

摘 要

量子信息论 (quantum information theory) 是量子论与经典信息论相结合的新兴交叉学科。本论文所述的工作主要涉及量子信息论领域的三个方面: 量子隐形传态 (quantum teleportation)、纠缠态的纯化 (purification of entangled state)、纠缠 (entanglement) 随时间的演化。

在第二章, 我们提出了四种尚未见于报道的可实现的量子隐形传态方案, 即:

(1) 提出了以三对非最大纠缠态粒子作为量子信道来实现三粒子纠缠态的量子几率隐形传态方案, 并给出了此方案传输成功的总几率。在此方案中发送者 Alice 作三次 Bell 态测量, 并将测量结果通过经典信道告诉 Bob, Bob 根据接收到的信息即可通过相应的幺正变换来重建 Alice 要传输的量子态。(2) 探讨了分别利用四个三态粒子的最大纠缠态和非最大纠缠态作为量子信道来实现一未知的三个三态粒子的纠缠态的隐形传态方案。本节首先阐述量子信道是最大纠缠态的情况, 然后进一步阐述量子信道是非最大纠缠态的情况, 我们发现在后者情况时, 通过引进一个辅助粒子, 并实施一幺正变换, 即可以一定的几率完成三个三态粒子的纠缠态的隐形传态。(3) 讨论了利用纠缠交换的方法来实现一未知的两个三态粒子的纠缠态的量子隐形传态方案。我们会注意到, 当采用纠缠交换的方法来实现量子隐形传态时, 与其他方法相比, 量子信道将浪费更多的纠缠态资源。(4) 研究了利用一个二能级原子与腔场的相互作用, 通过大失谐的 J-C 模型制备出原子与腔场的纠缠态, 用此纠缠态作为量子信道来传输腔场的薛定谔猫态。在此方案中我们只使用了一个二能级原子和两个腔场, 而没使用更多的辅助粒子。

在第三章, 提出了利用纠缠交换的方法来纯化两粒子和三粒子的纠缠态, 并将该方法推广到多粒子纠缠态的纯化上, 且导出了从部分纠缠态获得最大纠缠态的成功几率。由于在实际的量子通信中, 通常需要最大纠缠的量子态作为信息传递的量子信道, 这就需要从大量低纠缠度的量子态中提取具有尽可能高的纠缠度的量子态, 因此纠缠态纯化的研究既有积极的理论意义又有一定的实用价值。

在第四章, 我们分别利用纠缠度的两种不同定义研究了两个量子系统的纠缠随时间的演化情况。其一是分别利用冯·纽曼熵 (von Neumann entropy) 和共生纠缠 (concurrence) 讨论了单光子 J-C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化; 其二是分别利用 von Neumann 熵和共生纠缠讨论了双光子 J-C 模型中原子与

腔场之间的纠缠随时间的演化，并得出此两个系统的纠缠随时间演化的规律。

关键词：量子信息论；量子纠缠；量子隐形传态；纠缠态的纯化；J-C 模型；
纽曼熵；共生纠缠

ABSTRACT

Quantum information theory is the related areas of quantum mechanics and classical information theory. In this thesis, we study on several problems in quantum information theory, including the evolution of entanglement versus time as well as quantum teleportation and the purification of entangled state.

In chapter 2, we propose four kinds of schemes of quantum teleportation which are not reported before. Firstly, a scheme for teleporting a three-particle state is proposed by using three pairs of non-maximally entangled state particles as quantum channels. According this scheme, the sender Alice needs to make the Bell-state measurement three times and send the outcome to Bob by classical channel, then Bob may reconstruct the quantum states to be send by Alice by using the corresponding unitary transformation. Secondly, we propose a scheme for probabilistically teleporting an unknown three-particle entangled state of three-level by means of a four-particle entangled state of three-level as quantum channel. First of all, the maximally entangled state is taken as quantum channel, then, the case of non-maximally entangled state is considered, we find that when the channel is non-maximally entangled state, by introducing an ancillary qubit and constructing an unitary transformation properly, the teleportation of three-particle entangled state can be accomplished with certain probability. Thirdly, we propose a scheme for teleporting an unknown three-particle entangled state of three-level by using entanglement swapping. In the process, the sender Alice needs to make the Bell-state measurement twice, then sends the outcome to Bob by classical channel, so Bob by means of the corresponding unitary transformation may reconstruct the quantum state which Alice wants to send. Fourthly, we propose a scheme for teleportation of a Schrödinger cat-state by means of two-level atom-cavity state via the J-C model with large detuning. In the scheme, the ancillary particle is not needed, only a two-level atom and two single-model cavities are required.

In chapter 3, we investigate the purification of entangled two-particle states and entangled three-particle states by means of entanglement swapping, and generalize it

to entangled multi-particle states. Further more, we get the probability of transformation from partial entangled states to the maximally entangled states. In the process, the classical communication is not needed, and we need the unitary transformation and Hadamard transformation only.

In chapter 4, we research the evolution of entanglement versus time for some quantum systems by using the diverse definitions of entanglement. Firstly, we research the evolution of atom-cavity entanglement versus time in single-photon J-C model by means of von Neumann entropy and concurrence, respectively; then, we investigate the evolution of atom-cavity entanglement versus time in two-photon J-C model by means of von Neumann entropy and concurrence, respectively; and at the same time, we find out the evolution law of entanglement versus time.

