平面向量巧搭台 "取值范围"唱好戏
——以近五年高考试题为例谈平面向量中"取值范围"问题的求解

朱贤良，付朝华
（安徽省枞阳县会宫中学 246740）

向量具有几何形式（有向线段）与代数形式（坐标）的"双重身份"，与几何和代数有着密切的联系．在近几年的高考中，以平面向量为背景的最值、取值范围等问题更是层出不穷，此类问题综合性较强，同时体现了知识的交汇整合，从而使平面向量成为联系不同数学知识的"舞台"．本文以近5年高考试题为例，总结平面向量中"取值范围"问题的求解方法．

1 函数关系，通性通法

这是求解"取值范围"问题的最普遍的方法，而借助平面向量的运算合理建立函数关系式是解题的关键一步．

例1 （2011年高考辽宁卷·理10）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\leqslant 0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为（　　）．

(A) $\sqrt{2}-1$　(B) 1　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

解析 由题意，

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2=1-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\leqslant 0,$$

即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\geqslant 1$，

故

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{3-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}\leqslant 1,$$

即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为1，正确选项为B．

点评 借助向量的模长公式，求得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 是关于 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的一次函数，最大值容易求出．

例2 （2013年高考浙江卷·理7）设 $\triangle ABC$，P_0 是边 AB 上一定点，满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边 AB 上任一点 P，恒有 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则（　　）．

(A) $\angle ABC=90^\circ$　(B) $\angle BAC=90^\circ$
(C) $AB=AC$　(D) $AC=BC$

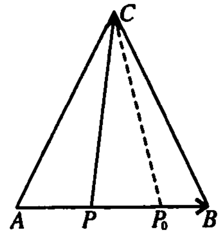

图1

解析 如图1，设 $\triangle ABC$ 的三角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$|\overrightarrow{PB}|=x$，则

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BC}=x^2-a\cos B\cdot x,$$

其中 $x\in[0,c]$．因为

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C},$$

即当动点 P 运动到定点 P_0 的位置时，即 $x=\frac{1}{4}c$ 时，二次函数

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=x^2-a\cos B\cdot x\ (0\leqslant x\leqslant c)$$

取得最小值，所以

$$\frac{a\cos B}{2}=\frac{1}{4}c,$$

$$2a\cos B=c,$$

$$2a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c,$$

即 $a=b$，故正确选项为D．

点评 以 $|\overrightarrow{PB}|=x$ 为自变量，借助数量积的运算，建立函数关系式 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=x^2-$

$a\cos B\cdot x(0\leqslant x\leqslant c)$，从而将$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$转化为上述二次函数的最小值问题.

例 3　(2013 年高考浙江卷 · 理 17 文 17)设 e_1,e_2 为单位向量，非零向量 $\boldsymbol{b}=xe_1+ye_2$，$x,y\in\mathbf{R}$，若 e_1,e_2 的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$的最大值等于________.

解析　由题意

$$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|x|}{\sqrt{(xe_1+ye_2)^2}}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}.$$

当 $x=0$ 时，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=0$；

当 $x\neq0$ 时，

$$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\frac{y}{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}\leqslant2.$$

综上，$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$的最大值等于 2.

点评　借助向量的模长公式，求得$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$是关于 x,y 的二元函数，如何求此二元函数的最大值是解题的一个难点.

例 4　(2010 年高考全国Ⅰ卷 · 理 11 文 11)已知圆 O 的半径为 1，PA，PB 为该圆的两条切线，A，B 为两切点，那么$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为(　　).

(A)$-4+\sqrt{2}$　　(B)$-3+\sqrt{2}$

(C)$=4+2\sqrt{2}$　　(D)$-3+2\sqrt{2}$

解析　如图 2，设

$PA=PB=x$，

$\angle APO=\angle BPO=\theta$，

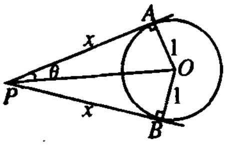

图 2

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2\cdot\cos2\theta$，

而 $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-\frac{2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{x^2\cdot(x^2-1)}{x^2+1}$，

其中 $x>0$. 令 $t=x^2+1$，则

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{(t-1)(t-2)}{t}=t+\frac{2}{t}-3,$$

其中 $t>1$. 显然，当 $t=\sqrt{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值 $2\sqrt{2}-3$，即正确选项为 D.

