习题一解答

1．求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角。

（1）$\dfrac{1}{3+2i}$；　（2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$；　（3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；　（4）$i^8-4i^{21}+i$

解　（1）$\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{1}{13}(3-2i)$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\}=\frac{3}{13},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\}=-\frac{2}{13},$$

$$\overline{\frac{1}{3+2i}}=\frac{1}{13}(3+2i),\quad \left|\frac{1}{3+2i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{3}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{3+2i}\right)=\arg\left(\frac{1}{3+2i}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{-i}{i(-i)}-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\dfrac{1}{2}(-3+3i)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i,$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=\frac{3}{2},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=-\frac{5}{2}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)}=\frac{3}{2}+i\frac{5}{2},\quad \left|\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)=\arg\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\dfrac{(3+4i)(2-5i)(-2i)}{(2i)(-2i)}=\dfrac{(26-7i)(-2i)}{4}$

$$=\frac{-7-26i}{2}=-\frac{7}{2}-13i$$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-\frac{7}{2},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-13,$$

$$\left[\frac{\overline{(3+4i)(2-5i)}}{2i}\right]=-\frac{7}{2}+13i$$

$$\left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right|=\frac{5\sqrt{29}}{2},$$

$$\operatorname{Arg}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]=\arg\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]+2k\pi=2\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi$$

$$=\arctan\frac{26}{7}+(2k-1)\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

(4) $i^8-4i^{21}+i=\left(i^2\right)^4-4\left(i^2\right)^{10}i+i=(-1)^4-4(-1)^{10}i+i$

$=1-4i+i=1-3i$

所以

$$\operatorname{Re}\{i^8-4i^{21}+i\}=1,\operatorname{Im}\{i^8-4i^{21}+i\}=-3$$

$$\left(\overline{i^8-4i^{21}+i}\right)=1+3i,\quad |i^8-4i^{21}+i|=\sqrt{10}$$

$$\operatorname{Arg}\left(i^8-4i^{21}+i\right)=\arg\left(i^8-4i^{21}+i\right)+2k\pi=\arg(1-3i)+2k\pi$$

$$=-\arctan3+2k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2．如果等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立，试求实数 x,y 为何值。

解：由于

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=\frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}$$

$$=\frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34}$$

$$=\frac{1}{34}[5x+3y-4]+i(-3x+5y-18)=1+i$$

比较等式两端的实、虚部，得

$$\begin{cases}5x+3y-4=34\\-3x+5y-18=34\end{cases}\text{或}\begin{cases}5x+3y=38\\-3x+5y=52\end{cases}$$

解得 $x=1,y=11$。

3．证明虚单位 i 有这样的性质：$-i=i^{-1}=\overline{i}$。

4．证明

$$1)\ |z|^2=z\overline{z}$$

$$\vdots$$

$$6)\ \operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(\overline{z}+z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

证明：可设 $z=x+\mathrm{i}y$，然后代入逐项验证。

5．对任何 z， $z^2=|z|^2$ 是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对 z 那些值才成立？

解：设 $z=x+\mathrm{i}y$，则要使 $z^2=|z|^2$ 成立有

$x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=x^2+y^2$，即 $x^2-y^2=x^2+y^2, xy=0$。由此可得 z 为实数。

6．当 $|z|\le 1$ 时，求 $|z^n+a|$ 的最大值，其中 n 为正整数，a 为复数。

解：由于 $\left|z^n+a\right|\le|z|^n+|a|\le 1+|a|$，且当 $z=e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}$ 时，有

$$|z^n+a|=\left|\left(e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}\right)^n+|a|e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=\left|(1+|a|)e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=1+|a|$$

故 $1+|a|$ 为所求。

8．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

（1） i； （2） -1； （3） $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$；

(4) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0\le\varphi\le\pi)$； (5) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$； (6) $\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}$

解：(1) $\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ；

(2) $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

(3) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ；

(4) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\varphi}{2}},(0\le\varphi\le\pi)\ ;$$

(5) $\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

(6) $\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi}\right)^2/\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}10\varphi}/\mathrm{e}^{-\mathrm{i}9\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}$

$$=\cos 19\varphi+\mathrm{i}\sin 19\varphi$$

9．将下列坐标变换公式写成复数的形式：

1）平移公式：$\begin{cases} x=x_1+a_1, \\ y=y_1+b_1; \end{cases}$

2）旋转公式：$\begin{cases} x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, \\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha. \end{cases}$

解：设 $A=a_1+\mathrm{i}b_1$， $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$， $z=x+\mathrm{i}y$，则有

1） $z=z_1+A$ ；2） $z=z_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$。

10．一个复数乘以-i，它的模与辐角有何改变？

解：设复数 $z=|z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z}$，则 $z(-i)=|z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z}\cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=|z|e^{\mathrm{i}\left(\mathrm{Arg}\,z-\frac{\pi}{2}\right)}$，可知复数的模不变，辐角减少 $\frac{\pi}{2}$。

11．证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：
$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= 2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}) \\ &= 2(|z_1|^2+|z_2|^2) \end{aligned}$$

其几何意义平行四边形的对角线长度平方的和等于四个边的平方的和。

12．证明下列各题：

1）任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

2）如果 $R(z)$ 为 1）中的有理分式函数，但具有实系数，那么 $R(\overline{z})=X-\mathrm{i}Y$ ；

3）如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根。

证　1） $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{P(z)\overline{Q(z)}}{Q(z)\overline{Q(z)}}=\dfrac{\mathrm{Re}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}+\dfrac{\mathrm{Im}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}$;

2） $R(\overline{z})=\dfrac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})}=\dfrac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}}=\overline{\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)}=\overline{X+\mathrm{i}Y}=X-\mathrm{i}Y$；

3）事实上

$$P(\overline{z})=a_0\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n$$

$$=\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}=\overline{P(z)}$$

13．如果 $z=e^{it}$，试证明

（1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$；　　　（2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2\mathrm{i}\sin nt$

解　（1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}+e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}+e^{\overline{\mathrm{int}}}=2\sin nt$

（2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}-e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}-\overline{e^{\mathrm{int}}}=2\mathrm{i}\sin nt$

14．求下列各式的值

（1） $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5$；　（2） $(1+\mathrm{i})^6$；　（3） $\sqrt[6]{-1}$；　（4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$

解　（1） $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^5=\left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right]^5=\left(2e^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^5=32e^{-\mathrm{i}5\pi/6}$

$$=32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$$

（2） $(1+\mathrm{i})^6=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^6=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^6=8\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}=-8\mathrm{i}$。

（3） $\sqrt[6]{-1}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+2k\pi}\right)^{\frac{1}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2k+1)/6},k=0,1,2,3,4,5$。可知 $\sqrt[6]{-1}$ 的 6 个值分别是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i},\ \mathrm{e}\mathrm{i}^{\mathrm{i}5\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2},\ e^{\mathrm{i}3\pi/2}=-\mathrm{i},\ e^{\mathrm{i}11\pi/4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}。$$

（4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3}$，　$k=0,1,2$。

可知 $(1-\mathrm{i})^{1/3}$ 的 3 个值分别是

$$\sqrt[6]{2}e^{-\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}7\pi/12}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}5\pi/4}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)。$$

15．若 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，试求 n 的值。

解 由题意即$(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})^n, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/4}$，$\sin\frac{n}{4}\pi=0$，

故$n=4k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

16．（1）求方程$z^3+8=0$的所有根

（2）求微分方程$y'''+8y=0$的一般解。

解 （1）$z=(-8)^{\frac{1}{3}}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}(1+2k)}$，k=0,1,2。

即原方程有如下三个解：

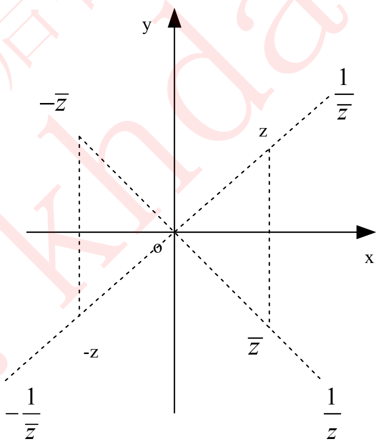
$$1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad -2,\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}。$$

（2）原方程的特征方程$\lambda^3+8=0$有根$\lambda_1=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，故其一般形式为

$$y=C_1e^{-2x}+e^x\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$$

17．在平面上任意选一点z，然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}。$$



18．已知两点z_1与z_2（或已知三点z_1,z_2,z_3）问下列各点位于何处？

（1）$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$

（2）$z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$（其中$\lambda$为实数）；

（3）$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$。

解 令$z_k=x_k+\mathrm{i}y_k, k=1,2,3$，则

（1）$z=\frac{x_1+x_2}{2}+\mathrm{i}\frac{y_1+y_2}{2}$，知点$z$位于$z_1$与$z_2$连线的中点。

（2） $z=x_2-\lambda(x_2-x_1)+\mathrm{i}[y_2-\lambda(y_2-y_1)]$，知点位于 z_1 与 z_2 连线上定比 $\lambda=\dfrac{|z-z_1|}{|z_2-z_1|}$ 处。

（3） $z=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+\dfrac{\mathrm{i}}{3}(y_1+y_2+y_3)$，由几何知识知点 z 位于 $\Delta z_1z_2z_3$ 的重心处。

19．设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0$，

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$。证明z_1，z_2，z_3是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

证　由于 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，知 $\Delta z_1z_2z_3$ 的三个顶点均在单位圆上。

因为

$$
\begin{aligned}
1=|z_3|^2&=z_3\bar{z}_3\\
&=[-(z_1+z_2)][-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)]=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_3\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\
&=2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2
\end{aligned}
$$

所以，$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1$，又

$$
\begin{aligned}
|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)\\
&=2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=3
\end{aligned}
$$

故

$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，同理 $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，知 $\Delta z_1z_2z_3$ 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形。

20．如果复数z_1，z_2，z_3满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义。

由等式得

$$\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)$$

即 $\angle z_2z_1z_3=\angle z_1z_3z_2$。又因为

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{(z_2-z_1)+(z_1-z_3)}{(z_3-z_1)+(z_2-z_3)}=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

又可得 $\angle z_2z_1z_3=\angle z_3z_2z_1$，所以知 $\Delta z_1z_2z_3$ 是正三角形，从而

$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$。

21．指出下列各题中点 z 的存在范围，并作图。

（1） $|z-5|=6$ ；（2） $|z+2\mathrm{i}|\geq 1$ ；

（3） $\mathrm{Re}(z+2)=-1$ ；（4） $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$ ；

（5） $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$ ；（6） $|z+3|+|z+1|=4$

（7） $\mathrm{Im}(z)\leq 2$ ；（8） $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$ ；

（9） $0<\arg z<\pi$ ；（10） $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$

解：（1）以点 $z_0=5$ 为心，半径为 6 的圆周（见下图（a））；

（2）以点 $z_0=-2\mathrm{i}$ 为心，半径为 1 的圆周及外部（见下图（b））；

（3）由于 $\mathrm{Re}(z+2)=-1 \Leftrightarrow x=-3$ 知点 z 的范围是直线 $x=-3$ （见下图（c））；

（4） $\mathrm{i}\bar{z}=\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=y+\mathrm{i}x$ ，故 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3 \Leftrightarrow y=3$. 知点 z 的范围是直线 y=3（见下图（d））；

（5） $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z+\mathrm{i}|^2=|z-\mathrm{i}|^2 \Leftrightarrow (z+\mathrm{i})(\bar{z}-\mathrm{i})=(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i}) \Leftrightarrow$

$|z|^2-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\,\bar{z}+1=|z|^2+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}+1 \Leftrightarrow \mathrm{i}\bar{z}-\mathrm{i}z=0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=0 \Leftrightarrow 2y=0$

$\Rightarrow y=0$. 知点 z 的范围是实轴（见下图（e））；

（6） $|z+3|+|z+1|=4 \Leftrightarrow |z+3|^2=(4-|z+1|)^2 \Leftrightarrow x-2=-2|z+1| \Leftrightarrow (x-2)^2=4|z+1|^2$

$\Leftrightarrow 3^2+12x+4y^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即点 z 的范围是以（-3,0）和（-1,0）为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一椭圆（见下图（f））；

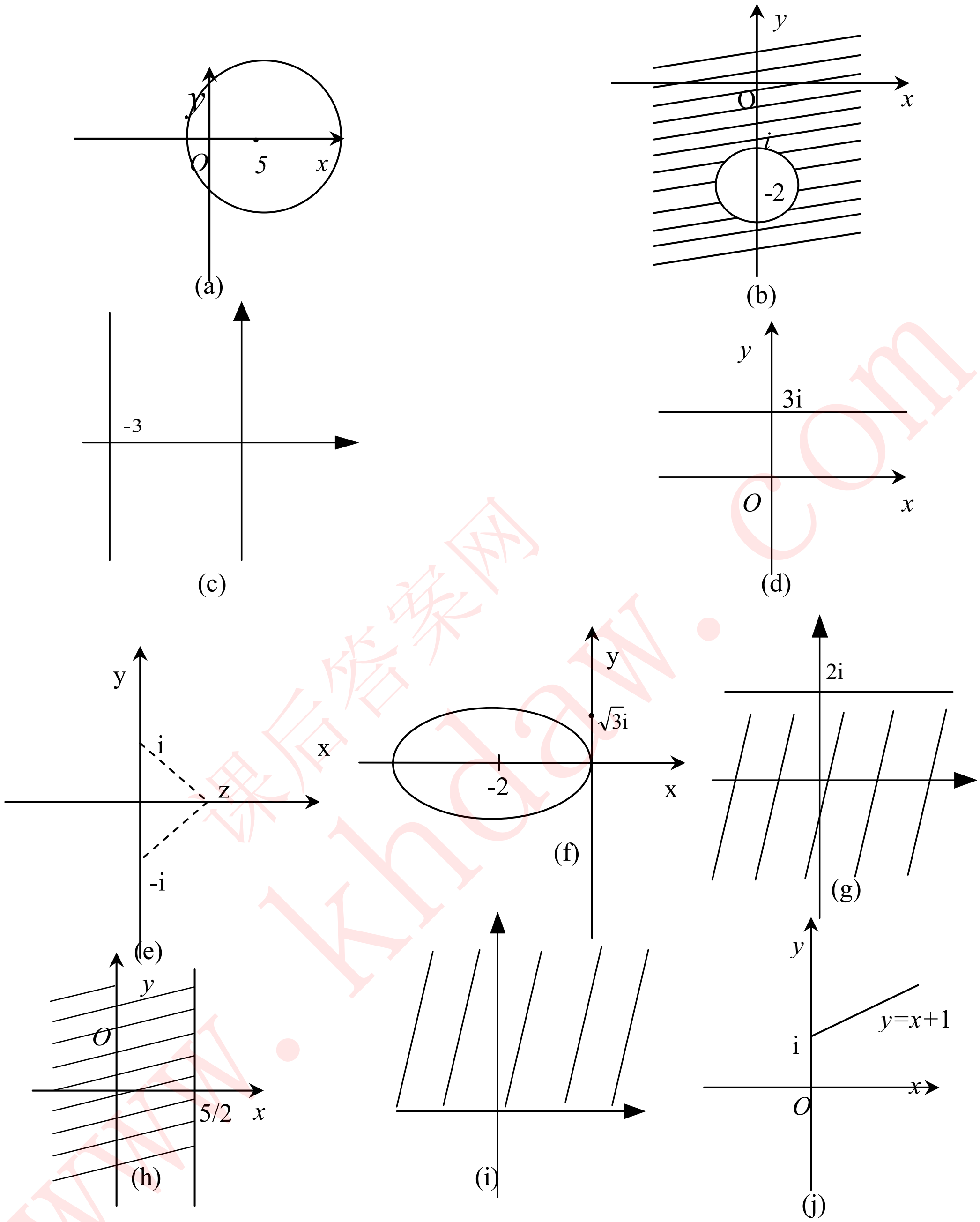
（7） $y\leq 2$，（见下图（g））；

（8） $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1 \Leftrightarrow |z-3|^2\geq|z-2|^2 \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3)\geq(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar{z}+9\geq$

$|z|^2-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow z+\bar{z}\leq 5 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{5}{2}$. 即点 z 的范围是直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 以及 $x=\dfrac{5}{2}$ 为边界的左半平面（见下图（h））；

（9）不包含实轴上半平面（见下图（i））；

（10）以 i 为起点的射线 $y=x+1, x>0$ （见下图（j））；



22．描出下列不等式所确定的区域，并指是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的。

（1） $\operatorname{Im} z > 0$ ；　　（2） $|z-1| > 4$ ；

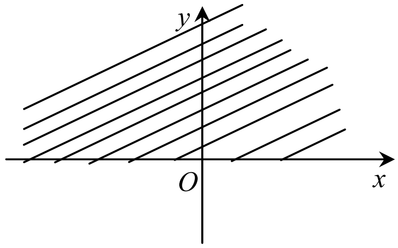
（3） $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ；　　（4） $2 \le |z| \le 3$ ；

（5） $|z-1| < |z+3|$ ；　　（6） $-1 < \arg z < -1+\pi$ ；

（7） $|z-1|<4|z+1|$ ；　　（8） $|z-2|+|z+2|\le 6$ ；

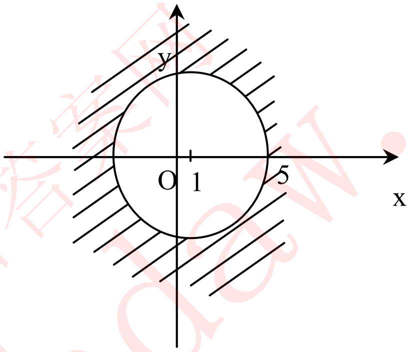
（9） $|z-2|-|z+2|>1$ ；　　（10） $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\le 4$。

解　（1） $\operatorname{Im} z>0$



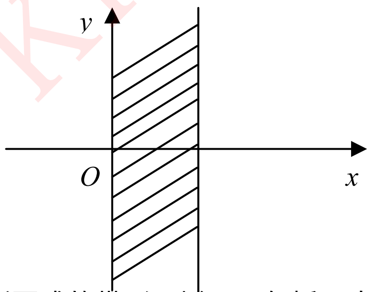
不包含实轴的上半平面，是无界的、开的单连通区域。

（2） $|z-1|>4$



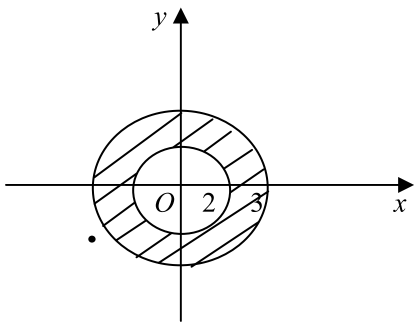
圆 $(z-1)^2+y^2=16$ 的外部（不包括圆周），是无界的、开的多连通区域。

（3） $0<\operatorname{Re} z<1$



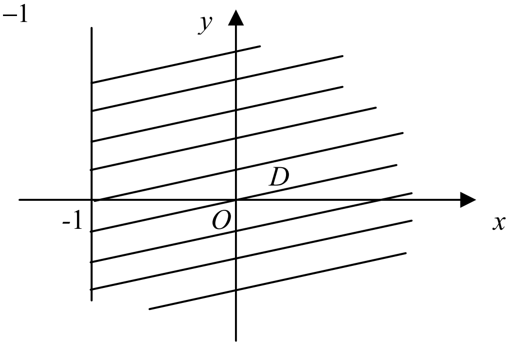
由直线 $x=0$ 与 $x=1$ 所围成的带形区域，不包括两直线在内，是无界的、开的单连通区域。

（4） $2\le|z|\le 3$



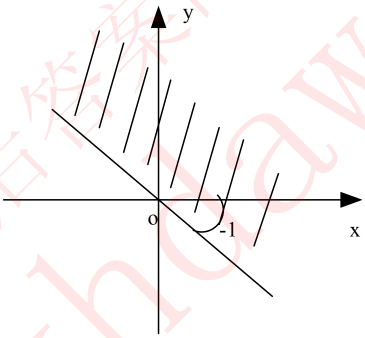
以原点为中心，2 与 3 分别为内、外半径的圆环域，不包括圆周，是有界的、开的多连通区域。

（5） $|z-1|<|z+3| \Leftrightarrow x>-1$



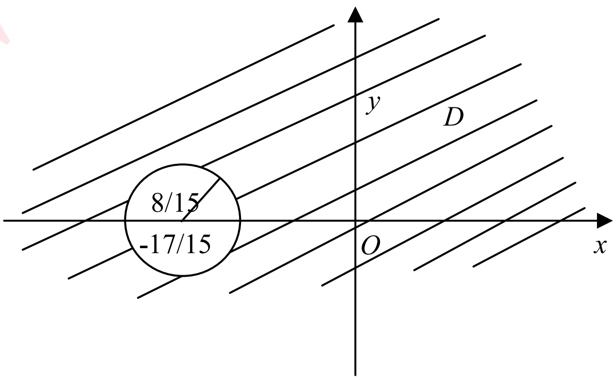
直线 $x=-1$ 右边的平面区域，不包括直线在内，是无界的、开的单连通的区域。

（6） $-1<\arg z<-1+\pi$



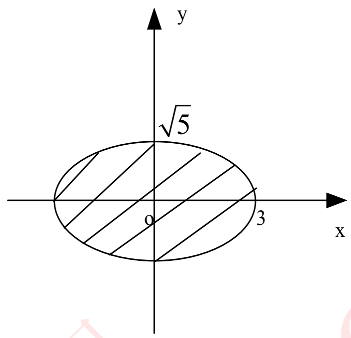
由射线 $\theta=1$ 及 $\theta=1+\pi$ 构成的角形域，不包括两射线在内，即为一半平面，是无界的、开的单连通区域。

（7） $|z-1|<4|z+1| \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{17}{15}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{8}{15}\right)^2$



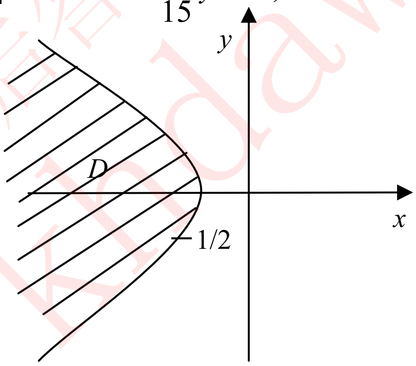
中心在点 $z=-\dfrac{17}{15}$，半径为 $\dfrac{8}{15}$ 的圆周的外部区域（不包括圆周本身在内），是无界的、开的多连通区域。

（8） $|z-2|+|z+2|\leq 6$



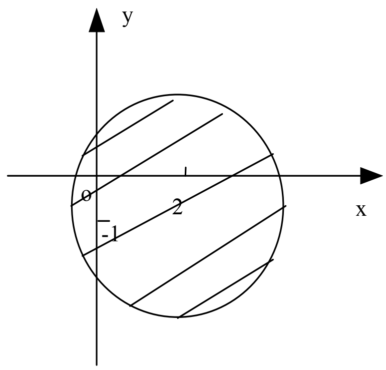
是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 及其围成的区域，是有界的、闭的单连通区域。

（9） $\left|z-2\right|-|z+2|>1 \Leftrightarrow 4x^2-\dfrac{4}{15}y^2>1, x<0$



是双曲线 $4x^2-\dfrac{4}{15}y^2=1$ 的左边分支的内部区域，是无界的、开的单连通区域。

（10） $z\overline{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\overline{z}\leq 4$



是圆$(x-2)^2+(y+1)^2=9$及其内部区域，是有界的、闭的单连通区域。

23．证明：z 平面上的直线方程可以写成

$$a\bar{z}+\bar{a}z=C\quad（a\text{ 是非零复常数，C 是实常数}）$$

证　设直角坐标系的平面方程为$Ax+By=C$将$x=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\operatorname{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$代入，得

$$\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)z+\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)\bar{z}=C$$