Key Words: quantum information theory; quantum entanglement; quantum teleportation; purification of entangled state; Jaynes-Cummings model; von Neumann entropy; concurrence

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 南昌大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。

学位论文作者签名：于志

签字日期：2006 年 6 月 8 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 南昌大学 有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 南昌大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：于志

导师签名：于志

签字日期：2006 年 6 月 8 日

签字日期：2006 年 6 月 9 日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：

电话：

通讯地址：

邮编：

第一章 绪论

§ 1.1 引言

对信息的传输一直是人类的奋斗目标和进步手段。从远古人的结绳记事到烽火传递，从飞鸽传书到电报、电话再到互联网技术，无不渗透着人类对信息传递技术的追求。随着信息技术的进步，信息已经和物质、能量一起构成现代社会赖以生存和发展的三个基本要素。研究信息本身的理论是信息论 (information theory)。虽然人类的活动均含有信息的获取、传播和利用，但作为一门定量科学，信息论则诞生于 20 世纪 40 年代。1948 年美国工程师 Shannon C.E 发表了“通信的数学理论”的文章，第一次给信息以定量的描述，标志着信息论的建立。就在 Shannon 信息论出现的前两年，诞生了第一代电子计算机。随着计算机技术的发展，信息在当代社会的重大作用与计算机技术的进步密不可分。20 世纪的另一重大发现是量子论 (quantum theory)。在 20 世纪 80 年代以前，信息理论、计算机科学和量子论作为不同的学科平行发展，几乎没有人注意到它们之间的关系。然而最近 20 多年来，人们越来越清楚地认识到：信息理论、计算机科学和量子力学存在着深刻的、密切的关系。它们的关系不仅表现在信息需要借助于物理手段存储、传输和处理；而且还表现在这些科学的概念、原理都要受到基本物理规律的制约。当对编码信息的态从经典物理解过渡到量子物理解时，由于量子态具有根本不同于经典物理态的性质，于是产生了以量子力学为基础的量子信息论或称为量子信息学。

量子信息学是用量子态作为信息的载体，进行信息传输和信息处理的科学，它利用量子力学的基本原理和基本量子现象来实现信息的传输和处理。由于量子规律不同于经典规律，特别是量子态具有非经典的量子纠缠现象，这就使量子信息具有能够实现经典信息不可能实现的新功能，如已经发现的量子隐形传态 [1,2,3]、量子计算 (quantum calculation) [4]，量子密钥分配 (quantum cryptography) [5,6]，量子稠密编码 (quantum dense coding) [7] 等。因此量子信息学是经典信息论和计算机科学的革命性发展。量子信息学的研究不仅由于它的巨大科学意义和学术价值引起物理学家、信息学专家的兴趣，而且由于它可预见的潜在价值，也引起了各国政府、军事部门和企业厂商的高度重视。

经过 20 多年的发展, 量子信息论已形成量子隐形传态、量子计算, 量子密钥分配和量子稠密编码等研究领域。本论文主要涉及量子隐形传态以及与其相关的纠缠态的纯化和纠缠随时间的演化。

§ 1.2 量子信息学的几个基本概念

本节主要介绍本论文所用到的几个最基本的概念, 例如量子比特、量子纠缠、Bell 态、Werner 态、GHZ 态和 W 态以及薛定谔猫态等。

§ 1.2.1 量子比特

在经典信息理论中, 信息量的基本单位是比特 (bit), 一个比特给出经典二值系统一个取值的信息量。在量子信息理论中, 量子信息的基本单位是量子比特, 量子比特在英文中写作 qubit, 因此亦有译成量子位的。一个量子比特是一个双态量子系统, 这里双态是指两个线性独立的态, 对于半自旋粒子系统 (如电子), 这两个独立态常记为 $|0\rangle$ (表示自旋向上) 和 $|1\rangle$ (表示自旋向下); 以这两个态为基矢, 张起一个二维复矢空间, 因此一个量子比特也可视为一个二维 Hilbert 空间。量子比特是上述两个独立态的线形叠加态

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (1.1)$$

其中 a 、 b 是任意复数并满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。

在实验中任何两态的量子系统都可以制备成量子比特, 常见的有: 光子的正交偏振态、电子或自旋为 $1/2$ 原子核的自旋态、原子或量子点的二能级等。

§ 1.2.2 量子纠缠

量子纠缠是存在于多子系量子系统中的一种奇妙现象, 是指对一个子系统的测量结果无法独立于其它子系的测量参数。虽然随着量子信息这一新兴领域的兴起和蓬勃发展, 量子纠缠已成为人们的热门话题, 然而长期以来对纠缠现象所涉及的量子力学基本原理的激烈争论却从未停止过。其中最著名的例子是爱因斯坦等人提出的 EPR 佯谬[8]和薛定谔提出的所谓“薛定谔猫态”佯谬[9]。

爱因斯坦在文献[8]中第一次提出了纠缠态的想法，其基本观点是在承认局域性和实在性的前提下，量子力学的描述是不完备的。EPR 佯谬在推动量子力学的发展中起着重要作用，它是爱因斯坦在与玻尔所作的最重要一次争论中所提出的假想实验，这个实验所预示的结果完全遵从量子力学原理，但却令人难以接受。设想有一对总自旋为零的两个粒子 A 和 B，随后在空间上分开它们，若单独测量 A（或 B）的自旋，则自旋向上或向下的概率为 1/2。但若已测得粒子 A 的自旋向上，那么粒子 B 不管测量与否，必然会处在自旋向下的本征态上。爱因斯坦认为量子力学理论不完备，即不足以正确地描述真实的世界。玻尔则持完全相反的看法，他认为粒子 A 和 B 之间存在着量子关联，不管它们在空间上分得多开，对其中一个粒子实施局域操作，必然同时导致另一个粒子状态的改变，这就是量子力学的非局域性。这场争论的本质在于：真实世界是遵从爱因斯坦的局域实在论，还是玻尔的非局域性理论。随着量子光学的发展，越来越多的理论和实验支持了玻尔的看法。