点评　如何选取合适自变量，如何建立函数关系式是本题的关键所在. 当然，也可以选择角 θ 为自变量.

2　线性规划，求目标函数最值

将目标函数的表达式隐于平面向量的运算之中，这是平面向量与线性规划的常见交汇形式.

例 5　(2011 年高考广东卷 · 理 5 文 6)已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ y\leqslant2,\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$给定. 若 $M(x,y)$为 D 上的动点，点 A 的坐标为$(\sqrt{2},1)$，则 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$的最大值为(　　).

(A)$4\sqrt{2}$　(B)$3\sqrt{2}$　(C)4　(D)3

解析　画出可行域 D 如图 3 所示，而目标函数 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=\sqrt{2}x+y$，将其化为 $y=-\sqrt{2}x+z$. 结合图形可知，当直线 $y=-\sqrt{2}x+z$ 经过点$(\sqrt{2},2)$时，截距 z 最大，即 $x=\sqrt{2}$，$y=2$ 时，z

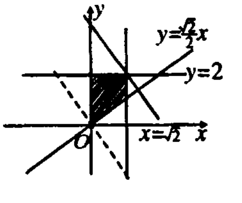

图 3

的最大值为 4,正确选项为 C.

点评 先根据数量积的运算求出目标函数的表达式,再结合线性规划知识,由平移直线法求得截距型目标函数 $z=\sqrt{2}x+y$ 的最大值.

例 6 (2011 年高考湖北卷·理 8)已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+z,3)$,$\boldsymbol{b}=(2,y-z)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.若 x,y 满足不等式 $|x|+|y|\leqslant 1$,则 z 的取值范围为( ).

(A)$[-2,2]$ (B)$[-2,3]$

(C)$[-3,2]$ (D)$[-3,3]$

解析 由题知,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(x+z)+3(y-z)$$
$$=2x+3y-z=0,$$

即目标函数为

$$z=2x+3y$$
$$\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}.$$

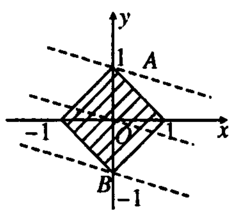

图 4

又不等式

$$|x|+|y|\leqslant 1$$

表示的区域如图 4 所示,由平移直线法知,当 $x=0,y=1$ 时,$z_{\max}=3$;当 $x=0,y=-1$ 时,$z_{\min}=-3$.故确选项为 D.

点评 本题中,目标函数 z 的表达式隐于"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"的关系中,平面向量与线性规划相得益彰.

3 基本不等式,巧思妙解

基本不等式法也是求函数最值的一种常用方法,这种方法也可以和平面向量问题结合起来.

例 7 (2009 年高考安徽卷·理 14)给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$,它们的夹角为 $120°$.如图 5 所示,点 C 在以 O 为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动,若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,则 $x+y$ 的最大值为______.

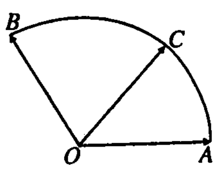

图 5

解析 因为

$$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},$$

两边平方得

$$1=x^2+y^2-xy,$$

配方得

$$1=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy,$$

由基本不等式有

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

故
$$1=(x+y)^2-3xy$$
$$\geqslant(x+y)^2-3\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{(x+y)^2}{4},$$

即 $x+y\leqslant 2$.

所以当 $x=y=1$ 时,$x+y$ 取得最大值 2.

点评 由向量的运算,将式子$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$两边平方后,从而将问题转化为根据等式 $1=x^2+y^2-xy$ 求 $x+y$ 的最大值(一般用基本不等式进行求解),此类问题在近几年高考中出现比较频繁,比如:

1.(2010 年高考浙江卷·文 15)若正实数 x,y 满足 $2x+y+6=xy$,则 xy 的最小值是______;

2.(2010 年高考重庆卷·理 7)已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$,则 $x+2y$ 的最小值是( ).