令$a=\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}B)$，则$\bar{a}=\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)$，上式即为$a\bar{z}+\bar{a}z=C$。

24．证明复平面上的圆周方程可写成：

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0,(\text{其中}\alpha\text{为复常数，}c\text{为实常数})。$$

证　$(z+a)\overline{(z+a)}=R^2\Leftrightarrow z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-R^2=0$，其中$c=a\bar{a}-R^2$为实常数。

25．求下列方程（t 是实参数）给出的曲线。

（1）　$z=(1+\mathrm{i})t$；　　（2）　$z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$；

（3）　$z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$；　　（4）　$z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$，

（5）　$z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t$　　（6）　$z=ae^{\mathrm{i}t}+be^{-\mathrm{i}t}$

（7）　$z=e^{\alpha t},(\alpha=a+b\mathrm{i}\text{为复数})$

解（1）　$z=x+\mathrm{i}y=(1+\mathrm{i})t\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\end{cases},-\infty<t<\infty$。即直线$y=x$。

（2）　$z=x+\mathrm{i}y=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases},\quad 0<t\le 2\pi$，即为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

（3）　$z=x+\mathrm{i}y=t+\frac{\mathrm{i}}{t}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=\frac{1}{t}\end{cases}$，即为双曲线$xy=1$；

（4）　$z=x+\mathrm{i}y=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t^2\\y=\frac{1}{t^2}\end{cases}$，即为双曲线$xy=1$中位于第一象限中的一支。

(5) $z=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\operatorname{ch}t \\ y=b\operatorname{sh}t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线

(6) $\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$,椭圆

(7) $x^2+y^2=e^{\frac{2a}{b}\arctan\frac{y}{x}}$

26．函数 $w=\frac{1}{z}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线 $(z=x+iy, w=u+iv)$？

(1) $x^2+y^2=6$；　　(2) $y=x$；

(3) $x=1$；　　(4) $(x-1)^2+y^2=1$

解 $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$，$u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=\frac{-y}{x^2+y^2}$，可得

(1) $u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$，是 w 平面上一圆周；

(2) $u=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{-(-y)}{x^2+y^2}=-v$，是 w 平面上一直线；

(3) 由 x = 1，知 $u=\frac{1}{1+y^2}, v=\frac{-y}{1+y^2}$，从而 $u^2+v^2=\frac{1}{1+y^2}=u$

此为 $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 是 w 平面上一圆周；

(4) $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$，于是 $u=\frac{1}{2}$，是 w 平面上一平行与 v 轴的直线。

27．已知映射 $w=z^3$，求

(1) 点 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，$z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在 w 平面上的像。

(2) 区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像。

解 设 $z=re^{i\theta}$，则 $\omega=z^3=r^3e^{i3\theta}$。于是

(1) $z_1=\mathrm{i}=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, z_2=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$$z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

经映射后在 w 平面上的像分别是

$$w_1 = e^{i3\pi/3} = -i,$$

$$w_2 = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + i2,$$

$$w_3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$$

（2）因为以原点为顶点的角形域的顶角张大三倍，所以为 $0 < \arg w < \pi$。

29．设函数$f(z)$在z_0处连续，且 $f(z_0) \neq 0$，证明存在z_0的邻域使 $f(z) \neq 0$。

证　因为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$，且 $f(z_0) \neq 0$。可取 $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$$

从而 $|f(z_0)| - \dfrac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)|$，即 $|f(z)| > \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ 即点 $z \in U(z_0, \delta)$ 时，则 $f(z) \neq 0$。

30．设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的。

证　取 $\varepsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - A| \leq 1$。故在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内，$|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| \leq 1 + |A|$。

31．设 $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right), (z \neq 0)$ 试证当 $z \to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在。

证　$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$，显然。

32．试证 $\arg z(-\pi < \arg z \leq \pi)$ 在负实轴上（包括原点）不连续，除此而外在 z 平面上处处连续。

证　设 $f(z) = \arg z$，因为 $f(0)$无定义，所以 $f(z)$在原点 $z=0$ 处不连续。

当z_0为负实轴上的点时，即 $z_0 = x_0(x_0 < 0)$，有

$$\lim_{z\to z_0} \arg z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to 0^+}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} + \pi\right) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to 0^-}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} - \pi\right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{z\to z_0} \arg z$ 不存在，即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而 argz 在 z 平面上的其它点处的连续性显然。

习题二解答

1．利用导数定义推出：

1)$(z^n)'=nz^{n-1}$,(n是正整数)；　　2) $\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}$。

证　1）$(z^n)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+\cdots\Delta z^{n-1})=nz^{n-1}$

2）$\left(\frac{1}{z}\right)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}}{\Delta z}=-\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{z(z+\Delta z)}=-\frac{1}{z^2}$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1）$f(z)=x^2-\mathrm{i}\,y$　　（2）$f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$

（3）$f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$　　（4）$f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$

解　（1）由于　$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=-1$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}v=x-\mathrm{i}y$ 仅在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（2）由于　$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial y}=9y^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $2x^2=3y^2$,即$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}v=2x^3+3y^3\mathrm{i}$ 仅在直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 上可导，在 z 平面上处处不解析。

（3）由于　$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 $z=0$ 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在 z 平面处处不解析。

（4）由于　$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y$

在 z 平面上处处连续，且在整个复平面 u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$ 在 z 平面处处可导，在 z 平面处处不解析。

3．指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数。

1）$(z-1)^5$；　　（2）$z^3+2\mathrm{i}z$；

3）$\frac{1}{z^2-1}$；　　（4）$\frac{az+b}{cz+d}$(c,d中至少有一个不为0)

解　（1）由于 $f'(z)=5(z-1)^4$，故 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

（2）由于 $f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$，知 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

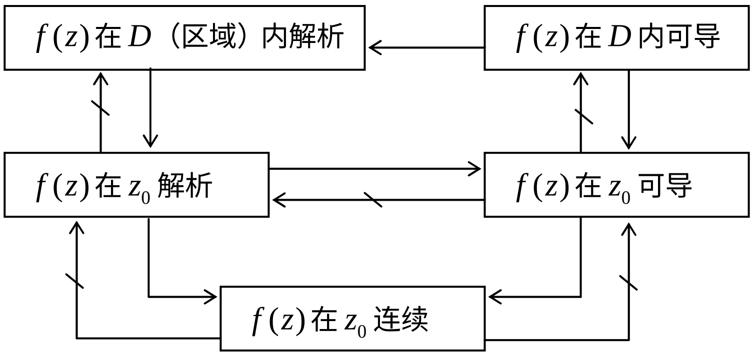
（3）由于 $f'(z)=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}=-\frac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$

知 $f(z)$ 在除去点 $z=\pm1$ 外的 z 平面上处处可导。处处解析，$z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

（4）由于 $f'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，知 $f(z)$ 在除去 $z=-d/c(c\neq 0)$ 外在复平面上处处解析。

5．复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有那些方法？

答：



判定函数解析主要有两种方法：1）利用解析的定义：要判断一个复变函数在 z_0 是否解析，只要判定它在 z_0 及其邻域内是否可导；要判断该函数在区域 D 内是否解析，只要判定它在 D 内是否可导；2）利用解析的充要条件，即本章 § 2 中的定理二。

6．判断下述命题的真假，并举例说明。

（1）如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

（2）如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

（3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

（4）如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点。

（5）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导（指偏导数存在），那么 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可导。

（6）设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域内是解析的。如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；

解

（1）命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 在 z 平面上处处连续，除了点 z=0 外处处不可导。

（2）命题假，如函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 z=0 处可导，却在点 z=0 处不解析。

（3）命题假，如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。如上例。

（4）命题假，如 $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y, g(z)=\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh} y$，$z=(\pi/2,0)$ 为它们的奇点，但不是 $f(z)+g(z)$ 的奇点。

（5）命题假。如函数 $f(z)=z\operatorname{Re} z=x^2+\mathrm{i}xy$ 仅在点 z=0 处满足 C-R 条件，故 $f(z)$ 仅在点 z=0 处可导。

（6）命题真。由 u 是实常数，根据 C-R 方程知 v 也是实常数，故 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；后面同理可得。

7．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，于是

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}，\quad \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}，$$

从而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2uv\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)|f'(z)|^2=|f'(z)|^2$$

9．证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}，\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用复合函数求导法则和 u,v 满足 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

即 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$。又

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总之，有 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$。

10．证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

(1)　$f(z)$ 恒取实值。

(2)　$\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

(3)　$|f(z)|$ 在 D 内是一个常数。

(4)　$\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数。

(5)　$au+bv=c$，其中 a、b 与 c 为不全为零的实常数。

解 （1）若 $f(z)$ 恒取实值，则 $v=0$，又根据 $f(z)$ 在区域 D 内解析，知 C-R 条件成立，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

故 u 在区域 D 内为一常数，记 $u=C$(实常数)，则 $f(z)=u+iv=C$ 为一常数。

（2）若 $\overline{f(z)}=\overline{u+iv}=u-iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

又 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

结合（1)、(2）两式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0,$$

故 u,v 在 D 内均为常数，分别记之为

$$u_1=C_1,u_2=C_2(C_1,C_2\text{为实常数}),$$

则

$$f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$$

为一复常数。

（3）若 $|f(z)|$ 在 D 内为一常数，记为 C_1，则 $u^2+v^2=C_1^2$，两边分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，满足 C-R 条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式又可写得

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$。同理，可解得 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{vy}=0$ 故 u,v 均为常数，分别记为 $u=C_1,v=C_2$，则 $f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$ 为一复常数。

（4）若 $\arg z$ 在 D 内是一个常数 C_1，则 $f(z)\neq 0$，从而 $f(z)=u+iv\neq 0$，且

$$\arg f(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{v}{u}, & u>0\\ \arctan\dfrac{v}{u}+\pi, & u<0,v>0\\ \arctan\dfrac{v}{u}-\pi, & u<0,v<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}C_1 & u>1\\ C_1+\pi & u<0,v>0\\ C_1-\pi & u<0,v<0\end{cases}$$

总之对 $\arg f(z)$ 分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2}=0$$

化简上式并利用 $f(z)$ 解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 u 和 v 均为实常数，分别记为 C_2 和 C_3，从而 $f(z)=u+iv=C_2+iC_3=C$ 为一复常数。

（5）若 $au+bv=c$，其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，这里 a 和 b 不全为 0，即 $a^2+b^2\neq 0$，否则此时 a、b 和 c 全为零。对方程 $au+bv=c$ 分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

再利用解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实、虚部 u 和 v 满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，知函数 $f(z)$ 为一常数。

11.下列关系是否正确？

（1） $\overline{e^z}=e^{\bar z}$；　　（2） $\overline{\cos z}=\cos\bar z$；　　（3） $\overline{\sin z}=\sin\bar z$

解（1） $e^{\bar z}=e^x\overline{(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}$

（2） $\overline{\cos z}=\overline{\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}+\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\bar z}+e^{\mathrm{i}\bar z}\right)=\cos\bar z$。

（3） $\overline{\sin z}=\overline{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)}=\frac{1}{\overline{2\mathrm{i}}}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}-\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{-2\mathrm{i}}(e^{-\mathrm{i}\bar z}-e^{\mathrm{i}\bar z})$

$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\bar z}-e^{-\mathrm{i}\bar z}\right)=\sin\bar z$。

12．找出下列方程的全部解。

（3） $1+e^z=0$；　　（4） $\sin z+\cos z=0$；

解（3）原方程等价于 $e^z=-1$，于是它的解为：

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+\mathrm{i}[\arg(-1)+2k\pi]=\mathrm{i}\pi(1+2k)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（4）由于 $\sin z=-\cos z$, $\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$，故

$$e^{2\mathrm{i}z}-1=-\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}z}+1\right)$$

$$e^{2\mathrm{i}z}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

13．证明：

（1） $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2$；

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=1$；（3） $\sin 2z=2\sin z\cos z$；（4） $\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$；

（5） $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$， $\cos(z+\pi)=-\cos z$；

（6） $|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y, |\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$

证　（1）左 $=\cos(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}+e^{-\mathrm{i}z_2}}{2}-\frac{e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{4}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2}$$

可见左=右，即 $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

左 $=\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$

右 $=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]+\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-2e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

可见左=右，即 $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

（2） $\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2+\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)=1$$

（3）左$=\sin 2z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$

右$=2\sin z\cos z=2\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)\dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}+1-1-e^{-\mathrm{i}2z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$$

可见左=右，即 $\sin 2z=2\cos z\sin z$。

（4） $\tan 2z=\dfrac{\sin 2z}{\cos 2z}=\dfrac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=2\dfrac{\sin z}{\cos z}\Bigg/\left[1-\left(\dfrac{\sin z}{\cos z}\right)^2\right]=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$

（5）由（1）知

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(-z)\right]=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-z)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)$$

$$=\cos(-z)=\frac{1}{2}\left(e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$=\cos z$$

由（1）得 $\cos(z+\pi)=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z$

（6）左$=|\cos z|^2=|\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\cos^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$

左$=|\sin z|^2=|\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\sin^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y。$$

14．说明：1）当 $y\to\infty$ 时，$|\sin(x+\mathrm{i}y)|$ 和 $|\cos(x+\mathrm{i}y)|$ 趋于无穷大；

2）当 t 为复数时，$|\sin t|\le 1$ 和 $|\cos t|\le 1$ 不成立。

解 1）$|\sin z|=\left|\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\mathrm{i}}\right|\ge\dfrac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$；$|\cos z|$ 同理。

2）设 $t=\mathrm{i}y, y\in R$，则 $|\sin t|=\dfrac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$，则当 $y\to\infty$ 时显然题设不成立。

15．求 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})$，$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$ 和它们的主值。

解 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\mathrm{Ln}|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)=\mathrm{i}\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$$=\mathrm{i}\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-\mathrm{i})=\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$$

$$=\ln 5+\mathrm{i}\left[\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]$$

$$=\ln 5-\mathrm{i}\left[\left(\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right)\right], k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)。$$

16．证明对数的下列性质：1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\ln(|z_1z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\ln z_1+\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；

2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\ln(|z_1/z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1/z_2=\ln z_1-\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$。

17．说明下列等式是否正确：1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\,\mathrm{Ln}\,z$ ；2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z$。

解：两式均不正确。1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(2z)$，而$2\,\mathrm{Ln}\,z=2\ln|z|+2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$ ；

2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\sqrt{z})$，而$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Arg}(z)$。

18．求$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)$，$3^{\mathrm{i}}$和$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的值。

解：

$$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=ee^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=e\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}e$$

$$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i})$$

$$3^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,3}=e^{\mathrm{i}[\ln 3+\mathrm{i}(\arg 3+2k\pi)]}=e^{-2k\pi}e^{\mathrm{i}\ln 3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=e^{\mathrm{i}[\ln|1+\mathrm{i}|]+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)}$$

$$=e^{\mathrm{i}\frac{\ln 2}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}=e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

19．证明$(z^a)'=az^{a-1}$，其中a为实数。

证明 $(z^a)'=(e^{a\ln z+2k\pi i})'=a(\ln z)'e^{a\ln z+2k\pi i}=a\frac{1}{z}z^a=az^{a-1}$。

20．证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$ ；2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=\mathrm{ch}\,2z$ ；

3） $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$ ；$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$。

证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2-(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2=1$ ；

2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2+(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=1$ ；

3） $$\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2=\frac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{4}+\frac{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}}{2}$$

$$=\mathrm{sh}(z_1+z_2)。$$

21．解下列方程：1） $\operatorname{sh} z=0$ ；2） $\operatorname{ch} z=0$ ；3） $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 。

解 1）由 $\operatorname{sh} z=0$ 得 $e^{2z}=1$， $z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}1=\mathrm{i}k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

2）由 $\operatorname{ch} z=0$ 得 $e^{2z}=-1$， $z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)=\frac{(2k+1)}{2}\mathrm{i}\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

3）由 $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 得 $e^{z}=\mathrm{i}$， $z=\operatorname{Ln}\mathrm{i}=\mathrm{i}(2k+\frac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

23．证明: $\operatorname{sh} z$ 的反函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

证 设 $\operatorname{sh} w=z$，即 $\frac{e^{w}-e^{-w}}{2}=z\Rightarrow e^{2w}-2ze^{w}-1=0$ 解得 $e^{w}=z+\sqrt{z^2+1}$,

故 $w=\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$。

24．已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为

（1） $(z+\mathrm{i})^2$ ；　（2） z^3 ；　(3) $\frac{1}{z^2+1}$ ；

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解（1） $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{2(z+\mathrm{i})}=2(\bar{z}-\mathrm{i})$ 为流速，又

$$f(z)=(z+\mathrm{i})^2=[x+\mathrm{i}(y+1)]^2=x^2-(y+1)^2+\mathrm{i}\,2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为 $x(y+1)=C_1$ 和 $x^2-(y+1)^2=C_2$。

（2）流速 $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{3z^2}=3\bar{z}^2$，又 $f(z)=z^3=x(x^2-3y^2)+\mathrm{i}\,y(3x^2-y^2)$,

流线方程：$(3x^2-y^2)y=C_1$，　等势线方程：$x(x^2-3y^2)=C_2$。

（3）流速　$V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'}=\overline{\left(\frac{-2z}{z^2+1}\right)'}=\frac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$

又 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{x^2-y^2+1+\mathrm{i}\,2xy}=\frac{x^2-y^2+1-\mathrm{i}\,2xy}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$，

流线方程为 $$\frac{xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=C_1,$$

等势线方程为 $$\frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=C_2。$$

习题三解答

1.沿下列路线计算积分 $\int_0^{3+i} z^2 dz$。

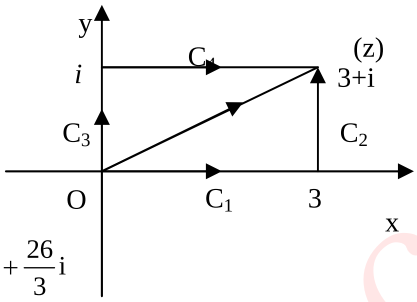
（1）自原点到 $3+\mathrm{i}$ 的直线段

（2）自原点沿实轴至 3，再由 3 沿垂直向上至 $3+\mathrm{i}$；

（3）自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向右至 $3+\mathrm{i}$。

解（1）$\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$，故 $z=3t+\mathrm{i}t$，$0 \le t \le 1$。$dz=(3+\mathrm{i})dt$

于是



$$\int_0^{3+1} z^2 dz = \int_0^1 (3t+\mathrm{i}t)^2 (3+\mathrm{i})dt$$

$$=(3+\mathrm{i})^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

（2）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz + \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$。$C_1$ 之参数方程为 $\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$；C_2 之参数方程为

$$\begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0 \le t \le 1)$$

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+\mathrm{i}t)^2 \cdot \mathrm{i}\, dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}。$$

（3）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{\mathrm{i}} z^2 dt + \int_{\mathrm{i}}^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz$。

$C_3: z=\mathrm{i}t(0 \le t \le 1)$；$C_4: z=3t+\mathrm{i} \quad (0 \le t \le 1)$，

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot \mathrm{i}\, dt + \int_0^1 (3t+\mathrm{i})^2 \cdot 3dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

2．分别沿 $y=x$ 与 $y=x^2$ 算出、积分 $\int_0^{1+i} (x^2+\mathrm{i}\,y)dz$ 的值。

解（1）沿 $y=x$。此时 $z=t+\mathrm{i}t(0 \le t \le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i})dt$，于是

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} (x^2+\mathrm{i}\,y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t)(1+\mathrm{i})dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t)dt = (1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}。$$

（2）沿 $y=x^2$，此时 $z=t+\mathrm{i}t^2(0 \le t \le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i}\,2t)dt$，故

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} (x^2+\mathrm{i}\,y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t^2)(1+\mathrm{i}\,2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 t^2(1+\mathrm{i}\,2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}\,2t^3)dt$$

$$=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}。$$

3．设 $f(z)$ 在单连域 D 内解析，C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解　未必成立。令 $f(z)=z$，$C:|z|=1$，则 $f(z)$ 在全平面上解析，但是

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\right]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta=\pi\,\mathrm{i}\neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left[e^{i\theta}\right]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta=-\pi\neq 0$$

4．利用单位圆上 $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ 的性质，及柯西积分公式说明 $\oint_C \bar{z}dz=2\pi\mathrm{i}$，其中 C 为正向单位圆周 $|z|=1$。

解 $\oint_C \bar{z}dz=\oint_C \dfrac{1}{z}dz=2\pi\mathrm{i}$，（利用柯西积分公式）

5．计算积分 $\oint_C \dfrac{\bar{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周：(1) $|z|=2$；(2) $|z|=4$

解 （1）因在 $|z|=2$ 上有 $|z|=2$，$z\cdot\bar{z}=|z|^2=4$，从而有 $\bar{z}=\dfrac{4}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{4}{z}}{2}dz=\oint_{|z|=2}\frac{2}{z}dz=4\pi\,\mathrm{i}$$

（2）因在 C 上有 $|z|=4$，$z\cdot\bar{z}=|z|^2=16$，从而有 $\bar{z}=\dfrac{16}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|}dz=\oint_{|z|=4}\frac{\frac{16}{z}}{4}dz=\oint_{|z|=4}\frac{4}{z}dz=8\pi\,\mathrm{i}$$

6．利用观察法得出下列积分的值。

解 利用柯西－古萨基本定理和柯西积分公式。

7．沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz$，$C:|z-2|=1$　（2）$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}$，$C:|z-a|=a$

（3）$\oint_C \dfrac{e^{iz}dz}{z^2+1}$，$C:|z-2\mathrm{i}|=3/2$　（4）$\oint_C \dfrac{zdz}{z-3}$，$C:|z|=2$

（5）$\oint_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$，$C:|z|=r<1$　（6）$\oint_C z^3\cos zdz$，C为包围z=0的闭曲线

（7）$\oint_C \dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$，$C:|z|=3/2$　（8）$\oint_C \dfrac{\sin zdz}{z}$，$C:|z|=1$

（9）$\oint_C \dfrac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$，$C:|z|=2$　（10）$\oint_C \dfrac{e^z dz}{z^5}$，$C:|z|=1$

解 （1）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz=2\pi\,\mathrm{i}\,e^z\big|_{z=2}=2\pi e^2\,\mathrm{i}$

（2）　解 1：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}=\oint_C \dfrac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz=2\pi\,\mathrm{i}\dfrac{1}{z+a}\Big|_{z=a}=\dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$，

解 2：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\left[\oint_C \dfrac{1}{z-a}dz-\oint_C \dfrac{1}{z+a}dz\right]=\dfrac{1}{2a}[2\pi\,\mathrm{i}-0]=\dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$

（3）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \dfrac{e^{iz}dz}{z^2+1}=\oint_C \dfrac{e^{iz}dz/(z+\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}\dfrac{e^{iz}}{z+\mathrm{i}}\Big|_{z=\mathrm{i}}=\pi/e$

（4）（5）（6）由柯西基本定理知：其结果均为 0

（7）因被积函数的奇点 $z=\pm\mathrm{i}$ 在 C 的内部，$z=\pm2\mathrm{i}$ 在 C 的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z-\mathrm{i}}dz+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z+\mathrm{i}}dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}\bigg|_{z=\mathrm{i}}+2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2+4)}\bigg|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$$

（8）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C\frac{\sin zdz}{z}=2\pi\mathrm{i}\sin z\,|_{z=0}=0$

（9）由高阶求导公式，$\oint_C\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=2\pi\mathrm{i}(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

（10）由高阶求导公式，$\oint_C\frac{e^z dz}{z^5}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}(e^z)^{(4)}\,|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}$

8．计算下列各题：

1) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz$；　2) $\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\operatorname{ch}3zdz$；　3) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 zdz$；　4) $\int_0^1 z\sin zdz$；

5) $\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz$；　6) $\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$(沿1到i的直线段)。

解　1) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz=\frac{e^{2z}}{2}\bigg|_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}=0$　　2) $\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\operatorname{ch}3zdz=\frac{1}{3}\operatorname{sh}3z\,|_{\pi\mathrm{i}/6}^{0}=-\mathrm{i}/3$

3) $\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 zdz=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\frac{1-\cos2z}{2}dz=(\frac{z}{2}-\frac{\sin2z}{4})\,|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}=(\pi-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\pi)\mathrm{i}$

4) $\int_0^1 z\sin zdz=(\sin z-z\cos z)\,|_0^1=\sin1-\cos1$

5) $\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz=(\mathrm{i}-1-z)e^{-z}\,|_0^{\mathrm{i}}=1-\cos1+\mathrm{i}(\sin1-1)$

6) $\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz=(\tan z+\tan^2 z/2)\,|_1^{\mathrm{i}}=-(\tan1+\frac{1}{2}\tan^2 1+\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1)+\mathrm{i}\operatorname{th}1$

9．计算下列积分：

1) $\oint_C(\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2\mathrm{i}})dz$,其中$C:|z|=4$为正向

2) $\oint_C\frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}dz$,其中$C:|z-1|=6$为正向

3) $\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$,其中$C_1:|z|=2$为正向，$C_2:|z|=3$为负向

4） $\oint_C \frac{dz}{z-i}$,其中C为以$\pm\frac{1}{2},\pm\frac{6}{5}$i为顶点的正向菱形

5） $\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$,其中$a$为$|a|\neq 1$的任何复数，$C:|z|=1$为正向

解　1） $\oint_C (\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2i})dz = 2\pi i(4+3)=14\pi i$

2） $\oint_C \frac{2i}{z^2+1}dz = \oint_{|z-i|=1}\frac{2i/(z+i)}{z-i}dz + \oint_{|z+i|=1}\frac{2i/(z-i)}{z+i}dz = 0$

3） $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3}dz = \oint_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}dz - \oint_{C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''|_{z=0} - \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''|_{z=0} = 0$

4） $\oint_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$

5）　当$|a|>1$时，$1/(z-a)^3$在$|z|\le 1$上解析，故$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz = 0$；

当$|a|<1$时，$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(e^z)''|_{z=a} = \pi i e^a$

10．证明：当C为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

证明　　当原点在曲线C内部时，$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 2\pi i(1)'|_{z=0} = 0$；当原点在曲线$C$外部时，$1/z^2$在$C$内解析，故$\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

11．下列两个积分的值是否相等？积分 2）的值能否利用闭路变形原理从 1）的值得到？为什么？

1） $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}dz$；　　　2） $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}dz$

解　$\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi} 2ie^{-i\theta}d\theta = 0$；$\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi} 4ie^{-i\theta}d\theta = 0$，故两个积分的值相等。但不能利用闭路变形原理从 1）的值得到，因$\frac{\bar{z}}{z}$不是一个解析函数。

12．设区域D为右半平面，z为D内圆周$|z|=1$上的任意一点，用在D内的任意一条曲线C连结原点与z，证明$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right] = \frac{\pi}{4}$.