薛定谔用“活猫”和“死猫”来形象地表示宏观量子态，薛定谔猫态就是“活猫态”和“死猫态”的叠加。近年来量子力学的发展不仅在理论上预示了许多这类“猫态”（即不同相干态的叠加）的存在，而且在实验上也实现和制备了若干“猫态”。

现在，量子纠缠态已广泛地应用于量子信息的各个领域。它在量子隐形传态、量子计算，量子密钥分配和量子稠密编码等领域都起到了关键的角色。那么，什么样的量子态才是纠缠态呢？

当由两个或两个以上子系统构成的复合系统不能写成各个子系统的直积态时，这个态就是一个纠缠态，即

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (1.2)$$

否则就不是纠缠态（即可分离态），而且已得出若干判断纠缠态和可分离态的判据[10-12]。

目前实验上制备出的最完美的纠缠态是利用参量下转换法产生的纠缠光子对[13]。

§ 1.2.3 Bell 态和 Werner 态

对两个二态粒子体系，如下四个态称为 Bell 态[1]，即

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (1.3)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (1.4)$$

它们构成特殊的表象，称为纠缠态表象。每个 Bell 态都是二粒子体系的最大纠缠态，它们是四维空间中的正交完备基，可用于对任意二态粒子实施正交测量，即 Bell 态测量。

Werner 态是一个简单的 Bell 对角态，其密度矩阵可写作

$$\rho = F|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \frac{1-F}{3}(|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|) \quad (1.5)$$

一般地说来，Bell 态经过各向同性的消相干信道后会退化为 Werner 态。

§ 1.2.4 GHZ 态和 W 态

Du 等人[14]在研究三粒子纠缠态时指出，在态的转化过程中，如果只通过随机性局域操作和经典通信 (SLOCC) 来进行，则可将任意的三粒子态转化为两种形式——GHZ 态或 W 态

$$|\psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (1.6)$$

$$|\psi_w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (1.7)$$

而这两个态之间的相互转化是不可能的，即使是概率的转化也不行，它们之间有很多不同的地方，但根本不同之处在于 GHZ 态的任两粒子之间没有任何纠缠，而 W 态的任意两个粒子之间都有等量的纠缠。

§ 1.3 量子隐形传态

本节主要介绍量子隐形传态的概念和基本原理以及量子隐形传态的最新研究进展。

§ 1.3.1 量子隐形传态的概念

在科幻或神话小说中，常常出现这样的场面：一个神秘的人物在某个地方突然消失，然而在别的地方却莫名其妙地显现。远距隐形传态的概念即来源于此。人们可以将这种隐形传物的过程想象如下：有股神奇的力量将被传送的人或物瞬间地分解了，被分离的各种基本单元（如原子）弥散于大自然中，于是人或物便在人面前消失掉，随后在另一个地方则发生相反的过程，自然界中相关的原子在这股神奇力量的作用下汇聚起来并构成与原来一模一样的人或物。更接近于物理规律的一种想法是：先提取原物的所有信息，并将这些信息传送到接收地点，然后根据这些信息，选取与构成原物完全相同的基本单元（如原子）制造出完美的原物的复制品。遗憾的是这种远距隐形传物的想法是违背量子力学的不确定关系的。不确定关系认为，不可能对一个物体（量子体系）的所有物理量同时进行精确的测量，因而同时提取一个物体的所有信息是不可能的。而且根据量子力学的另一基本定理即量子不可克隆定理，对量子态的精确复制也是不可能的。因此隐形传物只不过是幻想罢了。

1993年，Bennett等6位科学家联合在《Phys.Rev.Lett》上发表了题目为“经由经典和EPR信道来传送未知量子态”的开创性的文章，燃起了人们对量子隐形传态的兴趣并引发出一系列富有成果的研究。Bennett等人提出的是一种量子隐形传态的方案，其基本思想是：为实现传送某个物体的未知态，可将原物的信息分成经典信息和量子信息两个部分，它们分别由经典信道和量子信道来传送给接收者。经典信息由发送者对原物进行测量而获得，量子信息是发送者在测量中未提取的信息。接收者在获得这两种信息后，就可以制备出完美的原物的复制品。在此过程中，原物并未被传送给接收者，它始终留在发送者处，被传送的仅是原物的量子态，发送者甚至可以对这个量子态一无所知，而接收者是将别的物质单元（如粒子）变换成处于和原物相同的量子态上，原物的量子态在发送者进行测量及提取经典信息时已遭受破坏，所以称其为量子隐形传态。

§ 1.3.2 量子隐形传态的基本原理[1]

假设粒子1处于如下的量子态上

$$|\psi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1, \quad (1.8)$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

发送者 Alice 要把量子态 $|\psi\rangle_1$ 传送给 Bob, 但粒子 1 始终要留在 Alice 处。为了实现 $|\psi\rangle_1$ 的隐形传态, Alice 可以在她和 Bob 之间制备两个处于最大纠缠态的二态粒子即 EPR 对作为量子信道, 即

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}) \quad (1.9)$$

这时把 EPR 对的粒子 2 和 3 分别传送给 Alice 和 Bob (如图 1.1), 系统总的量子态为 $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_{23}$ 。

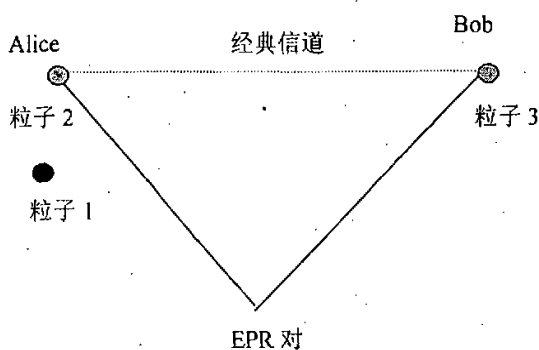


图 1.1 量子隐形传态的原理图

而粒子 1 和粒子 2 的 Bell 态为

$$|\Phi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{12} \pm |11\rangle_{12}) \quad (1.10)$$