(A)3 (B)4 (C)$\frac{9}{2}$ (D)$\frac{11}{12}$

3.(2011 年高考浙江卷·文 16)若实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=1$,则 $x+y$ 的最大值是______;

4.(2011 年高考浙江卷·理 16)设 x,y 为实数,若 $4x^2+y^2+xy=1$,则 $2x+y$ 的最大值是______.

例 8 (2012 年高考安徽卷·理 14)若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 3$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值是______.

解析 建系,引入坐标求解.以 $\boldsymbol{a}$ 为 x 轴的一个方向向量建立平面直角坐标系,设 $\boldsymbol{a}=(x_1,0)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2x_1-x_2,-y_2)$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2$.

由　$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 3$,

得　$\sqrt{(2x_1-x_2)^2+y_2^2}\leqslant 3$,

即　$4x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+y_2^2\leqslant 9$.　　(1)

结合基本不等式知识,有

$4x_1^2+x_2^2\geqslant -4x_1x_2$,

当且仅当 $2x_1=-x_2$ 时等号成立,故由(1)式可得

$$\begin{aligned}9&\geqslant 4x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+y_2^2\\&\geqslant -8x_1x_2+y_2^2\\&\geqslant -8x_1x_2,\end{aligned}$$

即　$x_1x_2\geqslant -\dfrac{9}{8}$.

所以,当且仅当

$$\begin{cases}4x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+y_2^2=9,\\2x_1=-x_2,\\y_2=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{4},\\x_2=-\dfrac{3}{2},\\y_2=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{4},\\x_2=\dfrac{3}{2},\\y_2=0\end{cases}$

时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 取得最小值 $-\dfrac{9}{8}$.

点评　从 2012 年安徽高考反馈情况来看,本题难度较大,给考生带来了很大的障碍,如何把条件"$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 3$"与求解结论"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值"联系起来……其实向量问题的求解无非考虑是"形"(用有向线段表示向量,结合图形进行运算)还是"数"(建系,用坐标进行运算),本题显然引入坐标更易突破难点.当然,也可以任意建系,设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,后续思路同上,只是需要两次使用基本不等式知识,读者可以一试.

4　数形结合,以形助数

在求解取值范围问题时,数形结合,赋予式子以几何意义,求解直观简洁;在进行平面向量运算时,也可以尝试直接构造图形,化难为易.

例 9　(2013 年高考湖南卷·理 6)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是(　　).

(A)$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$

(B)$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+2]$

(C)$[1,\sqrt{2}+1]$

(D)$[1,\sqrt{2}+2]$

解析　由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的单位向量,可以考虑建系处理.设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\boldsymbol{c}=(x,y)$,则

$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x-1,y-1)$,

$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

因为 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,即

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$,

即点 (x,y) 在圆

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

上运动,而

$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$

表示点 (x,y) 与坐标原点间的距离.

如图 6,当点 (x,y) 运动至点 A 时,$\sqrt{x^2+y^2}$ 取得最小值,为 $\sqrt{2}-1$;当点 (x,y) 运动至点 B 时,$\sqrt{x^2+y^2}$ 取得最大值,为 $\sqrt{2}+1$.即 $|\boldsymbol{c}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$,正确选项为 A.

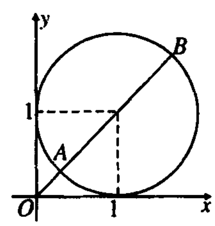

图 6

点评　本题建系后,将问题转化为在 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的条件下求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的取值范围问题,数形结合,借助式的几何意义求解直观简洁.本题也可以不引入坐标,对条件式 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$ 作两边平方处理,也可求解.

例 10　(2011 年高考全国大纲卷·理 12)设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$,$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于(　　).

(A)2　　(B)$\sqrt{3}$　　(C)$\sqrt{2}$　　(D)1

解析 本题的难点在于对条件式$\langle \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$的处理上，不论是采用向量的夹角公式，或是引入坐标，其运算量都非常大，考虑直接构造图形求解.