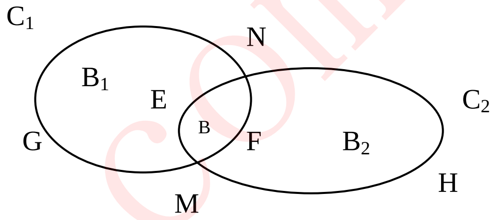
证明　　函数$\frac{1}{1+\zeta^2}$在右半平面解析，故在计算从 0 到z沿任意一条曲线C的积分时与积分路径无关。则$\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\theta \frac{ie^{i\eta}}{1+e^{2i\eta}}d\eta = \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{2i\cos\eta}{2+2\cos 2\eta}d\eta$.（分子分母同乘以$1+e^{-2i\eta}$），

故 $\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta\right] = \frac{\pi}{4}$.

13．设 C_1 与 C_2 为相交于 M、N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2。B_1 与 B_2 的公共部分为 B。如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析，在 C_1、C_2 上也解析，证明：$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$。

证明　在 B_1-B 上 $f(z)$ 为解析函数，则由柯西基本定理 $\oint_{MENGM} f(z)dz = 0$；同理 $\oint_{MHNFM} f(z)dz = 0$

则 $\int_{NGM} f(z)dz + \int_{MEN} f(z)dz = \int_{MHN} f(z)dz + \int_{NFM} f(z)dz$，即 $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$。



14．设 C 为不经过 a 与-a 的正向简单闭曲线，a 为不等于零的任何复数，试就 a 与-a 同 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-a^2} dz$。

解　(i) 当 a 在 C 的内部而-a 在 C 的外部时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2} dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z+a}}{z-a} dz = 2\pi\mathrm{i} \frac{z}{z+a}\bigg|_{z=a} = \pi\mathrm{i}。$$

(ii) 当 $-a$ 在 C 的内部而 a 在 C 的外部时，

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2} dz = \oint_c \frac{\frac{z}{z-a}}{z+a} dz = 2\pi\mathrm{i} \frac{z}{z-a}\bigg|_{z=-a} = \pi\mathrm{i}$$

(iii) 当 a 与 $-a$ 在 C 的内部时，设 C_1, C_2 分别为以 $a, -a$ 为心半径充分小的圆周使 C_1, C_2 均在 C 的内部且互不相交也互不包含，则由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式得

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2} dz = \oint_{c_1} \frac{\frac{z}{z+a}}{z-a} dz + \oint_{c_2} \frac{\frac{z}{z-a}}{z+a} dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

(iv) 当 a 与 $-a$ 都在 C 的外部时，由 Cauchy-Goursat 定理得

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2} dz = 0。$$

15．设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也互不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z-z_0} + \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z-z_0}\right] = \begin{cases} z_0^2, & \text{当} z_0 \text{在} C_1 \text{内时}, \\ \sin z_0, & \text{当} z_0 \text{在} C_2 \text{内时}. \end{cases}$$

证明　利用 Cauchy 积分公式，当 z_0 在 C_1 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z-z_0} = z^2|_{z=z_0} = z_0^2$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z-z_0} = 0$；

当 z_0 在 C_2 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z-z_0} = 0$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z-z_0} = \sin z|_{z=z_0} = \sin z_0$。故结论成立。

16．设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C: |z|=r$，$0<r<1$ 的积分为零，问 $f(z)$ 是否需在 z=0 处解析？试举例说明之。

解　不一定。如令 $f(z) = \frac{1}{z^2}$，则其在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C: |z|=r$，$0<r<1$ 的积分

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

但显然 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 z=0 处不解析。

17.设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线，它的内部全属于 D。如果 $f(z)=g(z)$在 C 上所有点都成立，试证在 C 的内部所有点处 $f(z)=g(z)$也成立。

证　因 $f(z),g(z)$在 D 内处处解析故在 C 上及其内部也处处解析，设 z_0 为 C 的内部的任一点，则由 Cauchy 积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz,\qquad g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz，$$

又因在 C 上 $f(z)=g(z)$，故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz，$$

从而 $f(z_0)=g(z_0)$, 由 z_0 的任意性，在 C 的内部均有 $f(z)=g(z)$。

18．设区域 D 是圆环域， $f(z)$ 在 D 内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1与K_2， K_2包含K_1，z_0 为 K_1, K_2 之间任一点，试证（3.5.1）仍成立，但C要换成$K_1^- + K_2$(见图).

证明　　参照 78 页闭路变形定理的证明方法。

19.设 $f(z)$在 单连通区域 D 内解析,且不为零,C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线,问积分 $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 是否为零？为什么？

解　等于零。因 $f(z)$在 D 内解析，故 $f(z)$具有各阶导数且仍为解析函数，从而 $f'(z)$在 D 内也解析，又因在 D 内 $f(z)\neq 0$，故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内解析，从而在 C 上及 C 的内部也解析，于是由 Cauchy-Goursat 定理，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0。$$

20．试说明柯西－古萨基本定理中的 C 为什么可以不是简单闭曲线？

21．设 $f(z)$ 在区域 D 内解析， C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在 D 内但不在 C 上的任意一点 z_0，等式：$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ 成立。

证明　　利用 Cauchy 积分公式，有 $\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$；而由高阶导数公式 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi i f'(z_0)$，故所证等式成立。

22.如果 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，且适合拉普拉斯方程，而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$ 那么 $s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数。

证明　　由 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 都具有二阶连续偏导数，而 $s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$ 知，s,t 具有一阶连续的偏导数，在证 s,t 满足 C－R 方程即可。注意 $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$，$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$，则

$s_x=\varphi_{yx}-\psi_{xx}=\varphi_{xy}+\psi_{yy}=t_y$；$s_y=\varphi_{yy}-\psi_{xy}=-\varphi_{xx}-\psi_{yx}=-t_x$，故 s,t 满足 C－R 方程，即

$s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数。

23．设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$，问 f 是不是 D 内的解析函数？为什么？

解　f 是 D 内的解析函数。因 u 为区域 D 内的调和函数，故 u_x 和 $-u_y$ 在 D 内有一阶连续的偏导数。

又 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y$；$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$，即满足 C－R 方程。

24．函数 $v=x+y$ 是 $u=x+y$ 的共轭调和函数吗？为什么？

解　不是。因 $u+\mathrm{i}v$ 不能构成一解析函数。

25．设 u 和 v 都是调和函数，如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 u 也是 v 的共轭调和函数。这句话对吗？为什么？

解　不对。参考 27 题的第二问。

26．证明：一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

证明　设 v 是 u 的共轭调和函数，则 $u_{xx}+u_{yy}=0$，$v_{xx}+v_{yy}=0$，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$。又 $(uv)_{xx}=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}$，$(uv)_{yy}=u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$，故 $(uv)_{xx}+(uv)_{yy}=0$，即一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

27．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，试证：

1）$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数；　2）$-u$ 是 v 的共轭调和函数；

3）$\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$。

证明　1）$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=v-\mathrm{i}u$，而 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，故 u,v 满足 C－R 方程，进而 $v_x=(-u)_y$，$v_y=-(-u)_x$。故 $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数。

2）由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=v-\mathrm{i}u$。故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

3）
$$\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)$$
$$=2u_x^2+2v_x^2+2u_y^2+2v_y^2+2u(u_{xx}+u_{yy})+2v(v_{xx}+v_{yy})$$
$$=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$$

28．证明：$u=x^2-y^2$ 和 $v=\frac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但是 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数。

证明　$u_x=2x$，$u_y=-2y$，$v_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

$$v_{xx}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},\quad v_{yy}=\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{6y}{(x^2+y^2)^2}$$，则

$$u_{xx}+u_{yy}=2+(-2)=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}+\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{8y}{(x^2+y^2)^2}=0。$$

29．求具有下列形式的所有调和函数 u：1）$u=f(ax+by), a与b为常数$；2）$u=f\left(\frac{y}{x}\right)$。

解 1）由 $u_x=af', u_{xx}=a^2f'', u_{yy}=b^2f''$，而 $u_{xx}+u_{yy}=0$，则 $f''=0$，即 $f=c_1(ax+by)+c_2$。

2）由 $u_x=-\frac{y}{x^2}f', u_{xx}=2\frac{y}{x^3}f'+\frac{y^2}{x^4}f'', u_y=\frac{1}{x}f', u_{yy}=\frac{1}{x^2}f''$，而 $u_{xx}+u_{yy}=0$，则

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)f''+2\frac{y}{x}f'=0, 即 f=c_1\arctan\frac{y}{x}+c_2。$$

30．由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$：

1）$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；　　2）$v=\frac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$；

3）$u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$；　　4）$v=\arctan\frac{y}{x}, x>0$。

解 1）$u_x=3x^2+6xy-3y^2, u_y=3x^2-6xy-3y^2$，则

$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=3x^2+6xy-3y^2-\mathrm{i}(3x^2-6xy-3y^2)=3(1-i)z^2$，故

$f(z)=(1-i)z^3+\mathrm{i}c, c\in\mathbb{R}$；

2）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\mathrm{i}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-2\mathrm{i}xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2}=\frac{1}{z^2}$，故

$f(z)=-\frac{1}{z}+c, 又 f(2)=0，则 f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$；

3）$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2y-2\mathrm{i}(x-1)=-2\mathrm{i}(x-1+\mathrm{i}y)=-2\mathrm{i}(z-1)$，故

$f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2+c, 又 f(2)=-\mathrm{i}，则 f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2$；

4）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{1}{z}$，故 $f(z)=\ln z+c, c\in\mathbb{R}$。

31．设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$。

解 $v_{xx}+v_{yy}=e^{px}\sin y(p^2-1)=0$，知 $p=\pm1$。当 $p=1$ 时，$f(z)=e^z+c, c\in\mathbb{R}$；当 $p=-1$ 时，$f(z)=-e^{-z}+c, c\in\mathbb{R}$。

32．如果 $u(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部完全含于 D。试证：

1）$u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆周 C 上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)d\varphi；$$

2）$u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的值等于 $u(x,y)$ 在圆域 $|z-z_0|\le r_0$ 上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr。$$

证明　1）由平均值公式（P86）

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})d\theta$$

只取其实部有： $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)d\varphi$ ；

2）由 1）知 $\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi u(x_0,y_0)rdr=u(x_0,y_0)$。

33．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z|=R$，它的内部完全含于 D。设 z 为 C 内一点，并令 $\tilde{z}=R^2/\overline{z}$，试证

$$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0。$$

证明　因 z 为 C 内一点，$|\tilde{z}|=|R^2/\overline{z}|=R^2/|z|=\frac{R}{|z|}R>R$，故 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}$ 在 C 及其内部解析。由 Cauchy 基本定理知：$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$。

34．根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}\right]f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}d\zeta，$$

其中 C 为 $|z|=R|$.

证明　由柯西积分公式有：$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$；而由 33 题结果知 $\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$，故将这两式相减即得。

35 如果令 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{\mathrm{R}^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

并由 34 题的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

取其实部，得

$$u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

这个积分称为泊松（Poisson）积分。通过这个公式，一个调和函数在一个圆内得值可用它在圆周上的值来表示。

证明　$\frac{R^2}{\zeta}=R\frac{R}{\zeta}=R\cdot e^{-\mathrm{i}\theta}=\overline{\zeta}$，故 $\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\frac{R^2}{\zeta}-\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}$.又

$\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{R\cdot e^{i\theta}}=id\theta$，$(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})=R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2$，故

$$\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}。$$

又由 34 题知 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_C\dfrac{(R^2-z\bar{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\bar{z})}d\zeta=\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_C\dfrac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$。

36．设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析，且不恒为常数，n 为正整数.

1）试用柯西积分公式证明：

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_C\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta.$$

2）设 M 为 $|f(\zeta)|$ 在 C 上的最大值，L 为 C 的长，d 为 z 到 C 的最短距离，试用积分估值公式（3.1.10）于 1）中的等式，证明不等式：

$$|f(z)|\le M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}.$$

3）令 $n\to+\infty$，对 2）中的不等式取极限，证明：$|f(z)|\le M$。这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得（最大模原理）。

证明　1）在柯西积分公式中将里面的函数 $f(z)$ 换成 $[f(z)]^n$ 即得。

2）由 1）知 $|f(z)|^n=|[f(z)]^n|\le\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_C\left|\dfrac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\right|ds\le\dfrac{L}{2\pi d}M^n$，故

$$|f(z)|\le\left(\frac{L}{2\pi d}M^n\right)^{1/n}=M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}。$$

3）对 2）中的不等式取极限（$n\to+\infty$），即得。

习题四解答

1．下列数列$\{\alpha_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

1）$\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$；2）$\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$；3）$\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；4）$\alpha_n=e^{-n\pi i/2}$；5）$\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi i/2}$

解　1）$\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}i$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n^2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-1$

2）$\alpha_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

3）由于α_n的实部$\{(-1)^n\}$发散，故α_n发散

4）由于$\alpha_n=e^{-n\pi i/2}=\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\sin\dfrac{n\pi}{2}$，其实部、虚部数列均发散，故$\alpha_n$发散

5）$\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi i/2}=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-i\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

2．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在}, & |\alpha|=1,\alpha\neq1.\end{cases}$$

3．判断下列级数的绝对收敛性与收敛性：

1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$；2）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$；3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5i)^n}{8^n}$；4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$。

解　1）由$i^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+i\sin\dfrac{n\pi}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$为收敛的交错项实级数，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$收敛，但$\left|\dfrac{i^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{i^n}{n}\right|$发散，原级数条件收敛；

2）与 1）采用同样的方法，并利用 $\dfrac{1}{\ln n} \ge \dfrac{1}{n}(n \ge 2)$；

3）因 $\left|\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}\right| = \left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$ 绝对收敛；

4）因 $\cos in = \mathrm{ch}n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{ch}n}{2^n} \ne 0$，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$ 发散。

4．下列说法是否正确？为什么？

（1）每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

（2）每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

（3）每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成 Taylor 级数。

解（1）不对。如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在收敛圆 $|z|<1$ 内收敛，但在收敛圆周 $|z|=1$ 上并不收敛；

（2）不对。幂级数的和函数在收敛圆内为解析函数，不能有奇点；

(3)不对。如 $f(z)=\bar{z}$ 在全平面上连续,但它在任何点的邻域内均不能展开成 Taylor 级数。

5.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解　不能。因如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，则由 Abel 定理其收敛半径 $R \ge |0-2| = 2$，而 $|3-2|=1<2$ 即 $z=3$ 在其收敛圆 $|z-2|<2$ 内，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛，矛盾。

6．求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$($p$为正整数)；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$；　（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$；　（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$；　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln in}\right)^n$。

解　（1）$R = 1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p} = 1$；

（2） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{n+1}=0$；

（3） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}1/|1+i|=1/\sqrt{2}$ ；

（4） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ ；

（5） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\operatorname{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right)\right|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\dfrac{1}{n}}=1$ ；

（6） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|\ln in|=\infty$；

7．如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 R，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$ 的收敛半径 $\geq R$。

证明　对于圆 $|z|<R$ 内的任意一点 z，由已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 绝对收敛即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n||z|^n$ 收敛，又因 $|\operatorname{Re}c_n|\leq|c_n|$，从而 $|\operatorname{Re}c_n||z|^n\leq|c_n||z|^n$，故由正项级数的比较判别法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\operatorname{Re}c_n||z|^n$ 也收敛即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$ 在 $|z|<R$ 内绝对收敛，于是其收敛半径 $\geq R$。

8．证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在（$\neq\infty$），下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n\ ;\qquad \sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}\ ;\qquad \sum nc_n z^{n-1}。$$

证明　　设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\rho$，则幂级数 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径为 $1/|\rho|$；

幂级数 $\sum\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$ 的收敛半径为 $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n/(n+1)}{c_{n+1}/(n+2)}\right|=1/|\rho|$ ；

幂级数 $\sum nc_n z^{n-1}$ 的收敛半径为 $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\right|=1/|\rho|$；

故以上三个幂级数有相同的收敛半径。

9．设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$ 发散，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 1。

证明　由级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$收敛，知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$z=1$处收敛，由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$R \geq 1$；而$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$发散知$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$在$|z|=1$处发散，故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$R \leq 1$。所以$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为 1。

10．如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在它的收敛圆的圆周上一点$z_0$处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明　由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在其收敛圆内绝对收敛，再证其在圆周上绝对收敛即可。在圆周上任取一点η，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \eta^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$，知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n$绝对收敛，故结论成立。

11．把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径。

（1）$\frac{1}{1+z^3}$；（2）$\frac{1}{(1+z^2)^2}$；（3）$\cos z^2$；（4）$\operatorname{sh} z$；

（5）$\operatorname{ch} z$；（6）$e^{z^2}\sin z^2$；（7）$e^{\frac{z}{z-1}}$；（8）$\sin\frac{1}{1-z}$

解　（1）由$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z|<1$，故

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \ldots + (-1)^n z^{3n} + \ldots，\quad |z|<1，$$

而收敛半径 R=1；

（2）因$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots，\quad |z|<1$，

故
$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots，\quad |z|<1，$$

又因
$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = \frac{-2z}{(1+z^2)^2}，$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \ldots，\quad |z|<1，$$

而$R=1$；

（3）因$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, |z| < \infty$，故　$\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \cdots$

$|z|<+\infty$ 而其收敛半径 $R=+\infty$ ；

(4) 因 $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}, e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ e^{-z}=1-z+\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $\operatorname{sh} z=z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,$ 而收敛半径 $R=+\infty$ ；

(5) $\operatorname{ch} z=1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\ldots,|z|<+\infty,$

(6) 因 $e^{z^2}=1+z^2+\dfrac{z^4}{2!}+\dfrac{z^6}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ \sin z^2=z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $e^{z^2}\sin z^2=\left(1+z^2+\dfrac{z^4}{2!}+\dfrac{z^6}{3!}+\ldots\right)\left(z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\ldots\right)=z^2+z^4+\dfrac{z^6}{3}+\ldots,|z|<+\infty,$

而收敛半径 $R=+\infty;$

(7) 因 $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

$$\frac{z}{z-1}=-z-z^2-z^3-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},|z|<1,$$

故 $e^{\frac{z}{z-1}}=1-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}+\frac{(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1})^2}{2!}-\frac{(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1})^3}{3!}+\cdots=1-z-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots,|z|<1,$

而收敛半径 R=1。

(8) 因 $\sin\dfrac{1}{1-z}=\sin\left(1+\dfrac{z}{1-z}\right)=\sin1\cos\dfrac{z}{1-z}+\cos1\sin\dfrac{z}{1-z},$

$$\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1},|z|<1,$$

故 $\sin\dfrac{z}{1-z}=\left(z+z^2+z^3+\ldots\right)-\dfrac{1}{3!}\left(z+z^2+z^3+\ldots\right)^3+\ldots=z+z^2+\dfrac{5}{6}z^3+\ldots,\quad |z|<1,$

$\cos\dfrac{z}{1-z}=1-\dfrac{1}{2}\left(z+z^2+z^3+\ldots\right)^2-\dfrac{1}{4!}\left(z+z^2+z^3+\ldots\right)^4+\ldots=1-\dfrac{1}{2}z^2-z^3+\ldots,\quad |z|<1,$

故 $\sin\dfrac{1}{1-z}=\sin1\left(1-\dfrac{1}{2}z^2-z^3+\ldots\right)+\cos1\left(z+z^2+\dfrac{5}{6}z^3+\ldots\right)$

$$=\sin1+(\cos1)z+\left(\cos1-\frac{1}{2}\sin1\right)z^2+\left(\frac{5}{6}\cos1-\sin1\right)z^3+\cdots,|z|<1,$$

而收敛半径 R=1。

12．求下列各函数在指定点 z_0 处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}$， $z_0=1$ (2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$， $z_0=2$

(3) $\dfrac{1}{z^2}$， $z_0=-1$ (4) $\dfrac{1}{4-3z}$， $z_0=1+\mathrm{i}$

(5) $\tan z$， $z_0=\pi/4$ (6) $\arctan z$， $z_0=0$

解 (1) 因 $$\frac{z-1}{z+1}=(z-1)\frac{1}{(z-1+2)}=\frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

及 $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,|z|<1$。故

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z-1}{2}-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n, \qquad |z-1|<2$$

于是收敛半径 R=2。

(2) 因 $$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{z+2}-\frac{2}{z+1}\right)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$$

及 $$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+(z-2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<4$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+(z-2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<3$$

故原式 $$=\frac{2}{4}\left[1-\frac{z-2}{2^2}+\frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2-\cdots\right]-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$$，$|z-2|<3$，而 $R=3$。