$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} \pm |10\rangle_{12}) \quad (1.11)$$

传输时, Alice 首先采用能识别 Bell 态的装置对粒子 1 和 2 进行 Bell 态测量, 此时系统的量子态坍塌为

$${}_{12}\langle\Phi^\pm|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(a|0\rangle_3 \pm b|1\rangle_3) \quad (1.12)$$

$${}_{12}\langle\Psi^\pm|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(a|1\rangle_3 \pm b|0\rangle_3) \quad (1.13)$$

可见测量后, 粒子 2 和 3 之间消纠缠, 而粒子 1 和 2 的态则坍塌到二粒子系统的某个 Bell 态上。

接着 Alice 将测量的结果通过经典信道告诉 Bob, Bob 根据接收到的信息对粒子 3 实施幺正变换 (如表 1.1), 即可重建 Alice 要传输的量子态, 成功地实现了量子态的隐形传态。

表 1.1

Alice 的测量结果	Bob 实施的幺正变换
$ \Phi_{\pm}\rangle_{12}$	$ \langle 0 \langle 0 \pm 1\rangle\langle 1 _3$
$ \Psi^{\pm}\rangle_{12}$	$ \langle 0 \langle 1 \pm 1\rangle\langle 0 _3$

§ 1.3.3 量子隐形传态的研究进展

自 1993 年 Bennett 等人[1]在题为“经由经典和 EPR 信道传输未知量子态”的开创性文献中提出了量子隐形传态方案后, 隐形传态随即成为量子信息领域最重要的研究对象之一, 无论是在理论方面[15-32]还是在实验方面[33-36]都取得了丰硕的成果。例如, 郭光灿[31]提出用两对最大纠缠态粒子 (EPR 对) 作为量子信道, 通过纠缠交换的方法来实现二粒子纠缠态的量子隐形传态, 进而他还提出可以用两对非最大纠缠态粒子作为量子信道来实现二粒子纠缠态的量子隐形传态; 周等人[29]提出了一种通过 EPR 对来传输一个有限态粒子的方案; 戴等人[28]提出了一种通过三个三态非最大纠缠态粒子来传输两个三态纠缠态粒子的方案等。近年来, 人们又提出了一系列基于腔场量子电动力学 (QED) 的量子隐形传态的方案[3,15,23,26,37,38], 例如郑示标等人[26]提出的传输腔场的宏观叠加态的方案, 以及通过 Raman 原子-腔场的相互作用传输未知的原子态的方案[3]。叶柳等人[38]还提出过利用原子与光场的非最大纠缠态传送薛定谔猫态的方案。最近, 郑[39]和杨[40]又提出了不进行 Bell 态测量的量子态的近似条件传送等。

近年对隐形传态具有重要意义的实验有:

1997 年 12 月, 奥地利 Innsbruck 的 Zeilinger 小组在实验上首次成功演示了量子隐形传态[2]。这是国际上首次在实验上成功地将一个量子态从甲地的光子传送到乙地的光子上。实验中传输的只是表达量子信息的“状态”, 作为信息载

体的光子本身并不被传输。此项研究成果轰动了欧美的新闻界。之后，隐形传态在实验上有了更多的进展。

1998年初，意大利的 Rome 小组在《Phys.Rev.Lett》上报了另一个成功的量子隐形传态的实验结果[34]。该实验采用了一个更为简单的办法，即把量子态从纠缠光子对中的一个光子传递到另一个光子上。

1998年 CIT 小组根据 Vaidman 的方案完成了连续变量的量子隐形传态实验[3]。

在 2003 年中国物理学会秋季会议上，山西大学光电所的郜江瑞介绍了他们小组在他们 2000 年提出的理论基础上，完成了连续变量量子隐形传态的实验。

2004 年，杨涛、潘建伟首次使用与五光子纠缠同样的装置实现了开放目标的隐形传态[36]。开放目标的超空间传送的实现打开了分布式量子信息处理的各种新的可能性。

§ 1.4 纠缠态的纯化及其研究进展

在实际的量子通信中，通常需要最大纠缠的量子态作为信息传递的量子信道，这就需要从大量低纠缠度的量子态中提取少数具有尽可能高的纠缠度的量子态，这种提取称为纠缠态的纯化[45-59]。1996 年，Bennett 等人[45]首先提出了一种纠缠态纯化方案，该方案是从无穷多相同的 Werner 态中提取出一个最大纠缠态，接着他们证明了只要 Werner 态是纠缠态则该 Werner 态是可纯化的。Horodecki 等人[46]证明了任何 2×2 系统的混合纠缠态都可以纯化，并提出了可提取的必要条件，由这个必要条件和纠缠态的必要条件还可得出自然界存在不可提取的纠缠态，即束缚纠缠态[46,47]。1999 年，Bose 等人[48]又提出通过纠缠交换的方法对纠缠态进行纯化的思想。

一般说来，纠缠态的纯化可作如下分类。从纯化的对象来看，纠缠态的纯化可分为两类[45,49]：

- (1) 纠缠浓缩 (concentration)：对纯态的纠缠体系进行纯化；
- (2) 纠缠纯化 (purification)：对混合态的纠缠体系进行纯化。

从纯化的结果来看，纠缠态的纯化可分为三类[45]：

- (1) 纠缠蒸馏 (distillation)：增加体系的纠缠度[52]；

(2) 纠缠纯化 (purification): 增加某一特定态的纯度;

例如, 纯化前的量子态为

$$\rho_{AB} = f |\psi^+\rangle_{AB} \langle\psi^+| + (1-f) |\psi^+\rangle_{AB} \langle\psi^+| \quad (1.14)$$

