\text{mm}$ ，试校核该轴是否满足刚度要求。

解：由挠度表查得

$$\begin{aligned}w_C &= \frac{F_P b a}{6lEI} (l^2 - a^2 - b^2) \\ &= \frac{1.6 \times 10^3 \times 0.246 \times 0.048 \times (294^2 - 48^2 - 246^2) \times 10^{-6} \times 64}{6(246 + 48) \times 10^{-3} \times 200 \times 10^9 \times \pi \times 32^4 \times 10^{-12}} \\ &= 2.46 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0246 \text{ mm} < [w], \text{ 安全。}\end{aligned}$$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

8-10 图示承受均布载荷的简支梁由两根竖向放置的普通槽钢组成。已知 $q=10\text{kN/m}$ ， $L=4\text{m}$ ，材料的 $[\sigma]=100\text{MPa}$ ，许用挠度 $[w]=L/1000$ ， $E=200\text{GPa}$ 。试确定槽钢型号。

解：1. 强度设计：

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2$$

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10000 \times 4^2}{8 \times 100 \times 10^6} = 2 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$\text{每根槽钢 } W_{z1} = \frac{W_z}{2} \geq 100 \text{cm}^3$$

选 No.16a 槽钢，其 $W_z = 108.3 \text{cm}^3$

第8章 梁的位移分析与刚度设计

2. 刚度设计:

$$w_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_z} \leq \frac{l}{1000}$$

$$I_z \geq \frac{5 \times 10000 \times 4^3 \times 1000}{384 \times 200 \times 10^9} = 0.41667 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{z1} = \frac{I_z}{2} = 2083.3 \text{ cm}^4$$

选 No.22a 槽钢, 其 $I_z = 2393.9 \text{ cm}^4$

最后选定两根 No.22a 槽钢。