(3) 因 $\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'$ 及 $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{1-(z+1)}=-[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots]$， $|z+1|<1$，

故 $$\frac{1}{z^2}=1+2(z+1)+\cdots+n(z+1)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$$，$|z+1|<1$，

而 R=1。

（4）因 $$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3[z-(1+\mathrm{i})]-3-3\mathrm{i}}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}-3[z-(1+\mathrm{i})]}$$

$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\left\{1+\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]+\left(\frac{3}{1-3\mathrm{i}}\right)^2[z-(1+\mathrm{i})]^2+\cdots\right\},$$

其中$\left|\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]\right|<1$，故

$$\frac{1}{4-3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}[z-(1+\mathrm{i})]^n，\ |z-(1+\mathrm{i})|<\left|\frac{1-3\mathrm{i}}{3}\right|=\frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径$R=\frac{\sqrt{10}}{3}$。

（5）因$\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\cdots,|z|<\frac{\pi}{2}$，又$\tan z=\frac{1+\tan(z-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(z-\frac{\pi}{4})}$，故

$$\tan z=[1+\tan(z-\tfrac{\pi}{4})](1+\tan(z-\tfrac{\pi}{4})+\tan^2(z-\tfrac{\pi}{4})+\cdots)$$

$$=1+2(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(z-\frac{\pi}{4})^3+\cdots,$$ 且收敛半径$R=\frac{\pi}{4}$。

（6）因$(\arctan z)'=\frac{1}{1+z^2}$，又$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots,|z|<1$，故

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^z\sum_{0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}，\ |z|<1,$$

且收敛半径$R=1$。

13．为什么在区域$|z|<R$内解析且在区间$(-R,R)$取实数值的函数$f(z)$展开成z的幂级数时，展开式的系数都是实数？

解　$f(z)$展开成z的幂级数时，展开式的系数为$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，而函数$f(z)$在区间$(-R,R)$取实数值，可知$f^{(n)}(0)$也为实数。故展开式的系数都是实数。

14．证明在$f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$以z的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

证明　$f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$在复平面内出去点$z=0$外解析，所以在$0<|z|<+\infty$内可展开成洛朗级数$\cos(z+\frac{1}{z})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz, (n=0,\pm1,\pm2,\cdots,0<r<+\infty)$$

与要证明式子中 c_n 的表示式相比较，我们取 $r=1$ 并利用复积分的计算公式可得

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

因 $\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$，而 $\cos(2\cos\theta)\sin n\theta$ 为 θ 的奇函数。

15．下列结论是否正确？

用长除法 $\frac{z}{1-z} = z+z^2+z^3+\cdots$，$\frac{z}{z-1} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$

因为 $\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$，所以 $\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots=0$。

解　不正确。因为长除法所得到的两式，使它们成立的 z 值的范围不同（分别为 $|z|<1$；$|z|>1$），因此不能相加。

16．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

(1) $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；　(2) $\frac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1, 0<|z-1|<1$；

(3) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}, 0<|z-1|<1, 1<|z-2|<+\infty$　(4) $e^{\frac{1}{1-z}}$，$1<|z|<+\infty$

(5) $\frac{1}{z^2(z-i)}$，在以 i 为中心的圆环域内　(6) $\sin\frac{1}{1-z}$，$0<|z-1|<+\infty$

(7) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}, 3<|z|<4, 4<|z|<+\infty$

解　(1) 因　$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1}+\frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1}+\frac{\frac{1}{5}}{z-2}$$

故　$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = -\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= -\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$= \cdots+\frac{2}{5}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z^3}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5}\frac{1}{z}-\frac{1}{10}-\frac{z}{20}-\frac{z^2}{40}-\frac{z^3}{80}-\cdots\quad 1<|z|<2\ ;$$

（2）在 $0<|z|<1$ 内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)^2=\frac{1}{z}\left(1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+2+3z+\cdots+(n+1)z^{n-1}+\cdots=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$$

在 $0<|z-1|<1$ 内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(1-z)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\ ;$$

（3） $0<|z-1|<1$ 内，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

在 $1<|z-2|<+\infty$ 内

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-2)^n}$$

（4）在 $1<|z|<+\infty$ 内，因

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{-1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

故 $e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$；

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\cdots$$

（5）在 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 内，因 $\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1},|z|<1$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{\mathrm{i}^2(z-\mathrm{i})(1+\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-\mathrm{i})^{n-2}}{\mathrm{i}^{n+1}}$$

在 $1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$ 内，因 $\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^3(1+\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}})^2}$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)\mathrm{i}^n}{(z-\mathrm{i})^{n+3}}$$

（6）因 $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},|z|<+\infty$，故

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}},\qquad 0<|z-1|<+\infty$$

（7）在 $3<|z|<4$ 内，因 $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{3-z}-\frac{1}{4-z})$，故

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=-(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}+\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})})$$

$$=-(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}})=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}-2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

在 $4<|z|<+\infty$ 内，$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-3})$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})})$$

$$=(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n}$$

17．函数 $\tan\frac{1}{z}$ 能否在圆环域 $0<|z|<R$（$0<R<+\infty$）内展开成洛朗级数？为什么？

解　不能展成洛朗级数。因在圆环域$0<|z|<R$内$\tan\frac{1}{z}$不解析。

18．如果k为满足关系$k^2<1$的实数，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}。$$

证明　$\frac{1}{z-k}$在$|z|>k$内为解析函数，将其展成洛朗级数有

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z(1-\frac{k}{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}$$

在上式中令$z=e^{i\theta}$，

$$\frac{1}{e^{i\theta}-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{(e^{i\theta})^{n+1}}，即\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(k^n\cos(n+1)\theta-ik^n\sin(n+1)\theta\right)$$

分离实部和虚部即得结论。

19．如果C为正向圆周$|z|=3$，求积分$\int_C f(z)dz$的值.设$f(z)$为

1）$\frac{1}{z(z+2)}$；　2）$\frac{z+2}{(z+1)z}$；　3）$\frac{1}{z(z+1)^2}$；　4）$\frac{z}{(z+1)(z+2)}$。

解　$$\int_C f(z)dz=2\pi i c_{-1}$$

1）$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}\right),|z|>2。$$

故$\int_C f(z)dz=0$。

2）$$\frac{z+2}{(z+1)z}=(z+2)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}\right)=(z+2)\left(\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}\right),|z|>1$$

故$\int_C f(z)dz=2\pi i$。

3）$$\frac{1}{z(z+1)^2}=\frac{1}{z^3(1+\frac{1}{z})^2}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{z^{n-1}},|z|>1。$$故$\int_C f(z)dz=0$。

4) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left(\dfrac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\dfrac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{z^n},|z|>2$

故$\int_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}$。

20．试求积分$\oint_C(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n)dz$的值，其中$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线。

解 $\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z},0<|z|<1$。而$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线，故$\oint_C(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n)dz=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$。

习题五解答

1、下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级。

(1) $\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$； (2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$； (3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

(4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$； (5) $\dfrac{z}{\left(1+z^2\right)\left(1+e^{\pi z}\right)}$； (6) $e^{\frac{1}{1-z}}$；

(7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$； (8) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$； (9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解 (1) $f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$是有理函数，故奇点只是极点，满足$z\left(z^2+1\right)^2$=0，故 $z=0$，与 $z=\pm\mathrm{i}$ 为其奇点，$z=0$ 为一级极点，而 $z=\pm\mathrm{i}$ 为其二级极点。

(2) 因$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z^3}=\infty$则 $z=0$ 为其极点。再确定极点的级，有两种方法：

a. $z=0$ 为 $\sin z$ 为的一级零点；而 $z=0$ 为 z^3 的三级零点。故 $z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

b. $\lim\limits_{z\to 0} z^2\dfrac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$，故 $z=0$ 为其二级极点，

(3) 原式=$\dfrac{1}{(z^2-1)(z-1)}=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)}$，故 $z=1$ 为其二级极点，而 $z=-1$ 为一级极点。

(4) a．$\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$，$0<|z|<1$，$\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n+1}$ 无负幂项，故 $z=0$ 为其可去奇点。

b．$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(1+z)}=1$，故 $z=0$ 为可去奇点。

(5) 由$1+z^2=0$得 $z=\pm\mathrm{i}$ 为 $\left(1+z^2\right)$的一级零点，由$1+e^{\pi z}=0$ 得 $z_k=(2k+1)\mathrm{i}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为 $\left(1+e^z\right)$ 的零点，又 $\left(1+e^{\pi z}\right)'\Big|_{z_k}=\pi e^{\pi z_k}=-\pi\neq 0$，所以 z_k 为 $\left(1+e^z\right)$的一级零点，因此，$z=\pm\mathrm{i}$ 为二级极点；$z_k=(2k+1)\mathrm{i}$，$(k=1,\pm2,\cdots)$为一级极点。

(6) 由$e^{\frac{1}{1-z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$，知 $z=1$ 为本性奇点。

(7) 因$e^z-1=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}=z(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots)$，故$z=0$为$z^2(e^z-1)$的三级零点，因而是$\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$的三级极点，而$z=2k\pi\mathrm{i},(k=\pm1,\pm2,\cdots)$均为一级极点。

(8) 由 $z^n+1=0$，$z^n=-1$，得 $z_k=e^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,1,\cdots n-1)$为原式一级极点。

(9) $\sin z^2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{k\pi},z=\pm\mathrm{i}\sqrt{k\pi}$，$k=0,1,2,\cdots$ 由

$\left(\sin z^2\right)'\big|_{z^2=k\pi}=2z\cos z^2\big|_{z^2=k\pi}=\begin{cases}0 & k=0\\ \neq 0 & k\neq 0\end{cases}$，$(\sin z^2)''\big|_{z=0}=2$，知 $z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点，$z=\pm\sqrt{k\pi}$，$z=\pm \mathrm{i}\sqrt{k\pi}$（$k=1,2,3,\cdots$）均为 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 一级极点。

2．求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 是 m（$m>1$）级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

证　由题知：$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z_0)\neq 0$，则有

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)=(z-z_0)^{m-1}\left[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)\right]$$

故 z_0 是 $f'(z)$ 的 m-1 级零点。

3．验证：$z=\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\mathrm{ch}\, z$ 的一级零点。

解　由 $\mathrm{ch}\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$(\mathrm{ch}\, z)'\big|_{z=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}=\mathrm{sh}\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，知 $z=\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}$ 是 $\mathrm{ch}\, z$ 的一级零点。

4．$z=0$ 是函数 $(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)^{-2}$ 的几级极点？

解　$(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)'\big|_{z=0}=(\cos z+\mathrm{ch}\, z-2)\big|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)''\big|_{z=0}=(-\sin z+\mathrm{sh}\, z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)'''\big|_{z=0}=(-\cos z+\mathrm{ch}\, z)\big|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)^{(4)}\big|_{z=0}=(\sin z+\mathrm{sh}\, z)\big|_{z=0}=0,(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)^{(5)}\big|_{z=0}=(\cos z+\mathrm{ch}\, z)\big|_{z=0}=2$，

故 $z=0$ 是函数 $\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z$ 的五级零点，也即为 $(\sin z+\mathrm{sh}\, z-2z)^{-2}$ 的十级极点。

5．如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)。$$

证　因 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，可设 $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$，$g(z)=(z-z_0)\psi(z)$，$\varphi(z),\psi(z)$ 为解析函数，则

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{(z-z_0)\psi(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad \frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)},$$

故　$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)$$

6．若 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点（或零点），那么下列三个函数在 $z=a$ 处各有什么性质？

(1)　$\varphi(z)\psi(z)$；(2)　$\varphi(z)/\psi(z)$；(3)　$\varphi(z)+\psi(z)$

解　由题意，$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$，$\psi(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$，其中 $f(z)$，$g(z)$ 在 a 点解析且 $f(a)\neq 0$，$g(a)\neq 0$。

（1） $z=a$ 是 $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点。

（2）对于 $\varphi(z)/\psi(z)$，当 $m<n$ 时，a 是 $n-m$ 级零点；当 $m>n$ 时，a 是 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 是可去奇点。

（3）当 $m\neq n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 级极点，当 $m=n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的极点。（可退化为可去），其级不高于 m，点 a 也可能是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点（解析点）。

7．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点，这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},|z-1|>1.,\ |z-2|>1$$

所以“ $z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”，又其中不含 $(z-2)^{-1}$ 幂项，因此 $\operatorname{Res}[f(z),1]=0$，这些说法对吗？

解　不对，$z=1$ 不是 $f(z)$ 的本性奇点，这是因为函数的洛朗展开式是在 $|z-2|>1$ 内得到的，而不是在 $z=2$ 的圆环域内的洛朗展开式。

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{z(z-1)^2}\right]=-1$$

孤立奇点的分类必须根据在这个奇点邻域内洛朗展开式来决定。

8．求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

1） $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$；　2） $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；　3） $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；　4） $\dfrac{z}{\cos z}$；

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}$；　6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；　7） $\dfrac{1}{z\sin z}$；　8） $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$。

解　1） $\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}z\dfrac{z+1}{z^2-2z}=-\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{Res}[f(z),2]=\lim\limits_{z\to2}(z-2)\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{3}{2}$

2） $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，$z=0$ 为分母的四级零点，是分子的一级零点，所以是 $f(z)$ 的三级极点。

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[1-1-2z-\frac{1}{2!}4z^2-\frac{1}{3!}8z^3\cdots\right]$$

知 $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=-\dfrac{4}{3}$

3） $\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left[(z-\mathrm{i})^3\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=-\dfrac{3}{8}\mathrm{i}$，

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to -\mathrm{i}}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+\mathrm{i})^3\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{3}{8}\mathrm{i}$$

4） $\operatorname{Res}\left[f(z),k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]=\dfrac{z}{(\cos z)'}\Big|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}},|z-1|>0$，知 $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=c_{-1}=0$

6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}=z^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}},|z|>0$，知 $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-\dfrac{1}{6}$

7） $\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{d}{dz}\left[z^2\dfrac{1}{z\sin z}\right]=0$，$\operatorname{Res}[f(z),k\pi]=\dfrac{1}{(z\sin z)'}\Big|_{z=k\pi}=\dfrac{(-1)^k}{k\pi},k=\pm1,\pm2,\cdots$

8） $\operatorname{Res}\left[f(z),(k+\dfrac{1}{2})\pi\mathrm{i}\right]=\dfrac{\operatorname{sh}z}{(\operatorname{ch}z)'}\Big|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi\mathrm{i}}=1,k$为整数。

9．计算下列各积分（利用留数；圆周均取正向）

（1） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{\sin z}{z}dz$； （2） $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$； （3） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1-\cos z}{z^m}dz$，（其中 m 为整数）；

（4） $\oint\limits_{|z-2\mathrm{i}|=1}\operatorname{th}z\,dz$； （5） $\oint\limits_{|z|=3}\tan(\pi z)dz$； （6） $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz$（其中 n 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$）。

解（1） $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$，$\lim\limits_{z\to0}f(z)=1$ 故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点则

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$$

故原积分=0。

（2）在 C 内，$f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 以 $z=1$ 为其二级极点，则 $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=\lim\limits_{z\to1}(e^{2z})'\,_{z=1}=2e^2$ 由留数基本定理有原积分=4 πe^2 i.

(3) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^m}=\dfrac{1}{z^{m-2}}(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-...)$ 故以 $z=0$ 为其 $m-2$ 级极点。设 $I=\int_C f(z)dz$

当 $m\le2$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$，$I=0$；

当 $m=2n>2$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$，$I=0$；

当 $m=2n+1>2$ 时，$\operatorname{Res}[f(z),0]=(-1)^{n-1}/2n!=(-1)^{\frac{m-3}{2}}/(m-1)$！

由此 $I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\mathrm{i}/(m-1)!$ 或说 m 为大于或等于 3 的奇数时，$I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\mathrm{i}/(m-1)!$

（4） $f(z)=\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z},z_k=\left(k+\dfrac{1}{z}\right)\pi\mathrm{i}$ 为其一级极点 $(k=0,\pm1,\cdots)$ $k=0$ 时，$z_0=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ 在 $|z-2\mathrm{i}|=1$ 内，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\operatorname{sh}z_0=1 \text{故}\quad I=\oint_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right]=2\pi\mathrm{i}$$

(5) $f(z)=\tan\pi z$ 在 $|z|=3$ 内有一级极点 $z_k=k+\frac{1}{2}$ （$k=0,\pm1,\pm2,-3$），共 6 个。故

$\text{Res}\left[\tan\pi, k+\frac{1}{2}\right]=\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi}$，由留数定理

$$\oint_C \tan\pi z dz=2\pi\,\mathrm{i}\sum\text{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi\,\mathrm{i}\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-12\,\mathrm{i}$$

(6) 当 $1<|a|<|b|$ 时，被积函数在单位圆内解析，故积分为 0；

当 $|a|<|b|<1$ 时，$\text{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

$\text{Res}[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-b)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}$，故积分为 0；

当 $|a|<1<|b|$ 时，积分$=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

10．判定 $z=\infty$ 是下列各函数的什么奇点？并求出在 ∞ 的留数。

1) $e^{\frac{1}{z^2}}$；　　2) $\cos z-\sin z$；　　3) $\frac{2z}{3+z^2}$。

解　1）可去奇点，∞ 的留数为零。$\varphi(t)=f(z)=f(\frac{1}{t})=e^{t^2}$；

2) $\varphi(t)=f(z)=f(\frac{1}{t})=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，故 $z=\infty$ 为函数的本性奇点，又由于 $\cos z-\sin z$ 在整个复平面解析，故 ∞ 的留数为零。

3) $\frac{2z}{3+z^2}=\frac{2}{z}(1-\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z^4}+\cdots)$ 不含正幂项，故为可去奇点，留数为 $c_{-1}=2$

$$\text{Res}[f(z),\infty]=\text{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=\text{Res}[\frac{2}{z(1+3z^2)},0]=2。$$

11．求 $\text{Res}[f(z),\infty]$ 的值，如果

(1) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$　　(2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

解 (1) $f(z)=\frac{e^z}{z^2-1}$ 有两个一级极点 $z=1, z=-1,$ 故由全部留数和为零的定理，则

$$\text{Res}[f(z),\infty]=-\text{Res}[f(z),1]-\text{Res}[f(z),-1]=-\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z+1}-\lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z-1}$$

$$=-\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}=-\text{sh}1$$

(2) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$ 以 $z=0$ 为一级极点，$z=-1$ 为四级极点，$z=4$ 为一级极点，用有限奇点留数和来求无穷远点的留数，计算过程太麻烦，一般采用直接在 $z=\infty$ 的圆环域（解析） $4<|z|<\infty$ 内展开为洛朗级数的方式，则有

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{z\cdot z^4\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\cdot z\left(1-\frac{4}{z}\right)}=\frac{1}{\left[z^6\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\left(1-\frac{4}{z}\right)\right]}=\frac{1}{z^6}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]^4\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{z^6}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)^4\left(1+\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}+\ldots\right)$$

显见 $c_{-1}=0$, 故 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$.（注也可利用规则 IV）。

12．计算下列各积分，C 为正向圆周。

1）$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$，$C:|z|=3$；　　2）$\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，$C:|z|=2$；

3）$\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$　（n 为一整数），$C:|z|=r>1$。

解　1）函数 $\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|=3$ 的外部，除 ∞ 点外没有其他奇点，因此根据定理二与规则 IV，

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=-2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0]=2\pi\mathrm{i}$$

2）$f(z)=\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$ 有奇点，$z=-1$，$z=0$，$z=-1$ 为一级极点，而 $z=0$ 为本性奇点，在 $2<|z|<+\infty$ 内展开 $f(z)$，则

$$f(z)=\frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)$$

$$=\left(z^2-z+1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)=z^2+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3}\frac{1}{z}+\ldots$$

得 $-c_{-1}=\frac{1}{3}$, 故原积分 $=2\pi i(c_{-1})=-\frac{2}{3}\pi i$.

3）当 $n=1$ 时，$\oint_C \frac{z^2}{1+z}dz=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z),-1]=2\pi\mathrm{i}$；当 $n\neq 1$ 时，

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\frac{z^n}{1+z^{-n}}=z^n(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}+\cdots)=z^n-1+\frac{1}{z^n}+\cdots$$

知 $c_{-1}=0$，故 $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=0$。

13 计算下列积分

1）$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$；　　2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\quad(a>b>0)$；　　3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；

4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$； 5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$； 6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

解 1）由于被积函数的分母 $5+3\sin\theta$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),-\frac{i}{3}]$$

$$=2\pi i\left.\frac{2}{6z+10i}\right|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{\pi}{2}$$

2）由于被积函数的分母 $a+b\cos\theta$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{(\frac{z^2-1}{2iz})^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{i(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)}dz=2\pi i\{\mathrm{Re\,s}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]\}$$

又 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\left.\frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2}\right|_{z=0}=-\frac{ai}{b^2}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]=\left.\frac{i(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)}\right|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

故 $I=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$。

3）函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面内只有 2 级极点 i，且

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2f(z)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}=-\frac{2}{(2i)^3}=-\frac{i}{4},$$

故 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{\pi}{2}。$$

4）注意到被积函数为偶函数，

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

函数 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ 在上半平面内只有一级极点 $e^{\frac{\pi i}{4}},e^{\frac{3\pi i}{4}}$，且

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi i}{4}]=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}=\frac{1-i}{4\sqrt2}；\ \mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi i}{4}]=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}=-\frac{1+i}{4\sqrt2}$$

故 $$I=\frac{1}{2}2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi i}{4}]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi i}{4}])=\frac{\pi}{2\sqrt2}。$$

5）对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx$，令 $R(z)=\frac{1}{z^2+4z+5}$，则 $z=-2+i$ 为上半平面内的 $R(z)$ 的一级极

点，故有：$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iz},\mathrm{i}\right]=\left.\dfrac{e^{iz}}{2z+4}\right|_{z=-2+\mathrm{i}}=-\dfrac{e^{-1}(\sin 2+\mathrm{i}\cos 2)}{2}$，

则原积分$=\mathrm{Re}\{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[R(z)e^{iz},-2+\mathrm{i}]\}=\pi e^{-1}\cos 2$。

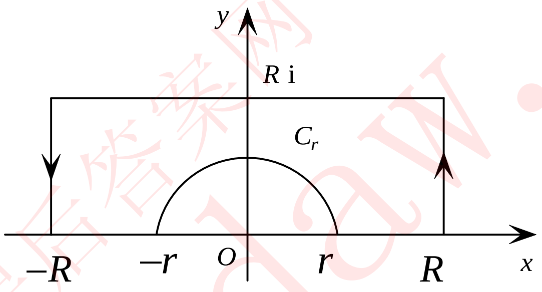
6）对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{ix}}{1+x^2}dx$，令 $R(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，则 $z=\mathrm{i}$ 为上半平面内的 $R(z)$的一级极点，故有：

$$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iz},\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{ze^{iz}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}=\frac{e^{-1}}{2}$$

$I=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[R(z)e^{iz},\mathrm{i}\right]=\pi e^{-1}\mathrm{i}$，则原积分$=\mathrm{Im}\{I\}=\pi e^{-1}$

14．试用下图中的积分路线，求例 4 中的积分：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$。

解 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$，采用 e^{iz}/z 沿如如图所示闭曲线来计算上式右端的积分（$z=0$ 为 e^{iz}/z 的一级极点，且在实轴上)。由 Cauchy 基本定理，有



第 14题 图

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx=0,$$

令 $x=-t$，则有 $\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{ix}}{x}dx=-\int_r^R\dfrac{e^{-ix}}{x}dx$，所以 $\int_r^R\dfrac{e^{ix}}{x}dx+\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{ix}}{x}dx=2\mathrm{i}\int_r^R\dfrac{\sin x}{x}dx$。