经纯化后, 新的量子态为

$$\rho'_{AB} = f |\psi^+\rangle_{AB} \langle\psi^+| + (1-f') |\psi^+\rangle_{AB} \langle\psi^+| \quad (1.15)$$

若干 $f' > f$, 则称实现了体系的纯化;

(3) 纠缠浓缩 (concentration): 同时增加混合态的纠缠度和某一特定量子态的纯度。

尽管有以上两种关于纠缠态纯化的分类, 但在文献中, 这些词的使用通常并不具有严格的意义。

§ 1.5 纠缠的度量及其研究进展

人们注意到违背 Bell 不等式虽然是量子纠缠的一个显著特征, 但并非所有的纠缠态都违背 Bell 不等式[59], 因此为了从经典关联中分离出量子关联, 需要一种新的标准, 这就启发了最初的纠缠态度量问题的研究, 并取得了一系列的研究成果[60-67]。目前, 纠缠作为一种物理资源在隐形传态、量子计算等方面都起着重要的作用, 因此如何给这种资源以定量的科学描述也成为众所关注的问题。纠缠所描述的是共处于同一系统的几个子系统态之间的量子力学特性, 因此它只对由几个子系统构成的复合系统才有意义。设一复合系统由 A、B、C……等几个子系统构成, 复合系统的态一般用密度矩阵 ρ 描述, 用 $E(\rho)$ 表示态 ρ 的纠缠度。由于物理上相互作用的两个子系统联合的么正演化可以产生量子纠缠, 而局域操作 (即对空间分离的各部分互相独立地执行的操作) 和经典通信只能产生经典的相关, 不可能产生量子纠缠, 因此一个合理的纠缠度量须满足下面几个条件 [60,61]:

(1) 如果 ρ 描述的态是分离的, 则它可以表示为属于不同态的张量积, 即

$$\rho = \sum_i p_i \rho'_A \otimes \rho'_B \otimes \dots, \quad (1.16)$$

其中 ρ'_A, ρ'_B, \dots 是分别描述各子系统的密度算子, $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ 。那么

$$E(\rho) = 0 \quad (1.17)$$

即对于分离态, 纠缠度为零;

(2) 各个子系统的局域么正变换不改变总系统的纠缠度 $E(\rho)$, 即

$$E(\rho) = E[(U_A \otimes U_B \otimes \dots) \rho (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger \otimes \dots)] \quad (1.18)$$

也就是说在局域操作和经典通信(简记为 LOCC 操作)下, 复合系统的平均纠缠度不增加;

(3) 设 $\Psi_{AB\dots}$ 和 $\Phi_{AB\dots}$ 是由 A、B、……多子系统构成的复合系统态, 纠缠度对这两个态的张量积应当是可加的, 即

$$E(\Psi_{AB\dots} \otimes \Phi_{AB\dots}) = E(\Psi_{AB\dots}) + E(\Phi_{AB\dots}) \quad (1.19)$$

一般来说在文献中, 纠缠的量度分为下列五种:

- (1) von Neumann 熵;
- (2) 结构纠缠(entanglement of formation) [25];
- (3) 可提取纠缠(entanglement of distillation) [25];
- (4) 纠缠相对熵 (relative entropy of entanglement) [60];
- (5) 共生纠缠(concurrence) [51]。

对于两体纯态, von Neumann 熵和共生纠缠是一种好的纠缠度量。对于混合态, 除了在两体两维系统中混合态的结构纠缠有明确的解析公式之外, 对于其他情况由于结构纠缠、可提取纠缠和纠缠相对熵都涉及到求极值问题, 迄今为止还没有确切的公式来计算它们。

§ 1.6 论文的主要工作

本论文我们主要从理论上探讨了几种可实现的量子隐形传态的方案、纠缠态的纯化、纠缠随时间的演化。整个学位论文的安排如下:

1. 在第一章绪论中, 我们给出了量子信息学的几个基本概念、量子隐形传态的概念、纠缠态纯化的概念以及它们的研究进展。此章内容是我研究工作的背

景和基础。

2. 第二章我们提出了几种量子态的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案,并给出了在量子几率隐形传态方案中的传输成功几率。在第一节,首先提出了通过三对非最大纠缠态粒子来实现三粒子纠缠态的量子几率隐形传态方案;在第二节,探讨了通过四个纠缠态粒子来实现未知的三个纠缠态粒子的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案;在第三节,讨论了通过纠缠交换来实现两个三态粒子纠缠态的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案;在第四节,研究了利用大失谐 J-C 模型中的一个二能级原子与腔场的相互作用来实现薛定谔猫态的隐形传态方案。虽然我们提出的都是有限个粒子态的传态方案,但是我们方案的方法可以推广到多粒子态的隐形传态。

3. 第三章我们研究了纠缠态的纯化。首先研究了两粒子纠缠态的纯化和三粒子纠缠态的纯化,并给出了从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率;接着将上述方法运用到多粒子纠缠态的纯化上,同时也给出从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率。

4. 第四章我们分别利用纠缠度的两种不同定义研究了两个量子系统的纠缠随时间的演化情况。第一节我们讨论的是单光子 J-C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化;第二节则探讨的是双光子 J-C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化,并得出此两个系统的纠缠随时间演化的规律。

5. 最后一章为整个研究工作的总结。

第二章 量子隐形传态和量子几率隐形传态

自 1993 年 Bennett 等人[1]在题为“经由经典和 EPR 信道传输未知量子态”的开创性文献中提出了量子隐形传态方案后, 隐形传态已成为量子信息领域最重要的研究对象之一。此后, 人们提出各种可供选择的隐形传态的方案, 主要分为用最大纠缠态粒子 (EPR 对) 作为量子信道的传态方案[17,18,29,31]、用非最大纠缠态粒子作为量子信道的几率传态方案[19,21,24,28]以及用 QED 腔场来实现的原子态或“猫态”的传态方案[15,23,26,35,37,38]。本章提出了几个新的尚未见于文献报道的量子隐形传态的方案。