设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则$\angle AOB=120^\circ$. 分两种情况讨论：

（ⅰ）若点 C 在$\angle AOB$ 的开口区域内，如图 7，$\angle ACB=60^\circ$，$\angle AOB=120^\circ$，即有$\angle AOB+\angle ACB=180^\circ$，故 A,B,C,D 4 点共圆. 因此，当 OC 为圆的直径时，$|\boldsymbol{c}|$最大，此时$\angle OCA=\angle OCB=60^\circ$. 在$\triangle OAC$ 中，$\dfrac{OA}{\sin\angle OCA}=\dfrac{1}{\sin 60^\circ}=2$，即$|\boldsymbol{c}|$的最大值为 2.

（ⅱ）若点 C 不在$\angle AOB$ 的开口区域内，如图 8，因为$\angle ACB=60^\circ$，$\angle AOB=120^\circ$，即有$\angle AOB=2\angle ACB$，故点 O 为$\triangle ABC$ 的外心. 因此，$|\boldsymbol{c}|=1$ 为定值.

综上，$|\boldsymbol{c}|$的最大值为 2，正确选项为 A.

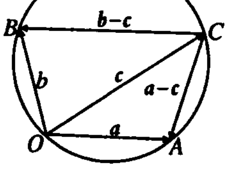

图 7

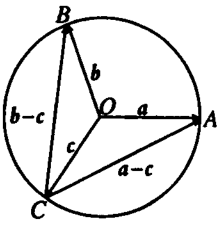

图 8

点评 本题以平面向量为背景，把题中所给条件转化为图形语言是求解的难点所在. 上述思路运用运动变化的观点审视静止问题，把数形结合的思想体现得淋漓尽致.

5 多元运算，多而有序

数学试题中的多元运算问题往往是一个难点，涉及的量多，容易使人思绪大乱. 只有理清头绪，方能多而不乱，多而有序.

例 11 （2013 年高考重庆卷·理 10）在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若$\overrightarrow{OP}<\dfrac{1}{2}$，则$|\overrightarrow{OA}|$的取值范围是（　　）.

（A）$(0,\frac{\sqrt5}{2}]$　（B）$(\frac{\sqrt5}{2},\frac{\sqrt7}{2}]$

（C）$(\frac{\sqrt5}{2},\sqrt2]$　（D）$(\frac{\sqrt7}{2},\sqrt2]$

解析 本题涉及点、向量较多，不易寻找解题的切入点. 考虑到$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，不妨建系一试.

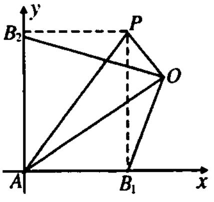

图 9

如图 9，分别以 AB_1，AB_2 为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系. 设 $B_1(a,0)$，$B_2(0,b)$，$P(a,b)$，$O(x,y)$，则

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，得

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=1,\\ x^2+(y-b)^2=1,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(x-a)^2=1-y^2,\\ (y-b)^2=1-x^2.\end{cases}\tag{2}$$

又$|\overrightarrow{OP}|<\dfrac{1}{2}$，即

$$0\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2<\frac{1}{4}.$$

结合(2)式，得

$$0\leqslant 1-x^2+1-y^2<\frac{1}{4},$$

即
$$\frac{7}{4}<x^2+y^2\leqslant 2,$$

故$|\overrightarrow{OA}|$的取值范围是$(\frac{\sqrt7}{2},\sqrt2]$，正确选项为 D.

点评 本题中涉及的点有 5 个，题设中直接提到的向量有 7 个，容易使人产生多而杂乱的感觉，以致于无从下手. 合理建系后，5 个点只涉及 a,b,x,y 4 个字母，这 4 个字母满足 3 个关系式

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=1,\\ x^2+(y-b)^2=1,\\ 0\leqslant(x-a)^2+(y-b)^2<\dfrac{1}{4},\end{cases}$$

而目标是求出$\sqrt{x^2+y^2}$的取值范围. 理清头绪后，难题立破.

（收稿日期：2014-01-12）