又 $\left|\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{iz}}{z}dz\right|=\left|\int_R^{-R}\dfrac{e^{\mathrm{i}(x+R\mathrm{i})}}{x+R\mathrm{i}}dx\right|\le\int_R^{-R}\dfrac{e^{-R}}{\sqrt{x^2+R^2}}dx\le 2e^{-R}$，知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{iz}}{z}dz=0$；

$\left|\int_R^{R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{iz}}{z}dz\right|=\left|\int_0^R\dfrac{e^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{i}\,dy\right|\le\int_0^R\dfrac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}}dy\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，同理 $\left|\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\dfrac{e^{iz}}{z}dz\right|\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，知

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}=0$$

和例 4 采用同样的方法得到 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}\dfrac{e^{iz}}{z}dz=-\pi\mathrm{i}$。

故 $2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\pi\mathrm{i}$，即 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$。

15．利用公式（5.4.1）计算下列积分：

1）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z}dz=2\pi\mathrm{i}$；　　2）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z}{z^2-1}dz=2\pi\mathrm{i}$；

3） $\oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi i$ ；　　　4） $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} dz = 0$ 。

16．设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，z_0 为 C 内一点。如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$。在 C 内 $f(z)$ 无其他零点。试证：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_0 。$$

证　$f(z)$ 在 C 内只有一级零点 z_0，而 $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} + \frac{z_0 f'(z)}{f(z)}$，知 z_0 为函数 $\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}$ 的可去奇点，故由留数定理和（5.4.1）知

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z_0 f'(z)}{f(z)} dz = 0 + z_0 = z_0 。$$

17．若 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，证明在 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$。

证　令 $f(z)=-z$，则在 C 上，$|f(z)|=1$，而 $|\varphi(z)|<1$，故由路西定理，知方程 $z=\varphi(z)$ 与方程 $f(z)=0$ 在 C 内有相同个数的根，从而 $\varphi(z)=z$ 在 $|z|<1$ 只有一根。

18．证明：当 $|a|>e$，则方程 $e^z = az^n$ 在圆 $|z|=1$ 内有 n 个根。

证　设 $f(z)=-az^n$，$g(z)=e^z$，在 $|z|\leq 1$ 内均解析，且当 $|z|=1$ 时，$|-az^n|=|-a||z^n|=|a|$，$|e^z|=e^{\cos\varphi}\leq e$ 而 $|a|>e$，故 $|f(z)|=|-az^n|=|a|>|e^z|=|g(z)|$。

根据路西定理知，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 $C:|z|=1$ 内的零点个数相同，即 $e^z=az^n$ 的根的个数与 $-az^n=0$ 的根的个数相同，即为 n。

19．证明方程 $z^7-z^3+12=0$ 的根都在圆环域 $1\leq|z|\leq 2$ 内。

证　当 $|z|<2$ 时，取 $f(z)=z^7$，$g(z)=12-z^3$，当 $|z|=2$ 时，

$$|g(z)| = |12-z^3| \leq 12+z^3 \leq 20 < |z^7| = |f(z)|$$

所以 $z^7-z^3+12=0$ 的根的个数与 z^7 的根的个数相同，因此，$z^7-z^3+12=0$ 的根全部在|z|=2 的内部。

当 $|z|<1$ 时，取 $f(z)=12$，$g(z)=z^7-z^3$，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|>|z^7|+|z^3|\geq|z^7-z^3|=|g(z)|$，故 $z^7-z^3+12=0$ 的根与 $f(z)=12$ 的根的个数相同，即在 $|z|=1$ 内无根，综上所述，$z^7-z^3+12=0$ 的根全在 $1\leq|z|\leq 2$ 内。

傅氏变换习题解答

习题一

1．试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

证 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}d\tau e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)\cos\omega t d\tau d\omega$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{j}\sin\omega t d\tau d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\cos\omega t d\omega$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\sin\omega t d\omega=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega$$

因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\cos\omega t d\tau d\omega$ 为 ω 的奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega t d\tau d\omega$ 为 ω 的偶函数。

2．试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，当 $f(t)$ 为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

其中

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau$$

当 $f(t)$ 为偶函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos(\omega t)d\omega$$

其中

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

证　设 $f(t)$ 是奇函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-\mathrm{j}\omega\tau}d\tau e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau-\mathrm{j}\sin\omega\tau)d\tau e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega$$

$=\dfrac{1}{\pi\mathrm{j}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega=\dfrac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}b(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}d\omega$。（$b(\omega)$ 是 ω 的奇函数）

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}b(\omega)(\cos\omega t+\mathrm{j}\sin\omega t)d\omega=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t d\omega$$

设 $f(t)$ 是偶函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega\tau-j\sin\omega\tau)d\tau e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}a(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{0}^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega$$

$a(\omega)$是ω的偶函数。(注也可由 1 题推证 2 题)

3．在题 2 中，设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，试算出 $a(\omega)$，并推证

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

证 $f(t)$是偶函数

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega$$

所以 $$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |t|<1\\ \frac{\pi}{2}\frac{0+1}{2}=\frac{\pi}{4} & |t|=1。\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

习题二

1．求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}A, & 0\le t\le\tau\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的傅氏变换。

解 $$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\tau}Ae^{-j\omega t}dt$$

$$=A\frac{e^{-j\omega t}\big|_0^{\tau}}{-j\omega}=A\frac{e^{-i\omega\tau}-1}{-j\omega}=A\frac{1-e^{-j\omega\tau}}{j\omega}$$

2．求下列函数的傅氏积分：

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1\\ 0, & t^2>1\end{cases}$ (2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}\sin 2t, & t\ge 0\end{cases}$ (3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1\\ -1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<+\infty\end{cases}$

解 (1) 函数 $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 满足傅氏积分定理的条件，傅氏积分公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\ e^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)\ e^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)\cos\omega tdte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega}-\left(\frac{2t\cos\omega t}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega t}{\omega^3}+\frac{t^2\sin\omega t}{\omega}\right)\right]_0^1 e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\left(\sin\omega-\omega\cos\omega\right)}{\omega^3}e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega td\omega$$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}\sin 2t, & t\ge 0\end{cases}$ 满足傅氏积分定理的条件，其傅氏积分公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\sin 2te^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\frac{e^{\mathrm{i}2t}-e^{-\mathrm{i}2t}}{2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-t+\mathrm{i}(2-\omega)t}-e^{-t-\mathrm{i}(2+\omega)t}\right)dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^{\left[-1+\mathrm{i}(2-\omega)\right]t}}{-1+\mathrm{i}\left(2-\omega\right)}-\frac{e^{\left[-1-\mathrm{i}(2+\omega)\right]t}}{-1-\mathrm{i}\left(2+\omega\right)}\right]_0^{+\infty}e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-1}{-1+\mathrm{i}\left(2-\omega\right)}-\frac{-1}{-1-\mathrm{i}\left(2+\omega\right)}\right]e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)-2\omega\mathrm{i}}{25-6\omega^2+\omega^4}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega+\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)\sin\omega t-2\omega\cos\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(5-\omega^2\right)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

(3) 函数 $f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 是奇函数，满足傅氏积分定理的条件，其傅氏积分公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega tdte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{1}1\cdot\sin\omega tdte^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega td\omega$$

在 $f(t)$ 的间断点 $t_0=-1,0,1$ 处以 $\dfrac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$ 代替。

3．求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果。

(1) $f(t)=e^{-\beta|t|}$ （$\beta>0$），证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$

(2) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$，证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos(\omega t)d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$

（3） $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\end{cases}$ 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$

解 （1） $\displaystyle F(t)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-i\omega t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}dt$

$$=\int_0^{+\infty}\left[e^{-(\beta-i\omega)t}+e^{-(\beta+i\omega)t}\right]dt=\frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(\beta-i\omega)}+\frac{e^{-(\beta-i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(\beta+i\omega)}$$

$$=\frac{1}{\beta-i\omega}+\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\left(\cos\omega t+i\sin\omega t\right)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\cos\omega t d\omega$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$$

（2） $\displaystyle F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cos t e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{[1+i(1-\omega)]t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{[1-i(1+\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1+i(1-\omega)]t}dt+\int_0^{+\infty}e^{[-1-i(1+\omega)]t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{[1+i(1-\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[1-i(1+\omega)]t}\Big|_{-\infty}^{0}}{1-i(1+\omega)}+\frac{e^{[-1+i(1-\omega)]t}\Big|_0^{+\infty}}{-1+i(1-\omega)}+\frac{e^{[-1-i(1+\omega)]t}\Big|_0^{+\infty}}{-1-i(1+\omega)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i(1-\omega)}+\frac{1}{1-i(1+\omega)}+\frac{1}{1-i(1-\omega)}+\frac{1}{1+i(1+\omega)}\right]=\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega$$

因此有 $$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t$$

（3） $\displaystyle F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t e^{-i\omega t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt=-2i\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t dt$

$$=i\int_0^{\pi}\left[\cos(1+\omega)t-\cos(1-\omega)t\right]dt=i\left[\frac{\sin(1+\omega)t\Big|_0^{\pi}}{1+\omega}-\frac{\sin(1-\omega)t\Big|_0^{\pi}}{1-\omega}\right]$$

$$=i\frac{\sin(1+\omega)\pi-\omega\sin(1+\omega)\pi-\sin(1-\omega)\pi-\omega\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega^2}=-2i\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-2i\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\right)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$$

因此有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$

4．已知某函数 $f(t)$ 的傅氏变换为 $F(\omega)=\dfrac{\sin\omega}{\omega}$，求该函数 $f(t)$。

解 $\displaystyle f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t)d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1+t)\omega+\sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1+t)\omega}{\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega \qquad (*)$$

而由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ 得

当 $u>0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\omega}{\omega}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\omega}{u\omega}du\omega=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

当 $u<0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\omega}{\omega}d\omega=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(-u)\omega}{\omega}d\omega=-\frac{\pi}{2}$

当 $u=0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\omega}{\omega}d\omega=0$, 所以由(*)式有

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |t|<1\\ \frac{1}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

5．已知某函数的傅氏变换为 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，求该函数 $f(t)$。

解 $\displaystyle f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$

$$=\frac{e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}+e^{\mathrm{i}\omega_0 t}}{2}=\cos\omega_0 t$$

6．求符号函数（又称正负号函数）$\operatorname{sgn} t=\dfrac{t}{|t|}=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的傅氏变换。

解 符号函数不满足傅氏积分定理的条件，显然 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\operatorname{sgn} t|dt\to+\infty$ 不收敛。按照如下方式推广傅氏变换的定义。首先注意到可取 $f_n(t)=\begin{cases}e^{-t/n}, & t>0\\ 0 & t=0\\ -e^{t/n} & t<0\end{cases}$，且 $\operatorname{sgn} t=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$，$F[\operatorname{sgn} t]\overset{df}{=}\lim\limits_{n\to\infty}F[f_n(t)]$，而

$f_n(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，且

$$F_n[\omega]=¶\left[f_n(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t/n}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt-\int_{-\infty}^{0}e^{t/n}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{n}+\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{\frac{1}{n}-\mathrm{i}\omega}=\frac{-2\omega\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\omega^2}$$

故 $F[\omega]=\P\left[f\left(t\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}F_n[\omega]=\dfrac{-2\omega\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\omega^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{\mathrm{i}\omega}, & \omega\neq 0\\ 0, & \omega=0\end{cases}$

注： 一般地，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$，且 $f_n(x)$ 古典意义下的傅氏变换 $F_n[\omega]=\P\left[f_n\left(t\right)\right]$，$(n=1,2,\cdots)$ 都存在，且当 $n\to+\infty$，函数族 $\{F[\omega]\}$ 收敛，则称该极限为 $f(x)$ 在极限意义下的傅氏变换，即

$$F[\omega]=\P[f(x)]=\lim_{n\to+\infty}F_n[\omega]$$

7．求函数 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\dfrac{a}{2})+\delta(t-\dfrac{a}{2})]$ 的傅氏变换。

解 $F(\omega)=\P[f(t)]$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t+a\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-a\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t+\frac{a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{a}{2}\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\omega a}+e^{\mathrm{i}\omega a}+e^{-\mathrm{i}\omega\frac{a}{2}}+e^{\mathrm{i}\omega\frac{a}{2}}\right)=\cos\omega a+\cos\frac{\omega a}{2}$$

8．求函数 $f(t)=\cos t\sin t$ 的傅氏变换。

解 $F(\omega)=\P\left[f\left(t\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\sin te^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 2te^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{\mathrm{i}2t}-e^{-\mathrm{i}2t}}{2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}(\omega-2)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}(\omega+2)t}dt\right]=-\frac{1}{4\mathrm{i}}[2\pi\delta(\omega+2)-2\pi\delta(\omega-2)]$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$$

9．求函数 $f(t)=\sin^3 t$ 的傅氏变换。

解 $F(\omega)=\P\left[f\left(t\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 te^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(3\sin t-\sin 3t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$

$$=\frac{\mathrm{i}\pi}{4}[3\delta(\omega+1)-3\delta(\omega-1)-\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)]。$$

10．求函数 $f(t)=\sin(5t+\dfrac{\pi}{3})$ 的傅氏变换。

解 $F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(5t+\dfrac{\pi}{3})e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin 5t+\sqrt{3}\cos 5t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{i}\pi[\delta(\omega+5)-\delta(\omega-5)]+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]=\frac{\pi}{2}[(\sqrt{3}+\mathrm{i})\delta(\omega+5)+(\sqrt{3}-\mathrm{i})\delta(\omega-5)]$$

11．证明 $\delta-$ 函数是偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$。

证　设 $f(x)$ 为任意一个在 $(-\infty,+\infty)$ 无穷次可微的函数，则

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)f(-u)du=f(0)$，又由 $\delta-$函数的筛选性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$，知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt$，故 $\delta-$函数是偶函数。

12．证明：若 $\P[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$，其中 $\varphi(t)$ 为一实函数，则

$$\P[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}],\quad \P[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}],$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(-\omega)$ 的共轭函数。

证　因为　$e^{j\varphi(t)}=\cos\varphi(t)+j\sin\varphi(t)$，$e^{-j\varphi(t)}=\cos\varphi(t)-j\sin\varphi(t)$

所以
$$\cos\varphi(t)=\frac{e^{i\varphi(t)}+e^{-i\varphi(t)}}{2}\qquad(*)$$
$$\sin\varphi(t)=\frac{e^{i\varphi(t)}-e^{-i\varphi(t)}}{2i}\qquad(**)$$

但
$$\P\left[e^{-i\varphi(t)}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\varphi(t)}e^{-i\omega t}dt=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\varphi(t)}e^{-i(-\omega)t}dt}=\overline{F(-\omega)}$$

由本题 $(*)$、$(**)$ 式得

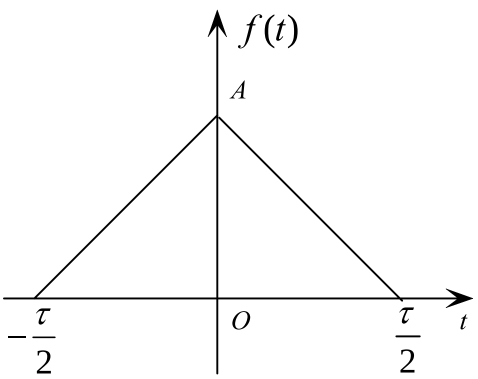
$$\P[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}\{\P\left[e^{i\varphi(t)}\right]+\P\left[e^{-i\varphi(t)}\right]\}=\frac{1}{2}\left[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}\right]$$
$$\P[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2i}\{\P\left[e^{i\varphi(t)}\right]-\P\left[e^{-i\varphi(t)}\right]\}=\frac{1}{2i}\left[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}\right]$$

13．证明周期为 T 的非正弦函数 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-\omega_0)$，其中 c_n 为 $f(t)$ 的傅氏级数展式中的系数。

证　设 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，则周期为 T 的非正弦函数 $f(t)$ 的傅氏级数的复指数形式为：$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\omega_0 t}$

$$F(\omega)=\P\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-n\omega_0)t}dt$$
$$=\sum_{-\omega}^{+\omega}c_n2\pi\delta(\omega-n\omega_0)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)$$

14．求如图所示的三角形脉冲的频谱函数。

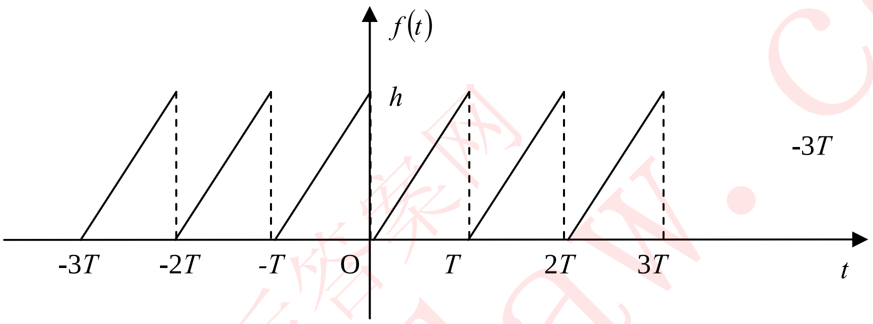


解 $f(t)=\begin{cases}0, & |t|>\tau/2\\ -\dfrac{2A}{\tau}t+A, & 0\le t\le \tau/2\\ \dfrac{2A}{\tau}t+A, & -\tau/2\le t\le 0\end{cases}$，则 $f(t)$ 的频谱函数为

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\int_{-\tau/2}^{0}(\frac{2A}{\tau}t+A)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt+\int_{0}^{\tau/2}(-\frac{2A}{\tau}t+A)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$$

$$=\frac{2A}{\tau}\left[\frac{2-2e^{\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}+\mathrm{i}\omega\tau}{2\omega^2}-\frac{-2+2e^{\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}+\mathrm{i}\omega\tau}{2\omega^2}\right]=\frac{4A}{\tau\omega^2}\left(1-\cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

15．求作如图所示的锯齿形波的频谱图。



解 如图可知，在一个周期 T 内的表达式为 $f(t)=\frac{h}{T}t(0\le t<T)$，它的傅氏级数的复指数形式为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{\mathrm{i}n\omega t}$$

可见 $f(t)$ 的傅氏系数为

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{h}{T}tdt=\frac{h}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T=\frac{h}{2}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{\mathrm{i}n\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{h}{T}te^{-\mathrm{i}n\omega t}dt=\frac{h}{T^2}\int_0^T te^{-\mathrm{i}n\omega t}dt$$

$$=\frac{h}{T^2}\left[t\frac{e^{-\mathrm{i}n\omega t}}{-\mathrm{i}n\omega}\Big|_0^T+\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}\int_0^T e^{-\mathrm{i}n\omega t}dt\right]=\frac{h}{T^2}\left[\frac{Te^{-\mathrm{i}n\omega T}}{-\mathrm{i}n\omega}+\frac{e^{-\mathrm{i}n\omega T}-1}{n^2\omega^2}\right]$$

$$=\frac{h\mathrm{i}}{n\omega T}\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots)$$

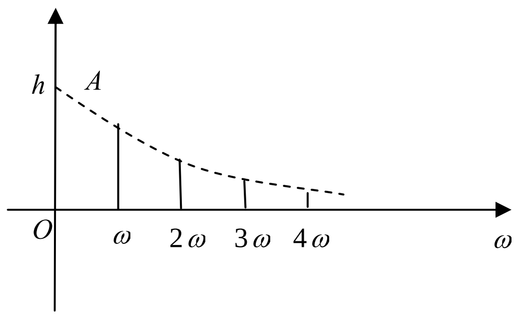
它的频谱为

$A_0=2|C_0|=h$，$A_0=2|C_n|=\dfrac{2h}{n\omega T}=\dfrac{h}{n\pi}$，

其中

$$\omega_n=n\omega=\frac{2n\pi}{T}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

这样对应不同的频率得出各次谐波的振幅，因此频谱图如图所示．



16．求高斯（Gauss）分布函数 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ 的频谱函数

解　教科书中 P10，例 2 已解得钟形脉冲函数 $Ae^{-\beta t^2}$ 的傅氏变换为 $A\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/4\beta}$，本题中 $A=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，$\beta=\dfrac{1}{2\sigma^2}$，所以

$$F(\omega)=\P\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

习题三

1．若 $F_1(\omega)=\P\left[f_1(t)\right]$，$F_2(\omega)=\P\left[f_2(t)\right]$，$\alpha,\beta$ 是常数，证明（线性性质）：

$$\P\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)，$$

$$\P^{-1}\left[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)\right]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)。$$

证　$\P\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt+\beta\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt$

$$=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

2．若 $F(\omega)=\P[f(t)]$，证明（对称性质）：$f(\pm\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt$，即 $\P[F(\mp t)]=2\pi f(\pm\omega)$。

证　因 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$，令 $x=-t$，$f(-t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega$　　　　(*)

令 $t=\omega$，则 $f(-\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{2\pi}\P[F(t)]$，即 $\P[F(t)]=2\pi f(-\omega)$；

（*）式中令 $-t=\omega$，则 $f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-t)e^{-\mathrm{i}\omega t}d(-t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\dfrac{1}{2\pi}\P[F(t)]$，即 $\P[F(-t)]=2\pi f(\omega)$。

3．若 $F(\omega)=\P[f(t)]$，a 为非零常数，证明（相似性质）$\P\left[f(at)\right]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$。

证　设 $a>0$，有 $\P[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}at}\dfrac{1}{a}d(at)=\dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}u}du=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$；

同理 $a>0$ 时，$\P[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}at}\frac{1}{a}d(at)=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}u}du=-\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$；

综上，$\P\left[f(at)\right]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$。

4．若 $F(\omega)=\P\left[f(t)\right]$，证明（象函数的位移性质）：

$$\P^{-1}\left[F(\omega\mp\omega_0)\right]=e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}f\left(t\right)\text{，即 }F(\omega\mp\omega_0)=\P[e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}f\left(t\right)]\text{。}$$

证　$\P[e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}f\left(t\right)]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}(\omega\mp\omega_0)t}dt=F(\omega\mp\omega_0)$。

5．若 $F(\omega)=\P\left[f(t)\right]$，证明（象函数的微分性质）：$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\P[-\mathrm{j}tf\left(t\right)]$。

证　$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\frac{d}{d\omega}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{j}tf\left(t\right)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\P[-\mathrm{j}tf\left(t\right)]$。

6．若 $F(\omega)=\P\left[f(t)\right]$，证明（翻转性质）

$$F(-\omega)=\P[f\left(-t\right)]$$

证　$F\left(-\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{i}(-\omega)t}dt=\int_{+\infty}^{-\infty} f\left(-t\right)e^{-\mathrm{i}(-\omega)(-t)}d\left(-t\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(-t\right)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt=\P\left[f\left(-t\right)\right]$。

7．若 $F(\omega)=\P\left[f(t)\right]$，证明：$\P[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$，

$$\P[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]\text{。}$$

证　$\P[f(t)\cos\omega_0 t]=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\frac{e^{\mathrm{j}\omega_0 t}+e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)t}dt\right]$

$$=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]\text{；}$$

$\P[f(t)\sin\omega_0 t]=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\frac{e^{\mathrm{j}\omega_0 t}-e^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)t}dt\right]$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]\text{。}$$

8．利用能量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$，求下列积分的值：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$；　（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$；　（3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；　（4）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

解　（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\P\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right|^2d\omega$　　　(*)

$$\P\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\mathrm{i}\omega x}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\omega x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(1+\omega\right)x+\sin\left(1-\omega\right)x}{x}dx\qquad(**)$$

再由
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

得
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+\omega)x}{x}dx=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & \omega<-1\\ 0, & \omega=-1\\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega>-1\end{cases}，\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\omega)x}{x}dx=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & \omega>1\\ 0, & \omega=1\\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega<1\end{cases}$$

所以由（**）式得
$$\P\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\begin{cases}\pi, & -1<\omega<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此由（*）式得
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\pi^2 d\omega=\pi$$

（2）
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\P\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right|^2d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2d\omega=\frac{\pi}{2}$$

（3）参见本题第 4 小题。

（4）
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dt=\arctan x\,|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\P\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\right|^2d\omega$$
$$\P\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-\mathrm{i}\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}dx\quad\text{（利用留数理论计算）}$$
$$\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}|\omega|t}}{1+t^2}dt\right\}=\mathrm{Re}\left\{2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\mathrm{i}|\omega|z}}{1+z^2},\mathrm{i}\right]\right\}$$
$$\mathrm{Re}\left\{2\pi\,\mathrm{i}\frac{e^{-|\omega|}}{1+\mathrm{i}}\right\}=\mathrm{Re}\{(\pi\,\mathrm{i}+\pi)e^{-|\omega|}\}=\pi e^{-|\omega|}$$

故
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^2e^{-2|\omega|}d\omega=\pi\int_0^{+\infty}e^{-2\omega}d\omega=\pi\frac{e^{-2\omega}}{-2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

于是
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}。$$

习题四

1、证明下列各式：

(1) $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$；

(2) $f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$；

(3) $a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]$（$a$ 为常数）；

(4) $e^{\alpha t}[f_1(t)*f_2(t)]=\left[e^{\alpha t}f_1(t)\right]*\left[e^{\alpha t}f_2(t)\right]$（$a$ 为常数）；

(5) $[f_1(t)+f_2(t)]*[g_1(t)+g_2(t)]=f_1(t)*g_1(t)+f_2(t)*g_1(t)+f_1(t)*g_2(t)+f_2(t)*g_2(t)$；

(6) $\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\left(\frac{df_1(t)}{dt}\right)*f_2(t)=f_1(t)*\left(\frac{df_2(t)}{dt}\right)$.