§ 2.1 通过三对非最大纠缠态粒子来实现三粒子

纠缠态的量子几率隐形传态

郭光灿等人[31]提出用两对最大纠缠态粒子 (EPR 对) 作为量子信道, 通过纠缠交换的方法来实现二粒子纠缠态的量子隐形传态, 同时他还提出可以用两对非最大纠缠态粒子作为量子信道来实现二粒子纠缠态的量子隐形传态。方等人[17]提出用三对最大纠缠态粒子作为量子信道来传输三粒子的纠缠态。在文献[17,31]的基础上, 我们在这里提出一个利用三对非最大纠缠态粒子作为量子信道来实现三粒子纠缠态的隐形传态的方案。

现设想 Alice 有一未知的三个二态粒子的纠缠态

$$|\Psi\rangle_{123} = x|000\rangle_{123} + y|111\rangle_{123} \quad (2.1.1)$$

要将它传送给 Bob, Alice 可以在她和 Bob 之间制备另外的三对处于非最大纠缠态的二态粒子, 即

$$|\Psi\rangle_{45} = a|00\rangle_{45} + b|11\rangle_{45} \quad (2.1.2)$$

$$|\Psi\rangle_{67} = c|00\rangle_{67} + d|11\rangle_{67} \quad (2.1.3)$$

$$|\Psi\rangle_{89} = e|00\rangle_{89} + f|11\rangle_{89} \quad (2.1.4)$$

不失一般性, 可设 6 个系数均为实数且满足 $|a| > |b|$ 、 $|c| > |d|$ 、 $|e| > |f|$ 和 $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = |e|^2 + |f|^2 = 1$ 。

Alice 用它们作为她和 Bob 之间的量子信道。我们假设粒子 1、2、3、4、6 和 8 属于 Alice, 粒子 5、7、9 属于 Bob, 这时系统的总量子态是 $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{123} |\Psi\rangle_{45} |\Psi\rangle_{67} |\Psi\rangle_{89}$ 。粒子 14、26、38 的 Bell 态可表示为

$$|\Phi^\pm\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{ij} \pm |11\rangle_{ij}) \quad (2.1.5)$$

$$|\Psi^\pm\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{ij} \pm |10\rangle_{ij}) \quad (2.1.6)$$

其中 ij 分别可取为 14、26、38。

传输时, Alice 先对粒子 1 和 4 进行 Bell 态测量, 此时粒子 2、3、5、6、7、8、9 的态将根据不同的测量结果分别塌缩到下列的相应态上

$$\langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (ax|000\rangle_{235} \pm by|111\rangle_{235}) |\Psi\rangle_{67} |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.7)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (bx|001\rangle_{235} \pm ay|110\rangle_{235}) |\Psi\rangle_{67} |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.8)$$

接着, Alice 对粒子 2 和 6 进行 Bell 态测量, 粒子 3、5、7、8、9 的态将塌缩到下列的相应态上

$$\langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2} (acx|000\rangle_{357} \pm \pm bdy|111\rangle_{357}) |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.9)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2} (adx|001\rangle_{357} \pm \pm bcy|110\rangle_{357}) |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.10)$$

$$\langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2} (bcx|010\rangle_{357} \pm \pm ady|101\rangle_{357}) |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.11)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2} (bdx|011\rangle_{357} \pm \pm acy|111\rangle_{357}) |\Psi\rangle_{89} \quad (2.1.12)$$

最后, Alice 对粒子 3 和 8 进行 Bell 态测量, 粒子 5、7、9 的态将塌缩到下列的相应态上

$$\langle \Phi^\pm |_{38} \langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (acex|000\rangle_{579} \pm \pm \pm bdfy|111\rangle_{579}) \quad (2.1.13)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{38} \langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (acfx|001\rangle_{579} \pm \pm \pm bdey|110\rangle_{579}) \quad (2.1.14)$$

$$\langle \Phi^\pm |_{38} \langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (adex|010\rangle_{579} \pm \pm \pm bcfy|101\rangle_{579}) \quad (2.1.15)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{38} \langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Phi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (adfx|011\rangle_{579} \pm \pm \pm bcey|100\rangle_{579}) \quad (2.1.16)$$

$$\langle \Phi^\pm |_{38} \langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (bcex|100\rangle_{579} \pm \pm \pm adfy|011\rangle_{579}) \quad (2.1.17)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{38} \langle \Phi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (bcfx|101\rangle_{579} \pm \pm \pm adey|010\rangle_{579}) \quad (2.1.18)$$

$$\langle \Phi^\pm |_{38} \langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (bdex|110\rangle_{579} \pm \pm \pm acfy|011\rangle_{579}) \quad (2.1.19)$$

$$\langle \Psi^\pm |_{38} \langle \Psi^\pm |_{26} \langle \Psi^\pm |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (bdfx|111\rangle_{579} \pm \pm \pm acey|000\rangle_{579}) \quad (2.1.20)$$

其中，符号“ \pm ”从右到左分别对应着粒子 14、26、38 的 Bell 态的符号。

现假设 Alice 三次的测量结果分别是 $|\Phi^+\rangle_{14}$ ， $|\Phi^+\rangle_{26}$ ， $|\Phi^+\rangle_{38}$ ，她要用经典信道将测量结果告诉 Bob，由 (2.1.13) 式 Bob 即可知 5、7、9 三粒子的态为

$$\langle \Phi^+ |_{38} \langle \Phi^+ |_{26} \langle \Phi^+ |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (acex|000\rangle_{579} + bdfy|111\rangle_{579}) \quad (2.1.21)$$

假设 $|a\rangle|c\rangle|d\rangle|e\rangle|f\rangle|b\rangle$ ，则有 $|ace\rangle|bdf\rangle$ 和 $|adf\rangle|bce\rangle$ 。为了得到 Alice 想要传输的 (2.1.1) 式的态，Bob 可引入初始量子态为 $|0\rangle_A$ 的粒子 A 作为辅助，对三粒子 5、7、A 子系统的基矢 $\{|000\rangle_{57,A}$ ， $|001\rangle_{57,A}$ ， $|010\rangle_{57,A}$ ， $|011\rangle_{57,A}$ ， $|100\rangle_{57,A}$ ， $|101\rangle_{57,A}$ ， $|110\rangle_{57,A}$ ， $|111\rangle_{57,A}\}$ 实施一个么正变换

$$\begin{bmatrix} \frac{bdf}{ace} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{bdf}{ace}\right)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1 - \left(\frac{bdf}{ace}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{bdf}{ace} \end{bmatrix}$$

在此么正变换下, (2.1.21) 式变为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} bdf (x|000\rangle_{579} + y|111\rangle_{579})|0\rangle_A + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{bdf}{ace}\right)^2} ace|000\rangle_{579}|1\rangle_A \quad (2.1.22)$$

进而 Bob 对粒子 A 进行测量, 若结果为 $|1\rangle_A$, 则传输失败; 若结果为 $|0\rangle_A$, 这时粒子 5、7、9 的态将塌缩为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} bdf (x|000\rangle_{579} + y|111\rangle_{579}) \quad (2.1.23)$$

此时隐形传态成功的实现。由 (2.1.23) 式显然可见传输成功的几率为 $\frac{1}{8} |bdf|^2$ 。

再例如 Alice 测量的结果为 $|\Phi^+\rangle_{38}$, $|\Phi^+\rangle_{26}$, $|\Psi^-\rangle_{14}$, 由 (2.1.17) 可得 Bob 处的粒子态为

$$\langle \Phi^+ |_{38} \langle \Phi^+ |_{26} \langle \Psi^- |_{14} \Psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (bcex|100\rangle_{579} - adfy|011\rangle_{579}) \quad (2.1.24)$$

Bob 先对其进行么正变换 $(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|)_5 \otimes I_7 \otimes I_9$, 使系统的态变为

$$\langle \Phi^+ |_{38} \langle \Phi^+ |_{26} \langle \Psi^- |_{14} \Psi \rangle \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (bcex|000\rangle_{579} + adfy|111\rangle_{579}) \quad (2.1.25)$$

再引入辅助粒子 A, 则作如下么正变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{bce}{adf} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{bce}{adf}\right)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{bce}{adf}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{bce}{adf} \end{bmatrix}$$

Bob 处的系统态变为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} bce (x|000\rangle_{579} + y|111\rangle_{579})|0\rangle_A + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{bce}{adf}\right)^2} adf |111\rangle_{579} |1\rangle_A \quad (2.1.26)$$

最后, Bob 再对辅助粒子 A 作测量, 由上式可知传输成功的几率为 $\frac{1}{8} |bce|^2$ 。

用相同的分析方法, 我们可分别得到其余各种情况传输成功的几率。

针对 Alice 作 Bell 态测量的不同结果, Bob 对 5、7、9 粒子所应分别实施的幺正变换见表 2.1。

综合所有的情况 (共 64 种), 用完全相同的推理方法可知传输成功的总几率为 $2|b|^2$ 。倘若在 a、b、c、d、e、f 六个系数中, 设 $|d|$ 最小, 则传输成功的总几率为 $2|d|^2$, 即传输成功的总几率为 $2 \times \min\{|a|^2, |b|^2, |c|^2, |d|^2, |e|^2, |f|^2\}$ 。如果 $|a|=|b|=|c|=|d|=|e|=|f|$, 则有 $|b|^2=0.5$, $2|b|^2=1$, 即传输成功的总几率为 1, 这就是采用 EPR 对作为传输信道时所实现的隐形传态。

本节提出了一种以三对非最大纠缠态粒子作为量子信道来实现三粒子纠缠态的几率隐形传态的方案, 并给出了此方案传输成功的总几率。而文献[17]是利用最大纠缠态粒子作为量子信道来实现三粒子纠缠态的隐形传态。由于制备非最大纠缠态比制备最大纠缠态容易得多, 而且最大纠缠态在环境中会消纠缠, 可见采用非最大纠缠态作为量子信道亦具有一定的实际意义。但我们也要看到我们的方案只是几率隐形传态方案, 而文献[17]则是必然性的隐形传态方案。