证 (1) $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t-u)f_2(u)du=f_2(t)*f_1(t)$；

(2) 记 $g(x)=f_2(t)*f_3(t)$，

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\zeta)f_2(\tau-\zeta)d\zeta\right]f_3(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\zeta)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau-\zeta)f_3(t-\tau)d\tau\right]d\zeta=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\zeta)g(t-\zeta)d\zeta$$

$$=f_1(t)*g(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]；$$

(3) $a[f_1(t)*f_2(t)]=a\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}[af_1(\tau)]f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)[af_2(t-\tau)]d\tau$

$$=[af_1(t)]*f_2(t)=f_1(t)*[af_2(t)]；$$

(4) $\left[e^{\alpha t}f_1(t)\right]*\left[e^{\alpha t}f_2(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\alpha\tau}f_1(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}f_2(t-\tau)d\tau$

$$=e^{\alpha t}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=e^{\alpha t}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]；$$

(5) $[f_1(t)+f_2(t)]*[g_1(t)+g_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(\tau)+f_2(\tau)]\cdot[g_1(t-\tau)+g_2(t-\tau)]d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot g_1(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot g_2(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)\cdot g_1(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\tau)\cdot g_2(t-\tau)d\tau$$

$$=f_1(t)*g_1(t)+f_2(t)*g_1(t)+f_1(t)*g_2(t)+f_2(t)*g_2(t)；$$

(6) $\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\frac{d}{dt}f_2(t-\tau)\right]d\tau=f_1(t)*\left[\frac{d}{dt}f_2(t)\right]$

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\frac{d}{dt}\left[f_2(t)*f_1(t)\right]=f_2(t)*\left[\frac{d}{dt}f_1(t)\right]=\left[\frac{d}{dt}f_1(t)\right]*f_2(t)$$

因此有 $\frac{d}{dt}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right]*f_2(t)=f_1(t)*\left[\frac{df_2(t)}{dt}\right]$。

3．若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}, & t\geq 0\end{cases}$ 与 $f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；求 $f_1(t)*f_2(t)$。

解 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}f_2(t-\tau)d\tau$ (*)

当 $0<t\le\frac{\pi}{2}$ 时，(*) 式为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t e^{-\tau}\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\tau}\frac{e^{\mathrm{i}(t-\tau)}-e^{-\mathrm{i}(t-\tau)}}{2\mathrm{i}}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}t}\int_0^t e^{-(1+\mathrm{i})\tau}d\tau-e^{-\mathrm{i}t}\int_0^t e^{-(1-\mathrm{i})\tau}d\tau\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1+\mathrm{i})\tau}\Big|_0^t}{-(1+\mathrm{i})}-e^{-\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1-\mathrm{i})\tau}\Big|_0^t}{-(1-\mathrm{i})}\right]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1+\mathrm{i})t}-1}{-(1+\mathrm{i})}-e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1-\mathrm{i})t}-1}{-(1-\mathrm{i})}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-t}}{1+\mathrm{i}}+\frac{e^{-t}-e^{-\mathrm{i}t}}{1-\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-t}-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}+\mathrm{i}e^{-t}+e^{-t}-e^{-\mathrm{i}t}+\mathrm{i}e^{-t}-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}-\frac{\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}\right)}{2\mathrm{i}}+\frac{2\mathrm{i}e^{-t}}{2\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t+e^{-t}\right)$$

当 $t>\frac{\pi}{2}$ 时，(*) 式为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-\frac{\pi}{2}}^t e^{-\tau}\sin(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1+\mathrm{i})\tau}\Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1+\mathrm{i})}-e^{-\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1-\mathrm{i})\tau}\Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t}{-(1-\mathrm{i})}\right]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1+\mathrm{i})\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-(1+\mathrm{i})t}}{1+\mathrm{i}}+e^{-\mathrm{i}t}\frac{e^{-(1-\mathrm{i})t}-e^{-(1-\mathrm{i})\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}}{1-\mathrm{i}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{-t}\left(\frac{\mathrm{i}e^{\frac{\pi}{2}}-1}{1+\mathrm{i}}+\frac{1+\mathrm{i}e^{\frac{\pi}{2}}}{1-\mathrm{i}}\right)=\frac{e^{-t}}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}e^{\frac{\pi}{2}}-1+e^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}e^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{i}-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}\left(1+e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

当 $t<0$ 时，(*) 式为 0.

故有

$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0, & \text{当}t\le 0\text{时}\\ \frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t+e^{-t}\right), & \text{当}0<t\le\frac{\pi}{2}\text{时}\\ \frac{e^{-t}}{2}\left(1+e^{\frac{\pi}{2}}\right), & \text{当}t>\frac{\pi}{2}\text{时}\end{cases}$$

3．若 $F_1(\omega)=\P\left[f_1(t)\right]$，$F_2(\omega)=\P\left[f_2(t)\right]$，证明 $\P[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$。

证 $\P^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\tau)F_2(\omega-\tau)d\tau]e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-\tau)e^{i(\omega-\tau)t}d(\omega-\tau)e^{i\tau t}F_1(\tau)d\tau=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t)$$

4、求下列函数的傅氏变换.

（1） $f(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$； （2） $f(t)=e^{-\beta t}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$； （3） $f(t)=e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$；

（4） $f(t)=e^{j\omega_0 t}u(t)$； （5） $f(t)=e^{j\omega_0 t}u(t-t_0)$； （6） $f(t)=e^{j\omega_0 t}t\cdot u(t)$

解（1） $F(\omega)=\P[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\sin(\omega_0 t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}dt\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)-\frac{1}{i(\omega+\omega_0)}-\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=-\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}-\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]=\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi i}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

（2） $F(\omega)=\P[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}u(t)\sin\omega_0 te^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(e^{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]t}-e^{-[\beta+i(\omega+\omega_0)]t}\right)dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]t}\Big|_0^{+\infty}}{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]}-\frac{e^{-[\beta+i(\omega+\omega_0)]t}\Big|_0^{+\infty}}{-[\beta+i(\omega+\omega_0)]}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\beta+i(\omega-\omega_0)}-\frac{1}{\beta+i(\omega+\omega_0)}\right)=\frac{1}{2i}\frac{2i\omega_0}{(\beta+i\omega)+\omega_0^2}=\frac{\omega_0}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0^2}$$

（3） $F(\omega)=\P[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}u(t)\cos\omega_0 te^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{-[\beta+i(\omega-\omega_0)]t}+e^{-[\beta+i(\omega+\omega_0)]t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta+i(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\beta+i(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$=\frac{\beta+i\omega}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0^2}$$

（4）由像函数的位移性质及$\P[u(t)]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$得

$$\P\left[e^{i\omega_0 t}u(t)\right]=\frac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

（5）根据位移性质

$$\P[u(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}\ \P[u(t)]=e^{-i\omega t_0}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

再根据像函数的位移性质

$$\P\left[e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)\right]=e^{-i(\omega-\omega_0)t_0}\left[\frac{1}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$=\frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t_0}}{i(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

（6）由微分性质$\P[(-it)^n f(t)]=F^{(n)}(\omega)$得

$$\P[tu(t)]=\mathrm{i}\frac{d}{d\omega}\P[u(t)]=\mathrm{i}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)\right)'=-\frac{1}{\omega^2}+\pi\,\mathrm{i}\,\delta'(\omega)$$

再由象函数的位移性质得

$$\P\left[e^{\mathrm{i}\omega_0 t}tu(t)\right]=\frac{-1}{(\omega-\omega_0)^2}+\pi\,\mathrm{i}\,\delta'(\omega-\omega_0)$$

5．证明互相关函数和互能量谱密度的下列性质：$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$，$\mathrm{S}_{21}(\omega)=\overline{S_{12}(\omega)}$。

证　$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t+\tau)f_2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)f_2(u-\tau)du=R_{12}(-\tau)$；

$\mathrm{S}_{21}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{21}(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{12}(-\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{12}(\tau)e^{\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{12}(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau}=\overline{S_{12}(\omega)}$。

6．已知某信号的相关函数$R(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2a|\tau|}$，求它的能量谱密度$S(\omega)$。

证　$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2a|\tau|}e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\frac{1}{4}\left[\int_{0}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}(\omega-2a\mathrm{i})\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{0}e^{-\mathrm{i}(\omega+2a\mathrm{i})\tau}d\tau\right]$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-2a\mathrm{i})}-\frac{1}{\mathrm{i}(\omega+2a\mathrm{i})}\right]==\frac{a}{4a^2+\omega^2}。$$

7．已知某波形的相关函数$R(\tau)=\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$（$\omega_0$为常数），求这个波形的能量谱密度．

解　波形的能量谱密度

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\P[\cos\omega_0 t]=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

8．若函数$f_1(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & 0\le t\le a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，与$f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数$R_{12}(\tau)$。

证　当$|\tau|>a$时，$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt=0$；

当$0<\tau\le a$时，$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt=\int_{0}^{a-\tau}\frac{b}{a}tdt=\frac{b}{2a}(a-\tau)^2$；

当$-a\le\tau\le 0$时，$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)dt=\int_{-\tau}^{a}\frac{b}{a}tdt=\frac{b}{2a}(a^2-\tau^2)$.

拉氏变换习题解答

习题一

1．求下列函数的拉氏变换,并用查表的方法来验证结果.

(1) $f(t)=\sin\dfrac{t}{2}$ ；　(2) $f(t)=e^{-2t}$ ；　(3) $f(t)=t^2$ ；　(4) $f(t)=\sin t\cos t$ ；

(5) $f(t)=\sinh kt$ ；　(6) $f(t)=\cosh kt$ ；　(7) $f(t)=\cos^2 t$；　(10) $f(t)=\cos^2 t$.

解　(1) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\sin\frac{t}{2}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{(e^{\frac{\mathrm{i}t}{2}}-e^{\frac{-\mathrm{i}t}{2}})e^{-st}}{2\mathrm{i}}dt$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}(e^{-(s-\frac{\mathrm{i}}{2})t}-e^{-(s+\frac{\mathrm{i}}{2})t})dt=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{e^{-(s-\frac{\mathrm{i}}{2})t}\Big|_0^{+\infty}}{-s+\frac{\mathrm{i}}{2}}-\frac{e^{-(s+\frac{\mathrm{i}}{2})t}\Big|_0^{+\infty}}{-s-\frac{\mathrm{i}}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{s-\frac{\mathrm{i}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{\mathrm{i}}{2}}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{s+\frac{\mathrm{i}}{2}-s+\frac{\mathrm{i}}{2}}{\left(s-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(s+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}=\frac{2}{4s^2+1}\qquad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

(2) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-2t}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s+2)t}dt=\dfrac{e^{-(s+2)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s+2)}=\dfrac{1}{s+2}\qquad(\mathrm{Re}\,s>-2)$

(3) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}t^2e^{-st}dt=-\dfrac{e^{-st}}{s}t^2\Big|_0^{+\infty}+\dfrac{1}{s}\int_0^{+\infty}2te^{-st}dt=-\dfrac{2}{s^2}te^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\dfrac{2}{s^2}\int_0^{+\infty}e^{-st}dt$

$$=-\frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_{t=0}^{+\infty}=\frac{2}{s^2}\qquad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

(4) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\sin t\cos te^{-st}dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2te^{-st}dt=\dfrac{1}{4\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-(s-2\mathrm{i})t}-e^{-(s+2\mathrm{i})t}\right]dt$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[\frac{e^{-(s-2\mathrm{i})t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s-2\mathrm{i})}-\frac{e^{-(s+2\mathrm{i})t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s+2\mathrm{i})}\right]=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-2\mathrm{i}}-\frac{1}{s+2\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{s^2+4}\qquad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

(5) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\sinh kte^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}e^{-st}dt=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt-\int_0^{+\infty}e^{-(s+k)t}dt\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s-k)}-\frac{e^{-(s+k)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s+k)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2}\qquad(\mathrm{Re}\,s>\max\{k,-k\})$$

(6) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\cosh kte^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}e^{-st}dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-(s+k)t}dt\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s-k)}+\frac{e^{-(s+k)t}\Big|_0^{+\infty}}{-(s+k)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2}\qquad(\mathrm{Re}\,s>\max\{k,-k\})$$

(7) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\cos^2 t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(1+\cos 2t)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-st}dt+\int_0^{+\infty}\cos 2t\cdot e^{-st}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}\qquad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

(8) $\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\sin^2 t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(1-\cos 2t)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}\cos 2t\cdot e^{-st}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)=\frac{2}{s(s^2+4)}\qquad(\mathrm{Re}\,s>0)$$

2．求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<2\\ -1, & 2\le t<4\\ 0, & t\ge 4.\end{cases}$;　　(2) $f(t)=\begin{cases}3, & t<\frac{\pi}{2}\\ \cos t, & t>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

(3) $f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$;　　(4) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$.

解　(1)　$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{2}3e^{-st}dt-\int_2^{4}e^{-st}dt=\frac{3e^{-st}\Big|_0^2}{-s}+\frac{3e^{-st}\Big|_2^4}{s}=\frac{1}{s}(3-4e^{-2s}+e^{-4s})$

(2)　$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3e^{-st}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\cos t\cdot e^{-st}dt$

$$=\frac{3}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}e^{-st}dt=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-\frac{\pi s}{2}}+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}(e^{-(s-\mathrm{i})t}+e^{-(s+\mathrm{i})t})dt$$

$$=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-\frac{\pi s}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-\mathrm{i})t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{+\infty}}{-(s-\mathrm{i})}+\frac{e^{-(s+\mathrm{i})t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{+\infty}}{-(s+\mathrm{i})}\right]=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-\frac{\pi s}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-(s-\mathrm{i})\frac{\pi}{2}}}{s-\mathrm{i}}-\frac{e^{-(s+\mathrm{i})\frac{\pi}{2}}}{s+\mathrm{i}}\right)$$

$$=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-\frac{\pi s}{2}}-\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi s}{2}}$$

(3)　$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_0^{+\infty}\left[e^{2t}+5\delta(t)\right]e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{2t}e^{-st}dt+5\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{s-2}+5\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s-2}+5e^{-st}\Big|_{t=0}=\frac{5s-9}{s-2}$$

(4)　$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot\cos t\cdot e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}\sin te^{-st}dt=\cos t\cdot e^{-st}\Big|_{t=0}-\frac{1}{s^2+1}=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}$

3．设 $f(t)$ 是以 2π 为周期的函数,且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\le\pi\\ 0, & \pi<t<2\pi\end{cases}，\text{求}\mathscr{L}\left[f(t)\right].$$

解　周期为 T 的函数 $f(t)$ 的拉氏变换为

$$\& [f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt,(\mathrm{Re}\, s>0)$$

因此有

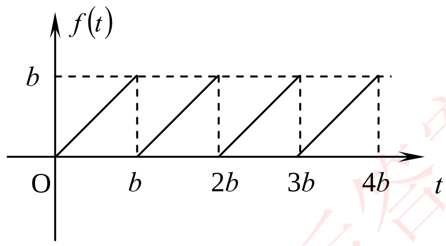
$$\& [f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\frac{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{e^{-(s-\mathrm{i})t}\Big|_{t=0}^{\pi}}{-(s-\mathrm{i})}-\frac{e^{-(s+\mathrm{i})t}\Big|_{t=0}^{\pi}}{-(s+\mathrm{i})}\right]$$

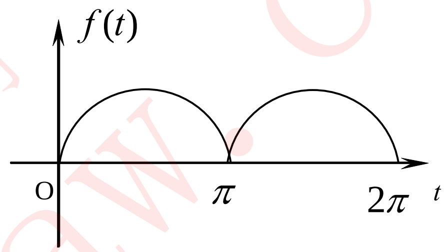
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1-e^{-(s-\mathrm{i})\pi}}{s-\mathrm{i}}-\frac{1-e^{-(s+\mathrm{i})\pi}}{s+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}=\frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}。$$

4.求下列各图所示周期函数的拉氏变换

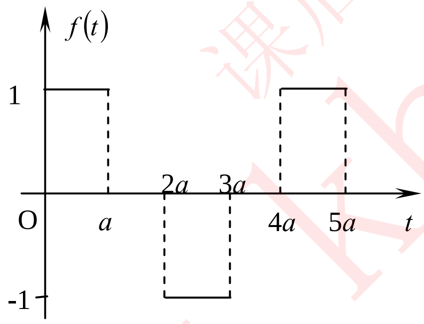
(1)



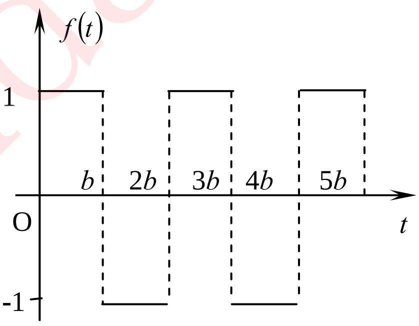
(2)



(3)



(4)



解　(1)由图易知 $f(t)$ 是周期为 b 的函数,且在一个周期内的表达式为

$$f(t)=t,\qquad 0\le t<b$$

由公式

$$\& [f(t)]=\frac{1}{1-e^{-bs}}\int_0^b te^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-bs}}\left[-\frac{1}{s}te^{-bs}\Big|_0^b-\left(-\frac{1}{s}\right)\int_0^b e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-bs}}\left[-\frac{be^{-bs}}{s}-\frac{1}{s^2}(e^{-bs}-1)\right]=\frac{1}{1-e^{-bs}}\cdot\frac{bs-bse^{-bs}+1-e^{-bs}-bs}{s^2}$$

$$=\frac{1+bs}{s^2}-\frac{b}{s(1-e^{-bs})}$$

(2)已知 $f(t)$ 是周期 $T=\pi$ 的周期函数,在一个周期内

$$f(t)=\sin t,\qquad 0\le t<\pi$$

由公式

$$\&\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-bs}}\int_0^{\pi}\sin te^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\frac{1+e^{\pi s}}{1+s^2}$$

$$=\frac{1}{1+s^2}\coth\frac{\pi s}{2}$$

(3)由图可知 $f(t)$ 是周期 $T=4a$ 的周期函数,在一个周期内

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<a\\ 0, & a\le t<2a\\ -1, & 2a\le t<3a\\ 0, & 3a\le t<4a\end{cases}$$

由公式

$$\&\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-4as}}\int_0^{4a}f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-4as}}\left[\int_0^{a}e^{-st}dt+\int_{2a}^{3a}(-1)e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-4as}}\left(\frac{e^{-st}\Big|_{t=0}^{a}}{-s}-\frac{e^{-st}\Big|_{t=2a}^{3a}}{-s}\right)=\frac{1}{1-e^{-4as}}\cdot\frac{1-e^{-as}+e^{-3as}-e^{-2as}}{s}$$

$$=\frac{\left(1-e^{-as}\right)\left(1-e^{-2as}\right)}{s\left(1-e^{-4as}\right)}=\frac{\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)}{s\left(1+e^{-2as}\right)\left(1+e^{-as}\right)}$$

$$=\frac{1}{s\left(1+e^{-as}\right)}\cdot\frac{1-e^{-2as}}{1+e^{-2as}}=\frac{1}{s\left(1+e^{-as}\right)}\tanh as$$

(4)由图易知, $f(t)$ 是周期为 $2b$ 的周期函数,在一个周期内

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<b\\ -1, & b\le t<2b\end{cases}$$

由公式

$$\&\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\left(\int_0^{b}e^{-st}dt+\int_b^{2b}(-1)e^{-st}dt\right)$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\left[\frac{e^{-st}\Big|_{t=0}^{b}}{-s}-\frac{e^{-st}\Big|_{t=b}^{2b}}{-s}\right]=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\cdot\frac{1-e^{-bs}+e^{-2bs}-e^{-bs}}{s}$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{\left(1-e^{-bs}\right)^2}{1-e^{-2bs}}=\frac{1}{s}\tanh\frac{bs}{2}$$

习题二

1．求下列函数的拉氏变换式.

(1) $f(t)=t^2+3t+2$ (2) $f(t)=1-te^{t}$

(3) $f(t)=(t-1)^2e^{t}$ (4) $f(t)=\dfrac{t}{2\alpha}\sin at$

(5) $f(t)=t\cos at$ (6) $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$

(7) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$ (8) $f(t)=e^{-4t}\cos 4t$

(9) $f(t)=t^n e^{at}$ (10) $f(t)=u(3t-5)$

(11) $f(t)=u\left(1-e^{-t}\right)$ (12) $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}$

解 (1) 利用$\&\left[t^{\alpha}\right]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\alpha>-1$，

$$\&[f(t)]=\&\left[t^2+3t+2\right]=\&\left[t^2\right]+3\&\left[t^{\frac{3}{2}}\right]+2\&[1]$$

$$=\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}$$

(2) $\&[f(t)]=\&\left[1-te^t\right]=\&[1]-\&\left[te^t\right]=\dfrac{1}{s}+\dfrac{d}{ds}\&\left[e^t\right]=\dfrac{1}{s}-\left(\dfrac{1}{s-1}\right)'-=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$

(3) $\&[f(t)]=\&\left[(t-1)^2e^t\right]=\&\left[(t^2-2t+1)e^t\right]=\dfrac{d^2}{ds^2}\&[e^t]+2\dfrac{d}{ds}\&[e^t]+\&[e^t]$

$$=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$$

(4) $\&[f(t)]=\&\left[\dfrac{t}{2a}\sin at\right]=\dfrac{1}{2a}\&[t\sin at]=-\dfrac{1}{2a}\dfrac{d}{ds}\&[\sin at]=-\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)'=\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$

(5) $\&[f(t)]=\&[t\cos at]=-\dfrac{d}{ds}\&[\cos at]=-\left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right)'=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(6) $\&[f(t)]=\&[5\sin 2t-3\cos 2t]=5\&[\sin 2t]-3\&[\cos 2t]=\dfrac{10}{s^2+4}-\dfrac{3s}{s^2+4}=\dfrac{10-3s}{s^2+4}$

(7) $\&[f(t)]=\&\left[e^{-2t}\sin 6t\right]=\dfrac{6}{(s+2)^2+36}$

这里有

$$\&[\sin 6t]=\frac{6}{s^2+36}$$

再利用位移性质得到.

(8) 同 (7) 利用$\&[\cos 4t]=\dfrac{s}{s^2+16}$ 及位移性质

$$\&[f(t)]=\&\left[e^{-4t}\cos 4t\right]=\frac{s+4}{(s+4)^2+16}$$

(9) 利用$\&\left[t^n\right]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ 及位移性质得

$$\&[f(t)]=\&\left[t^n e^{at}\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

（10）解法 1 由 $u(3t-5)=\begin{cases}1, & t>\frac{5}{3}\\ 0, & t<\frac{5}{3}\end{cases}$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[u(3t-5)]=\int_0^{+\infty}u(3t-5)e^{-st}dt$$

$$=\int_{\frac{5}{3}}^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{e^{-st}\Big|_{t=\frac{5}{3}}^{+\infty}}{-s}=\frac{e^{-\frac{5}{3}s}}{s}$$

解法 2　由相似性质

$$\mathscr{L}[u(3t)]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{s}{3}}=\frac{1}{s}$$

由位移性质

$$\mathscr{L}[u(3t-5)]=\mathscr{L}\{u\left[3\left(t-\frac{5}{3}\right)\right]\}=e^{-\frac{5}{3}s}\mathscr{L}[u(3t)]=\frac{e^{-\frac{5}{3}s}}{s}$$

（11）因为 $u(1-e^{-t})=\begin{cases}1, & 1-e^{-t}>0, \quad t>0\\ 0, & 1-e^{-t}<0, \quad t<0\end{cases}$

所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}$$

（12）利用 $\mathscr{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$ 及位移性质

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}\left[\frac{e^{3t}}{\sqrt{t}}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{s-3}}$$

2．若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，a 为正实数，证明（相似性质）$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$。

证　$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}dt=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(at)e^{-\frac{s}{a}at}d(at)=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

3．若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，证明 $F^{(n)}(s)=\mathscr{L}[(-t)^n f(t)]$，$\mathrm{Re}(s)>c$。特别 $\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$，或 $f(t)=-\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$，并利用此结论，计算下列各式：

（1）$f(t)=te^{-3t}\sin 2t$，求 $F(s)$；（2）$f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt$，求 $F(s)$；

（3）$F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}$，求 $f(t)$；　（4）$f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2tdt$，求 $F(s)$。

解　$F^{(n)}(s)=\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{d^n}{ds^n}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{ds^n}[f(t)e^{-st}]dt=\int_0^{+\infty}(-t)^n f(t)e^{-st}dt$

$=\&[(-t)^n f(t)]$，$\mathrm{Re}(s)>c$。

（1）利用公式$\&[tf(t)]=-F'(s)$

$$\&[f(t)]=\&\left[te^{-3t}\sin 2t\right]=-\frac{d}{ds}\&[e^{-3t}\sin 2t]=-\left(\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)'=\frac{4(s+3)}{\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

（2）由积分性质

$$\&\left[\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau d\tau\right]=\frac{1}{s}\&\left[e^{-3t}\sin 2t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

再由像函数的微分公式

$$\&[f(t)]=\&\left[t\int_0^t e^{-3\tau}\sin 2\tau d\tau\right]=-\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s[(s+3)^2+4]}\right\}=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2\left[(s+3)^2+4\right]^2}$$

（3）$F'(s)=\left(\ln\dfrac{s+1}{s-1}\right)'=-2\dfrac{1}{s^2-1}=\&[t\dfrac{2}{t}\sinh t]$，知 $f(t)=\dfrac{2}{t}\sinh t$

（4）$\&[f(t)]=\&\left[\displaystyle\int_0^t te^{-3t}\sin 2tdt\right]=\dfrac{1}{s}\&\left[te^{-3t}\sin 2t\right]=\dfrac{4(s+3)}{s\left[(s+3)^2+4\right]^2}$

4．若$\&[f(t)]=F(s)$，证明$\&\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty F(s)ds$，或 $f(t)=t\,\&^{-1}\left[\displaystyle\int_s^\infty F(s)ds\right]$。并利用此结论，计算下列各式：

（1）$f(t)=\dfrac{\sin kt}{t}$，求$F(s)$；　　（2）$f(t)=\dfrac{e^{-3t}\sin 2t}{t}$，求$F(s)$；

（3）$F(s)=\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$，求$f(t)$；　　（4）$f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$，求$F(s)$。

解 $\displaystyle\int_s^\infty F(s)ds=\int_s^\infty\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dtds=\int_0^{+\infty}\int_s^\infty f(t)e^{-st}dsdt=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt=\&\left[\frac{f(t)}{t}\right]$

（1）$F(s)=\&\left[\dfrac{\sin kt}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\ \&[\sin kt]du=\int_s^\infty\frac{k}{u^2+k^2}du=\arctan\frac{u}{k}\Big|_s^\infty$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s}{k}=\operatorname{arc}\cot\frac{s}{k}$$

（2）$F(s)=\&\left[\dfrac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\right]=\displaystyle\int_s^\infty\ \&\left[e^{-3t}\sin 2t\right]du=\int_s^\infty\frac{2}{(u+3)^2+4}du=\arctan\frac{u+3}{2}\Big|_s^\infty$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}=\operatorname{arc}\cot\frac{s+3}{2}$$

（3）$f(t)=t\,\&^{-1}\left[\displaystyle\int_s^\infty\frac{u}{(u^2-1)^2}du\right]=t\,\&^{-1}\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{u^2-1}\Big|_s^\infty\right]=t\,\&^{-1}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}\right]=\frac{1}{4}t\left(e^t-e^{-t}\right)$

$$=\frac{t}{2}\operatorname{sh}t$$

（4） $F(s)=\&\left[\int_0^t\frac{e^{-3\tau}\sin 2\tau}{\tau}d\tau\right]=\frac{1}{s}\&\left[\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}\right]=\frac{1}{s}\cdot\int_s^{\infty}\&\left[e^{-3t}\sin 2t\right]du==\frac{1}{s}\cdot\int_s^{\infty}\frac{2}{(u+3)^2+4}du$

$$=\frac{1}{s}\arctan\frac{u+3}{2}\Big|_{u=s}^{\infty}=\frac{1}{s}\operatorname{arc}\cot\frac{s+3}{2}$$

5．计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt.$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt$ (3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt}{t}dt$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 2tdt.$ (5) $\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt.$ (6) $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2tdt.$

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sh}t\cdot\sin t}{t}dt.$ (8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt.$ (9) $\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\sin tdt.$

(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$. (11) $\int_0^{+\infty}e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}dt.$ (12) $\int_0^{+\infty}\mathrm{J}_0(t)dt.$

其中 $\operatorname{erf}\sqrt{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du$ 称为误差函数，$\mathrm{J}_0(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$ 称为零阶贝塞尔(Bessel)函数。

解 (1)由公式 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{\infty}\&[f(t)]ds$ 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt=\int_0^{\infty}\&\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]ds=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)ds=\ln\frac{s+1}{s+2}\Big|_0^{\infty}=\ln 2$$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos}{t}e^{-t}=\int_0^{\infty}\&\left[e^{-t}(1-\cos t)\right]ds=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]ds=\ln\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt}{t}dt=\int_0^{\infty}\&\left[e^{-at}\cos bt-e^{-mt}\cos nt\right]ds=\int_0^{\infty}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}-\frac{s+m}{(s+m)^2+n^2}\right]ds$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(s+a)^2+b^2}{(s+m)^2+n^2}\Big|_{s=0}^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{m^2+n^2}{a^2+b^2}$$

(4)已知 $\&[\cos 2t]=\int_0^{+\infty}\cos 2t\cdot e^{-st}dt=\frac{s}{s^2+4}$，因此 $\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 2tdt=\frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=3}=\frac{3}{13}$

(5) $\int_0^{+\infty}te^{-2t}dt=\&[t]\Big|_{s=2}=\frac{1}{s^2}\Big|_{s=2}=\frac{1}{4}$

(6)已知 $\&[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$ 再由微分性质 $\&[t\sin 2t]=-\left(\frac{2}{s^2+4}\right)'=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$

得 $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\sin 2tdt=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}\Big|_{s=3}=\frac{12}{169}$

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\operatorname{sh}t\cdot\sin t}{t}dt=\int_0^{\infty}\&\left[e^{-\sqrt{2}t}\frac{e^t-e^{-t}}{2}\sin t\right]ds=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\&\left[e^{-(\sqrt{2}-1)t}\sin t-e^{-(\sqrt{2}+1)t}\sin t\right]ds$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\left(s+\sqrt{2}-1\right)^2+1}-\frac{1}{\left(s+\sqrt{2}+1\right)^2+1}\right]ds=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(s+\sqrt{2}-1\right)\Big|_0^{\infty}-\arctan\left(s+\sqrt{2}+1\right)\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\sqrt{2}+1\right)-\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\right]=\frac{1}{2}\arctan 1=\frac{\pi}{8}$$

(8) $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\mathcal{L}\left[e^{-t}\sin^2 t\right]ds=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathcal{L}\left[e^{-t}(1-\cos 2t)\right]ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right]ds=\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+4}}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{4}\ln 5$$

(9)已知$\mathcal{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$，利用微分性质$\mathcal{L}\left[t^3\sin t\right]=-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'''=\frac{24s^3-24s}{(s^2+4)^4}$

$$\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\sin t\,dt=\mathcal{L}\left[t^3\sin t\right]\Big|_{s=1}=\frac{24s^3-24s}{(s^2+4)^4}\Big|_{s=1}=0$$

(10) $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=-\int_0^{+\infty}\sin^2 t\left(\frac{1}{t}\right)'dt=-\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\mathcal{L}[\sin 2t]ds=\int_0^{\infty}\frac{2}{s+4}ds=\arctan\frac{s}{2}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

(11) $$\int_0^{+\infty}e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\,dt=\mathcal{L}\left[\operatorname{erf}(\sqrt{t})\right]\Big|_{s=1}=\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\Big|_{s=1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(12) $$\int_0^{+\infty}\mathrm{J}_0(t)dt=\mathcal{L}\left[\mathrm{J}_0(t)\right]\Big|_{s=0}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Big|_{s=0}=1$$

6．求下列函数的拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+4}$.　(2) $F(s)=\frac{1}{s^4}$.　(3) $F(s)=\frac{1}{(s+1)^4}$.

(4) $F(s)=\frac{1}{s+3}$.　(5) $F(s)=\frac{2s+3}{s^2+9}$.　(6) $F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}$.

(7) $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}$.　(8) $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+13}$.

解 (1) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2t$

(2) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]=\frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right]=\frac{1}{6}t^3$

(3) 由$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]=\frac{1}{6}t^3$及位移性质$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$得

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4}\right]=\frac{1}{6}t^3e^{-t}$$

(4) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=e^{-3t}$

(5) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]=2\cos 3t+\sin 3t$

(6) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)(s-3)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{s-3}-\dfrac{1}{s+1}\right)\right]=\dfrac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-3}\right]-\dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right]$

$$=\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-t}$$

(7) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2+s-6}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{s-2}+\dfrac{2}{s+3}\right)\right]$

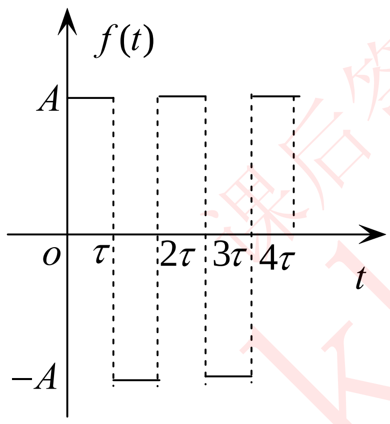
$$=\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{-3t}$$

(8) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+5}{s^2+4s+13}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2}\right]$

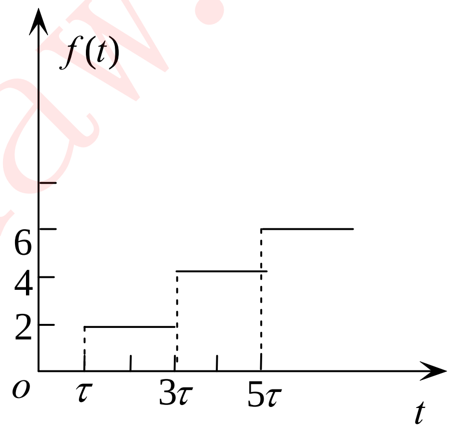
$$=2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=2e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t=\frac{1}{3}e^{-2t}\left(6\cos 3t+\sin 3t\right)$$

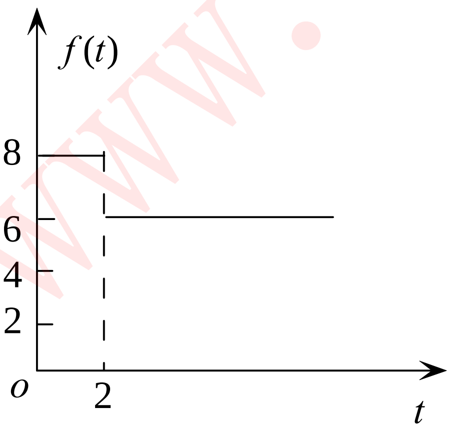
7．求下列各图所示函数 $f(t)$ 的拉氏变换.



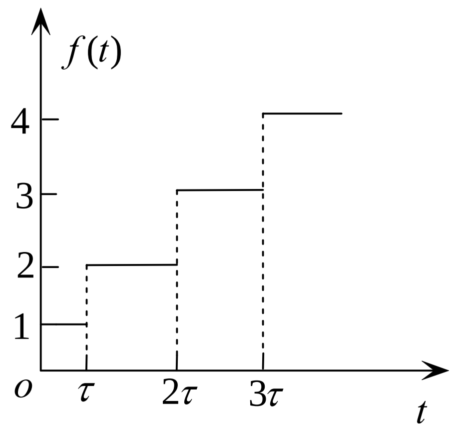
(1)



(2)



(3)



(4)

(1) 由图易知, $f(t)$ 是周期为 2τ 的周期函数,在一个周期内

$$f(t)=\begin{cases} A, & 0\le t<\tau \\ -A, & \tau\le t<2\tau \end{cases}$$

由公式

$$\&\left[f(t)\right]=\frac{A}{1-e^{-2\tau s}}\int_0^{2\tau}f(t)e^{-st}dt=\frac{A}{1-e^{-2\tau s}}\left(\int_0^{\tau}e^{-st}dt+\int_{\tau}^{2\tau}(-1)e^{-st}dt\right)$$

$$=\frac{A}{1-e^{-2\tau s}}\left[\frac{e^{-st}\Big|_{t=0}^{\tau}}{-s}-\frac{e^{-st}\Big|_{t=\tau}^{2\tau}}{-s}\right]=\frac{A}{1-e^{-2\tau s}}\cdot\frac{1-e^{-\tau s}+e^{-2\tau s}-e^{-\tau s}}{s}$$

$$=\frac{A}{s}\cdot\frac{\left(1-e^{-\tau s}\right)^2}{1-e^{-2\tau s}}=\frac{A}{s}\tanh\frac{\tau s}{2}$$

(2) 由图易知 $f(t)=2[u(t-\tau)+u(t-3\tau)+u(t-5\tau)+\cdots]=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}u(t-(2k+1)\tau)$，

当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，$\&\left[f(t)\right]=\dfrac{2}{s}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-(2k+1)s\tau}=\dfrac{2}{s}\cdot\dfrac{e^{-s\tau}}{1-e^{-2s\tau}}=\dfrac{1}{s\sinh s\tau}$

(3) 由图易知 $f(t)=8u(t)-2u(t-2)$，当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，

$$\&\left[f(t)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-ks\tau}=\frac{8}{s}-\frac{2e^{-2s}}{s}=\frac{2}{s}(4-e^{-2s})$$

(4)由图易知 $f(t)=[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau)$，当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时

$$\&\left[f(t)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-ks\tau}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1-e^{-s\tau}}=\frac{1}{2s}(1+\coth\frac{s\tau}{2})$$

习题三

1．设 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 均满足拉氏变换存在定理的条件（若它们的增长指数均为 c），且 $\&[f_1(t)]=F_1(s)$，$\&[f_2(t)]=F_2(s)$，则乘积 $f_1(t)\cdot f_2(t)$ 的拉氏变换一定存在，且

$$\&\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty}F_1(q)F_2(s-q)dq$$

其中 $\beta>c$，$\mathrm{Re}(s)>\beta+c$。

证　由于 $f_1(t),f_2(t)$ 均满足拉氏变换存在定理的条件以及增长指数均为 c_0，知乘积 $f_1(t)f_2(t)$ 也一定满足拉氏变换存在的定理的条件且增长指数为 $2c_0$.根据拉氏存在定理的证明当 $\beta>c_0$ 时，

$\&\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=\int_0^{+\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-st}dt$ 在 $\mathrm{Re}\,s\ge\beta+c_0$ 上存在且一致收敛.由于

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F_1(q)e^{qt}dq$$

而　$\&\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=\int_0^{+\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F_1(q)e^{qt}dq\right)f_2(t)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F_1(q)\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-(s-q)}dtdq=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F_1(q)F_2(s-q)dq$$

2．求下列函数的拉氏逆变换（像原函数），并用另一种方法加以验证.

(1) $F(s)=\frac{1}{s^2+a^2}$.　　(2) $F(s)=\frac{s}{(s-a)(s-b)}$.

(3) $F(s)=\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$　　(4) $F(s)=\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(5) $F(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}$.　　(6) $F(s)=\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

(7) $F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}$.　　(8) $F(s)=\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$

(9) $F(s)=\frac{1}{s^2(s^2-1)}$.　　(10) $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

(1) 解法 1　$f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\&^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\frac{\sin at}{a}$

解法 2　$f(t)=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2+a^2},a\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2+a^2},-a\mathrm{i}\right]=\frac{e^{\mathrm{i}at}}{2a\mathrm{i}}-\frac{e^{-\mathrm{i}at}}{2a\mathrm{i}}=\frac{\sin at}{a}$

解法 3　$f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-a\mathrm{i}}-\frac{1}{s+a\mathrm{i}}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(\&^{-1}\left[\frac{1}{s-a\mathrm{i}}\right]-\&^{-1}\left[\frac{1}{s+a\mathrm{i}}\right]\right)=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}at}-e^{-\mathrm{i}at}\right)=\frac{\sin at}{a}$$

(2) 解法 1　$f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)},a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s-a)(s-b)},b\right]$

$$=\frac{ae^{at}}{a-b}+\frac{be^{bt}}{b-a}=\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$$

解法 2　$f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s-a}-\frac{b}{s-b}\right)\right]$

$$=\frac{1}{a-b}\left(a\,\&^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-b\,\&^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right)=\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$$

(3) 解法 1　$f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\mathrm{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2},-a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{(s+c)e^{st}}{(s+a)(s+b)^2},-b\right]$

$$=\frac{(c-a)e^{-at}}{(b-a)^2}+\frac{d}{ds}\left(\frac{s+c}{s+a}e^{st}\right)\bigg|_{s=-b}=\frac{c-a}{(a-b)^2}e^{-at}+\frac{c-b}{a-b}te^{-bt}+\frac{a-c}{(a-b)^2}e^{-bt}$$

解法 2　$f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}\right]=\&^{-1}\left[\frac{c-a}{(a-b)^2}\cdot\frac{1}{s+a}+\frac{a-c}{(a-b)^2}\cdot\frac{1}{s+b}+\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{1}{(s+b)^2}\right]$

$$=\frac{c-a}{(a-b)^2}\&^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]+\frac{a-c}{(a-b)^2}\&^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right]+\frac{c-a}{a-b}\&^{-1}\left[\frac{1}{(s+b)^2}\right]$$

$$=\frac{c-a}{(a-b)^2}e^{-at}+\frac{a-c}{(a-b)^2}e^{-bt}+\frac{c-b}{a-b}te^{-bt}$$

（4）解法 1 $f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\&^{-1}\left[\frac{3}{2a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'\right]$

$$=\frac{3}{2a}\&^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]+\frac{1}{2}\&^{1}\left[\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)'\right]=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\mathrm{Res}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}e^{st},a\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{s^2+2a^2}{(s^2+a^2)^2}e^{st},-a\mathrm{i}\right]$

$$=\frac{d}{ds}\frac{s^2+2a^2}{(s+a\mathrm{i})^2}e^{st}\bigg|_{s=a\mathrm{i}}+\frac{d}{ds}\frac{s^2+2a^2}{(s-a\mathrm{i})^2}e^{st}\bigg|_{s=-a\mathrm{i}}=\frac{3}{4a\mathrm{i}}e^{a\mathrm{i}t}-\frac{1}{4}te^{a\mathrm{i}t}-\frac{3}{4a\mathrm{i}}e^{-a\mathrm{i}t}-\frac{1}{4}te^{-a\mathrm{i}t}$$

$$=\frac{3}{2a}\sin at-\frac{1}{2}t\cos at$$

（5）解法 1 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}\right]=\frac{1}{a^2}\&^{-1}\left[\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right]=\frac{1}{a^2}\left(\&^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]-\&^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right]\right)$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}t^3-\int_0^t\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]dt\right)=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{a}\int_0^t\sin at\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2a^2}t^3-\frac{1}{a^4}(1-\cos at)$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)s^3}\right]$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3},a\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+a^2)s^3},a\mathrm{i}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{e^{st}}{s^2+a^2}\right)\bigg|_{s=0}+\frac{e^{a\mathrm{i}t}}{2a\mathrm{i}(a\mathrm{i})^3}-\frac{e^{-a\mathrm{i}t}}{2a\mathrm{i}(-a\mathrm{i})^3}$$

$$=\frac{1}{2a^2}t^2-\frac{1}{a^4}(1-\cos at)$$

（6）解法 1 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)(s-b)}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{a(a-b)}\cdot\frac{1}{s+a}-\frac{1}{b(a-b)}\cdot\frac{1}{s+b}\right]$

$$=\frac{1}{ab}\&^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{a(a-b)}\&^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]-\frac{1}{b(a-b)}\&^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right]$$

$$=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}e^{-at}-\frac{1}{b(a-b)}e^{-bt}$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right]$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)},-a\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s+a)(s+b)},-b\right]$$

$$=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}e^{-at}-\frac{1}{b(a-b)}e^{-bt}$$

(7) 解法 1 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{s^4-a^4}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{4a^3}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)-\frac{1}{2a^3}\frac{a}{s^2+a^2}\right]$

$$=\frac{1}{4a^3}\left(e^{at}-e^{-at}\right)-\frac{1}{2a^3}\sin at=\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at-\sin at)$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{1}{s^4-a^4}\right]$

$$=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^4-a^4},a\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^4-a^4},-a\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^4-a^4},a\mathrm{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^4-a^4},-a\mathrm{i}\right]$$

$$=\frac{e^{st}}{4a^3}-\frac{e^{-at}}{4a^3}+\frac{e^{ait}}{4(a\mathrm{i})^3}+\frac{e^{-ait}}{4(-a\mathrm{i})^3}=\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sh} at-\sin at)$$

(8) 解法 1 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}\right]=\&^{-1}\left[-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}\right]$

$$=\&^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right]+\&^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right]+\&^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2}\right]=-1+2e^t+2te^t$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}\right]=\operatorname{Res}\left[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}e^{st},0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}e^{st},1\right]$

$$=-1+\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2s-1}{s}e^{st}\right)\Bigg|_{s=1}=-1+2e^t+2te^t$$

(9) 解法 1 $f(t)=\&^{-1}[F(s)]=\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)-t$

$$=sht-t$$

解法 2 $f(t)=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)},0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)},1\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s^2-1)},-1\right]$

$$=\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s^2-1}\right)\Bigg|_{s=0}+\frac{e^t}{2}-\frac{e^{-t}}{2}=\operatorname{sh} t-t$$

(10) 解法 1 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right)\right]$

$$=\frac{1}{3}\left(\&^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-\&^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]\right)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$$

解法 2 $f(t)=\&^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$

$$=\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},\mathrm{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-\mathrm{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},2\mathrm{i}\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-2\mathrm{i}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}^2+4)}+\frac{-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t}}{-2\mathrm{i}(\mathrm{i}^2+4)}+\frac{2\mathrm{i}e^{2\mathrm{i}t}}{(4\mathrm{i}^2+1)4\mathrm{i}}+\frac{-2\mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}t}}{(4\mathrm{i}^2+1)(-4\mathrm{i})}=\frac{e^{\mathrm{i}t}}{6}+\frac{e^{-\mathrm{i}t}}{6}+\frac{e^{2\mathrm{i}t}}{6}+\frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{6}=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$$

3.求下列函数的拉氏逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$

(2) $F(s)=\dfrac{s}{s+2}$

(3) $F(s)=\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$

(5) $F(s)=\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}$

(6) $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$

(7) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$.

(8) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$.

(9) $F(s)=\dfrac{s^2+4s+4}{(s^2+4s+13)^2}$

(10) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$.

(11) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$

(12) $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}$

(13) $F(s)=\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$

解 (1) $\&^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+4)^2}\right]=\&^{-1}\left[\dfrac{1}{16}\dfrac{2}{s^2+4}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)'\right]=\dfrac{1}{16}\&^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2+4}\right]+\dfrac{1}{8}\&^{-1}\left[\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)'\right]$

$$=\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t$$

(2) $f(t)=\&^{-1}\left[\dfrac{s}{s+2}\right]=\&^{-1}\left[1-\dfrac{2}{s+2}\right]=\&^{-1}[1]-\&^{-1}\left[\dfrac{2}{s+2}\right]=\delta(t)-2e^{-2t}$

(3) $f(t)=\&^{-1}\left[\dfrac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}\right]=\mathrm{Res}\left[\dfrac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\dfrac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)},-1\right]+\mathrm{Res}\left[\dfrac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)(s+2)},-2\right]$

$$=\lim_{s\to0}\frac{(2s+1)e^{st}}{(s+1)(s+2)}+\lim_{s\to-1}\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+2)}+\lim_{s\to-2}\frac{(2s+1)e^{st}}{s(s+1)}=\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}$$

(4) $f(t)=\&^{-1}\left[\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}\right]=\&^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\&^{-1}\left[\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}-\dfrac{1}{6}\dfrac{2}{s^2+4}\right]$

$$=\frac{1}{3}\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\frac{1}{6}\&^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$$

(5) $f(t)=\&^{-1}\left[\dfrac{s+1}{9s^2+6s+5}\right]=\&^{-1}\left[\dfrac{s+1}{9\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+4}\right]=\dfrac{1}{9}\&^{-1}\left[\dfrac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\dfrac{\frac{2}{3}}{\left(s+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]$

$$=\frac{1}{9}\left(\cos\frac{2}{3}t\cdot e^{-\frac{1}{3}t}+\sin\frac{2}{3}t\cdot e^{-\frac{1}{3}t}\right)=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{1}{3}t}$$

(6) $f(t)=\&^{-1}\left[\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}\right]=-\dfrac{1}{t}\&^{-1}\left[\left(\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}\right)'\right]=-\dfrac{1}{t}\&^{-1}\left[\dfrac{2s}{s^2-1}-\dfrac{2}{s}\right]=-\dfrac{1}{t}\&^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{2}{s}\right]$

$$=-\frac{1}{t}\left(e^{t}+e^{-t}-2\right)=\frac{2}{t}\left(1-\operatorname{ch}t\right)$$

(7) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{\left(s^2+4s+5\right)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{\left[(s+2)^2+1\right]^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)'\right]=-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)'\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot(-t)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]=\frac{t}{2}\sin t\cdot e^{-2t}=\frac{1}{2}te^{-2t}\sin t$$

(8) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+2s+2\right)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[(s+1)^2+1\right]^2}\right]=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}+\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)'\right]=\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t-t\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right])$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-t}\sin t-te^{-t}\cos t\right)=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\sin t-t\cos t\right)$$

(9) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+4s+4}{\left(s^2+4s+13\right)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)^2}{\left[(s+2)^2+9\right]^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+9}-\frac{9}{\left[(s+2)^2+9\right]^2}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right)'\right]=\frac{1}{6}e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{2}t\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right]$$

$$=\frac{1}{6}e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{2}te^{-2t}\cos 3t=\frac{1}{6}e^{-2t}\left(\sin 3t+3t\cos 3t\right)$$

(10) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right]$$

$$=\operatorname{Res}\left[\frac{\left(2s^2+s+5\right)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-1\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\left(2s^2+s+5\right)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-2\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\left(2s^2+s+5\right)e^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)},-3\right]$$

$$=\lim_{s\to-1}\frac{2s^2+s+5}{(s+2)(s+3)}e^{st}+\lim_{s\to-2}\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+3)}+\lim_{s\to-3}\frac{2s^2+s+5}{(s+1)(s+2)}e^{st}=3e^{-t}-11e^{-2t}+10e^{-3t}$$

(11) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)^3+3(s+1)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3}+\frac{2}{[(s+1)^2+3](s+1)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right]+\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t+\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t=\frac{1}{3}e^{-t}\left(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right)$$

(12) $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{s+3}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s+3)^2}-6\cdot\frac{1}{(s+3)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]+\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right]-6\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{2}te^{-3t}-\frac{3}{2}t^2e^{-3t}$$

(13) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1+e^{-2s}}{s^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]=t+(t-2)u(t-2)=\begin{cases}t, & 0\le t<2\\ 2(t-1), & t\ge 2\end{cases}$

习题四

1．求下列卷积。

(1) $1*1.$　　(2) $t*t$

(3) $t^m*t^n(m,n$为正整数$).$　　(4) $t*e^t$

(5) $\sin t*\cos t.$　　(6) $\sin kt*\sin kt.$

(7) $t*\sinh t.$　　(8) $\sinh at*\sinh at.$

(9) $u(t-a)*f(t).$　　(10) $\delta(t-a)*f(t).$

解　卷积定义:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

(1) $1*1=\int_0^t 1\cdot 1d\tau=t$

(2) $t*t=\int_0^t\tau(t-\tau)d\tau=t\int_0^t\tau d\tau-\int_0^t\tau^2d\tau=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{6}t^3$

(3) $t^m*t^n=\int_0^t\tau^m(t-\tau)^nd\tau=\int_0^t\tau^m\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kt^{n-k}\tau^k\right)d\tau$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kt^{n-k}\int_0^t\tau^{m+k}d\tau=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{1}{m+k+1}t^{m+n+1}$$

$$=t^{m+n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}C_n^k=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+1+n)}t^{m+n+1}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

(4) $t*e^t=\int_0^t\tau e^{t-\tau}d\tau=e^t\int_0^t\tau e^{-\tau}d\tau=e^t\left[-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t+\int_0^te^{-\tau}d\tau\right]=e^t-t-1$

(5) $\sin t*\cos t=\int_0^t\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sin td\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\sin(2\tau-t)d\tau$

$$=\frac{1}{2}t\sin t-\frac{1}{4}\cos(2\tau-t)\Big|_{\tau=0}^t=\frac{1}{2}t\sin t$$

(6) $\sin kt*\sin kt=\int_0^t\sin k\tau\cdot\sin k(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\cos(2k\tau-kt)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\cos ktd\tau$

$$=\frac{1}{2k}\sin kt-\frac{1}{2}t\cos kt$$

(7) $t*\sinh t=\int_0^t\tau\sinh(t-\tau)d\tau=\int_0^t\tau\frac{e^{t-\tau}-e^{-(t-\tau)}}{2}d\tau=\frac{e^t}{2}\int_0^t\tau e^{-\tau}d\tau-\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t\tau e^{\tau}d\tau$

$$=\frac{e^t}{2}\left[-e^{-\tau}(\tau+1)\Big|_0^t\right]-\frac{e^t}{2}\left[e^{\tau}(\tau-1)\Big|_0^t\right]=\sinh t-t$$

(8) $\sinh at*\sinh at=\int_0^t\sinh a\tau\sinh a(t-\tau)d\tau=\int_0^t\frac{e^{a\tau}-e^{-a\tau}}{2}\cdot\frac{e^{a(t-\tau)}-e^{-a(t-\tau)}}{2}d\tau$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{at}\int_0^t d\tau - e^{-at}\int_0^t e^{2a\tau}d\tau - e^{at}\int_0^t e^{-2a\tau}d\tau + e^{-at}\int_0^t d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{2}t\cosh at - \frac{1}{2a}\sinh at$$

(9) $u(t-a)*f(t)=\int_0^t u(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$

当 $t<a$ 时，

$$u(\tau-a)=0$$

此时，$u(t-a)*f(t)=0$

当 $0\le a\le t$ 时

$$u(t-a)*f(t)=\int_0^a u(\tau-a)f(\tau-a)d\tau+\int_a^t u(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_a^t f(t-\tau)d\tau$$

因此，

$$u(t-a)*f(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ \int_a^t f(t-\tau)d\tau, & 0\le a\le t\end{cases}$$

(10) $\delta(t-a)*f(t)=\int_0^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$

当 $t<a$ 时，$\delta(\tau-a)=0$.此时

$$\delta(t-a)*f(t)=0$$

当 $0\le a\le t$ 时，

$$\delta(t-a)*f(t)=\int_0^a \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau+\int_{a^-}^{a^+}\delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau+\int_{a^+}^t \delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$=0+\int_{a^-}^{a^+}\delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau+0=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-a)f(t-\tau)d\tau$$

$$=f(t-\tau)\big|_{\tau=a}=f(t-a)$$

因此，$\delta(t-a)*f(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ f(t-a), & 0\le a\le t\end{cases}$

2．利用卷积定理，证明$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\dfrac{F(s)}{s}$。

证 $\dfrac{F(s)}{s}=F(s)\cdot\dfrac{1}{s}=\mathscr{L}[f(t)*u(t)]=\int_0^t f(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t)dt$

3．利用卷积定理证明$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]=\dfrac{t}{2a}\sin at$。

证 设 $F_1(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$， $F_2(s)=\dfrac{1}{a}\dfrac{a}{s^2+a^2}$

于是 $f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=\cos at$， $f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]=\dfrac{\sin at}{a}$

$$左边=\&^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right]=\&^{-1}\left[F_1(s)\cdot F_2(s)\right]=f_1(t)*f_2(t)=\frac{1}{a}\int_0^t \cos a\tau \sin\left[a(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\sin at-\sin(2a\tau-at)\right]\ a\tau=\frac{1}{2a}\left[t\sin at-\frac{1}{2a}\cos(2a\tau-at)\Big|_{\tau=0}^{t}\right]=\frac{1}{2a}t\sin at=右边$$

4．利用卷积定理证明

$$\&^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau$$

并求$\&^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]$.

证　设 $F_1(s)=\frac{1}{\sqrt{s}},F_2(s)=\frac{1}{s-1}$，于是

$$f_1(t)=\&^{-1}\left[F_1(s)\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$f_2(t)=\&^{-1}\left[F_2(s)\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^t$$

$$左边=\&^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right]=\&^{-1}\left[F_1(s)\cdot F_2(s)\right]=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\tau}d\tau\overset{\tau=x^2}{=}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-x^2}dx=右边$$

设 $F(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$，前面已证$\&^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^t\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau$ 但

$$\&^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right]=\&^{-1}\left[F(s+1)\right]=e^{-t}\ \&^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau$$

5．证明卷积满足对加法的分配律：$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

证　$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=\int_0^t f_1(\tau)[f_2(t-\tau)+f_3(t-\tau)]d\tau$

$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau+\int_0^t f_1(\tau)f_3(t-\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

6．证明卷积满足结合律：$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$

证　$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=\int_0^t f_1(s)\int_0^{t-s}f_2(t-s-\tau)f_3(\tau)d\tau ds$

$$=\int_0^t f_3(\tau)d\tau\int_0^{t-\tau}f_1(s)f_2(t-\tau-s)ds=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$$

习题五

1．求下列微分方程式及方程组的解.

（1）$y''+4y'+3y=e^{-t},\qquad y(0)=y'(0)=1.$

(2) $y'''+3y''+3y'+y=1, \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

(3) $y''+3y'+2y=u(t-1), \qquad y(0)=0, \qquad y'(0)=1$.

(4) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t, \qquad y(0)=-1, \qquad y'(0)=-2$.

(5) $y''-2y'+2y=2e^{t}\cos t, \qquad y(0)=y'(0)=0$

(6) $y''+4y'+5y=F(t), \qquad y(0)=c_1, y'(0)=c_2, (c_1, c_2$为常数)

(7) $y'''+y'=e^{2t}, \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

(8) $y'''+3y''+3y'+y=6e^{-t}, \qquad y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

(9) $y^{(4)}+2y''+y=0, \qquad y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1.$

(10) $y^{(4)}+y'''=\cos t, \qquad y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=c$ (常数)

(11) $\begin{cases} x'+x-y=e^{t}, \\ 3x+y'-2y=2e^{t}, \end{cases} \qquad x(0)=y(0)=1.$

(12) $\begin{cases} y'-2z'=F(t), \\ y''-z''+z=0, \end{cases} \qquad y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0.$

(13) $\begin{cases} (2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0, & x(0)=x'(0)=1, \\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x''-x+y+z=0, \\ x+y''-y+z=0, \\ x+y+z''-z=0, \end{cases} \qquad x(0)=1, y(0)=z(0)=x'(0)=y'(0)=z'(0)=0.$

解 (1) 对方程两边取拉氏变换，并考虑到初始条件，得

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

整理后解出 $Y(s)$ 得

$$Y(s)=\frac{1}{(s+3)(s+1)^2}+\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{s+1}$$

再取拉氏逆变换得其解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]-\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]+\frac{7}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{7}{4}e^{-t}=\frac{1}{4}\left[(2t+7)e^{-t}-3e^{-3t}\right]$$

(2) 对方程两边取拉氏变换，并考虑到初始条件，得

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s}$$

整理后解出 $Y(s)$ 得

$$Y(s)=\frac{1}{s(s^3+3s^2+3s+1)}=\frac{1}{s(s+1)^3}$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

再取拉氏逆变换得其解为

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]$$
$$=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-t}=1-(\frac{t^2}{2}+t+1)e^{-t}$$

（3）对方程两边取拉氏变换，并代入初始条件，得

$$s^2Y(s)-1+3Y(s)+2Y(s)=\frac{1}{s}e^{-s}$$

解出 $Y(s)$,得

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$
$$=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\left[\frac{1}{2s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2(s+2)}\right]e^{-s}$$

取拉氏逆变换，得 $y(t)$，

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=e^{-t}-e^{-2t}+\left[-e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}+\frac{1}{2}\right]u(t-1)$$

（4）方程两边取拉氏变换，并代入初始条件，得

$$s^2Y(s)+s+2-Y(s)=\frac{4}{s^2+1}+\frac{5s}{s^2+4}$$

整理后，得

$$Y(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+4)}-\frac{s+2}{s^2-1}=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$$

取拉氏逆变换得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=-2\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]=-2\sin t-\cos 2t$$

（5）对方程两边取拉氏变换，且代入初始条件得

$$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t)=\&^{-1}\left[Y(s)\right]=\&^{-1}\left[-\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)'\right]=te^t\sin t$$

（6）对方程两边取拉氏变换得（$F(s)$为$f(t)$的拉氏变换）

$$s^2Y(s)-c_1s-c_2+4sY(s)-4c_1+5Y(s)=F(s)$$

整理得

$$Y(s)=\frac{F(s)}{s^2+4s+5}+\frac{c_1s+c_2+4c_1}{s^2+4s+5}$$

$$=\frac{F(s)}{(s+2)^2+1}+c_1\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{c_2+2c_1}{(s+2)^2+1}$$

取拉氏逆变换并利用卷积定理得

$$y(t)=\&^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]+c_1\&^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]+(c_2+2c_1)\&^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]$$

$$=F(t)*e^{-2t}\sin t+c_1e^{-2t}\cos t+(c_2+2c_1)e^{-2t}\sin t$$

$$=F(t)*e^{-2t}\sin t+e^{-2t}\left[c_1\cos t+(c_2+2c_1)\sin t\right]$$

（7）对方程两边取拉氏变换得

$$s^3Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)}$$

部分分式

$$\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

用待定系数法得

$$A=\frac{1}{10},B=-\frac{1}{2},C=\frac{2}{5},D=-\frac{1}{5}$$

因此

$$y(t)=\&^{-1}\left[Y(s)\right]=\&^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)s(s^2+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{10}\&^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\frac{1}{2}\&^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{2}{5}\&^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-\frac{1}{5}\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$$

（8）对方程两边取拉氏变换，且代入初始条件得

$$s^3Y(s)+3s^2Y(s)+3sY(s)+Y(s)=6\frac{1}{s+1}$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{6}{(s-1)^4}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t)=\&^{-1}\left[Y(s)\right]=\&^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-1}\right)'''\right]=t^3e^{-t}$$

（9）对方程两边取拉氏变换，且代入初始条件得

$$s^4Y(s)-s+2s^2Y(s)+Y(s)=0$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

取拉氏逆变换得到原方程解

$$y(t)=\&^{-1}\left[Y(s)\right]=\&^{-1}\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right]=\frac{1}{2}t\sin t$$

（10）方程两边取拉氏变换,得

$$s^4Y(s)-cs+s^3Y(s)-c=\frac{s}{s^2+1}$$

解出 $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{c}{s^3}+\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}$$

$$\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)},-1\right]$$

$$+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)},\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2+1)},-\mathrm{i}\right]$$

$$=\lim_{s\to0}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+1)}\right)'+\lim_{s\to-1}\frac{e^{st}}{s^2(s^2+1)}+\lim_{s\to\mathrm{i}}\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s+\mathrm{i})}+\lim_{s\to-\mathrm{i}}\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s-\mathrm{i})}$$

$$=t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$$

因此原方程的解为

$$y(t)=\&^{-1}\left[Y(s)\right]=c\,\&^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]+\&^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right]$$

$$=\frac{c}{2}t^2+t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$$

(11)对方程组两边取拉氏变换并代入初始条件,得

$$\begin{cases} sX(s)-1+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1} \\ 3X(s)+sY(s)-1-2Y(s)=2\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

整理后,得

$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1} \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s-1} \\ Y(s)=\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得到原方程组的解为

$$\begin{cases} x(t)=e^t \\ y(t)=e^t \end{cases}$$

(12)对方程组两边取拉氏变换并代入初始条件,设

$$Y(s)=\&[y(t)],Z(s)=\&[z(t)],F(s)=\&[F(t)],\text{得}$$

$$\begin{cases} sY(s)-2sZ(s)=F(s) \\ s^2Y(s)-s^2Z(s)+Z(s)=0 \end{cases}$$

整理后,解之得

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{F(s)}{s}-2\dfrac{sF(s)}{s^2+1} \\ Z(s)=-\dfrac{sF(s)}{s^2+1} \end{cases}$$

取拉氏逆变换得到原方程组的解为

$$y(t)=\&^{-1}[Y(s)]=\&^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot F(s)\right]-2\,\&^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot F(s)\right]$$

$$=1*F(t)-2\cos t*F(t)=(1-2\cos t)*F(t)$$

$$z(t)=\&^{-1}[Z(s)]=-\&^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\cdot F(s)\right]=-\cos t*F(t)$$

即解为

$$\begin{cases} y(t)=(1-2\cos t)*F(t) \\ z(t)=-\cos t*F(t) \end{cases}$$

(13)方程组中每个方程两边取拉氏变换,得

$$\begin{cases}(2s^2-s+9)X(s)-(s^2+s+3)Y(s)=1+2s\\(2s^2+s+7)X(s)-(s^2-s+5)Y(s)=3+2s\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}2X(s)-Y(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+4}\\X(s)+Y(s)=\dfrac{1}{s-1}\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}\\Y(s)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}\end{cases}$$

再取拉氏逆变换得到其解为

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{2}{3}\cos 2t+\dfrac{1}{3}\sin 2t\\y(t)=\dfrac{2}{3}e^t-\dfrac{2}{3}\cos 2t-\dfrac{1}{3}\sin 2t\end{cases}$$

(14)对方程组中各方程两边取拉氏变换,得

$$\begin{cases}(s^2-1)X(s)+Y(s)+Z(s)=s\\X(s)+(s^2-1)Y(s)+Z(s)=0\\X(s)+Y(s)+(s^2-1)Z(s)=0\end{cases}$$

由后两个方程得 $Y(s)=Z(s), X(s)=-s^2Y(s)$ 代入第一个方程解得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{s}{s^2-2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2+1}\\Y(s)=Z(s)=-\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2-2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2+1}\end{cases}$$

取拉氏逆变换得其解为

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{2}{3}\cosh\sqrt{2}t+\dfrac{1}{3}\cos t\\y(t)=z(t)=-\dfrac{1}{3}\cosh\sqrt{2}t+\dfrac{1}{3}\cos t\end{cases}$$

2．求解积分方程：$f(t)=at+\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau.$

解　将积分方程取拉氏变换并利用卷积定理，设 $Y(s)=\&[y(t)]$

$$F(s)=\&[at]+\&\left[\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\right]=\frac{a}{s^2}+F(s)\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

整理后得

$$F(s)=a\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right)$$

再取拉氏逆变换得到原方程的解

$$f(t)=a\left(t+\frac{1}{6}t^{3}\right)$$

3.设在原处质量为 m 的一质点在 $t=0$ 时，在 x 方向上受到冲击力 $k\delta(t)$ 的作用，其中 k 为常数，假定质点的初速度为零，求其运动规律.

解　设 t 时刻质点为 x 轴正方向上点 $x(t)$ 处，由题意质点运动的（瞬间）速度为 $x'(t)$,加速度为 $x''(t)$，且 $x(0)=x'(0)=0$ 所以质点的运动规律满足微分方程：

$$mx''(t)=k\delta(t),\qquad x(0)=x'(0)=0$$

为解上面的微分，将方程两边取拉氏变换并代入初始条件，得

$$ms^{2}X(s)=k,$$

即

$$X(s)=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{s^{2}}$$

再取拉氏逆变换得质点的运动规律为

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\frac{k}{m}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}}\right]=\frac{k}{m}t.$$

4．设有如图所示的 RL 串联电路，在 $t=t_0$ 时，将电路接上直流电源 E，求电路中的电流 $i(t)$.

5．如图所示的电路，在 $t=0$ 时接入直流电源 E，求回路中电流 $i(t)$.

6.某系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$，求当激励 $x(t)=A\sin\omega t$ 时的系统响应 $y(t)$.

解　由系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$，易知系统的脉冲响应函数

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{1+Ts}\right]=\frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$$

于是当激励 $x(t)=A\sin\omega t$ 时的系统响应为

$$y(t)=g(t)*x(t)=x(t)*g(t)=\int_0^t A\sin\omega\tau\frac{K}{T}e^{-\frac{t-\tau}{T}}d\tau=\frac{AK}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\int_0^t\sin\omega\tau e^{\frac{\tau}{T}}d\tau$$

$$=\frac{AK}{T}e^{-\frac{t}{T}}\left[\frac{1}{\omega^{2}+\frac{1}{T^{2}}}e^{\frac{\tau}{T}}\left(\frac{1}{T}\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=\frac{AK}{1+\omega^{2}T^{2}}\left[(\sin\omega t-T\omega\cos\omega t)+T\omega e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

$$=\frac{AK}{\sqrt{1+\omega^{2}T^{2}}}\sin(\omega t-\arctan\omega T)+\frac{AKT\omega}{1+\omega^{2}T^{2}}e^{-\frac{t}{T}}$$