表 2.1 不同的测量结果和相应的么正变换

Alice 的测量结果	Bob 的么正变换
$ \Phi^\pm\rangle_{38}, \Phi^\pm\rangle_{26}, \Phi^\pm\rangle_{14}$	$I_5 \otimes I_7 \otimes (0\rangle\langle 0 \pm 1\rangle\langle 1)_9$
$ \Psi^\pm\rangle_{38}, \Phi^\pm\rangle_{26}, \Phi^\pm\rangle_{14}$	$I_5 \otimes I_7 \otimes (0\rangle\langle 1 \pm 1\rangle\langle 0)_9$
$ \Phi^\pm\rangle_{38}, \Psi^\pm\rangle_{26}, \Phi^\pm\rangle_{14}$	$I_5 \otimes (0\rangle\langle 1 \pm 1\rangle\langle 0)_7 \otimes I_9$
$ \Psi^\pm\rangle_{38}, \Psi^\pm\rangle_{26}, \Phi^\pm\rangle_{14}$	$I_5 \otimes (0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_7 \otimes (0\rangle\langle 1 \pm 1\rangle\langle 0)_9$
$ \Phi^\pm\rangle_{38}, \Phi^\pm\rangle_{26}, \Psi^\pm\rangle_{14}$	$(0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_5 \otimes I_7 \otimes I_9$
$ \Psi^\pm\rangle_{38}, \Phi^\pm\rangle_{26}, \Psi^\pm\rangle_{14}$	$(0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_5 \otimes I_7 \otimes (0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_9$
$ \Phi^\pm\rangle_{38}, \Psi^\pm\rangle_{26}, \Psi^\pm\rangle_{14}$	$(0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_5 \otimes (0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_7 \otimes I_9$
$ \Psi^\pm\rangle_{38}, \Psi^\pm\rangle_{26}, \Psi^\pm\rangle_{14}$	$(0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_5 \otimes (0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_7 \otimes (0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0)_9$

§ 2.2 通过四个纠缠态粒子来现未知的三粒子

纠缠态的量子几率隐形传态

最近, N 个多态粒子的传输引起了人们的极大兴趣, 特别是 N 个三态粒子的传输更引人注目, 同时也吸引了一大批研究者的关注。例如, 周等人[30]提出了一种通过 EPR 对来传输一个有限态粒子的方案; 戴等人[28]提出了一种通过三个三态纠缠态粒子来传输两个三态纠缠态粒子的方案等。在文献[28,30]的基础上, 我们提出分别利用四个三态粒子的最大纠缠态和非最大纠缠态作为量子信道来实现未知的三个三态粒子纠缠态的隐形传态方案。我们首先探讨量子信道是最大纠缠态的情况, 然后进一步研究量子信道是非最大纠缠态的情况。

§ 2.2.1 利用四个三态粒子的最大纠缠态作为量子信道

实现未知的三粒子纠缠态的量子隐形传态

现设想 Alice 有一未知的三个三态粒子的纠缠态

$$|\Psi\rangle_{123} = x|000\rangle_{123} + y|111\rangle_{123} + z|222\rangle_{123} \quad (2.2.1)$$

其中 x, y, z 为任意实数并满足 $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$ 。Alice 要将它传送给 Bob, Alice 可以在她和 Bob 之间制备另外四个处于最大纠缠态的三态粒子, 即

$$|\Psi\rangle_{4567} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0000\rangle_{4567} + |1111\rangle_{4567} + |2222\rangle_{4567}) \quad (2.2.2)$$

作为量子信道。我们假设粒子 1、2、3、4 属于 Alice, 粒子 5、6、7 属于 Bob, 此时系统总的量子态为 $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{123} |\Psi\rangle_{4567}$ 。粒子 1 和 4 的 Bell 态为

$$|\Psi_{nm}\rangle = \sum_j e^{2\pi i j n / 3} |j\rangle \otimes |(j+m) \bmod 3\rangle / \sqrt{3} \quad (2.2.3)$$

其中 $n, j, m = 0, 1, 2$, 将上一式进一步展开可得

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle_{14} + |11\rangle_{14} + |22\rangle_{14}) \quad (2.2.4)$$

$$|\Psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle_{14} + e^{2\pi i / 3}|11\rangle_{14} + e^{4\pi i / 3}|22\rangle_{14}) \quad (2.2.5)$$

$$|\Psi_{20}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle_{14} + e^{4\pi i / 3}|11\rangle_{14} + e^{2\pi i / 3}|22\rangle_{14}) \quad (2.2.6)$$

$$|\Psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|01\rangle_{14} + |12\rangle_{14} + |20\rangle_{14}) \quad (2.2.7)$$

$$|\Psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|01\rangle_{14} + e^{2\pi i / 3}|12\rangle_{14} + e^{4\pi i / 3}|20\rangle_{14}) \quad (2.2.8)$$

$$|\Psi_{21}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|01\rangle_{14} + e^{4\pi i / 3}|12\rangle_{14} + e^{2\pi i / 3}|20\rangle_{14}) \quad (2.2.9)$$

$$|\Psi_{02}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|02\rangle_{14} + |10\rangle_{14} + |21\rangle_{14}) \quad (2.2.10)$$

$$|\Psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|02\rangle_{14} + e^{2\pi i / 3}|10\rangle_{14} + e^{4\pi i / 3}|21\rangle_{14}) \quad (2.2.11)$$

$$|\Psi_{22}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|02\rangle_{14} + e^{4\pi i/3}|10\rangle_{14} + e^{2\pi i/3}|21\rangle_{14}) \quad (2.2.12)$$

传输时, Alice 先对粒子 1 和 4 进行 Bell 态测量, 这时系统的量子态将塌缩为 ${}_{14}\langle\Psi_{nm}|\Psi\rangle$, 进一步展开可得

$${}_{14}\langle\Psi_{00}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00000\rangle_{23567} + y|11111\rangle_{23567} + z|22222\rangle_{23567}) \quad (2.2.13)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{10}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00000\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}y|11111\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}z|22222\rangle_{23567}) \quad (2.2.14)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{20}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00000\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}y|11111\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}z|22222\rangle_{23567}) \quad (2.2.15)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{01}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00111\rangle_{23567} + y|11222\rangle_{23567} + z|22000\rangle_{23567}) \quad (2.2.16)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{11}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00111\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}y|11222\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}z|22000\rangle_{23567}) \quad (2.2.17)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{21}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00111\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}y|11222\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}z|22000\rangle_{23567}) \quad (2.2.18)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{02}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00222\rangle_{23567} + y|11000\rangle_{23567} + z|22111\rangle_{23567}) \quad (2.2.19)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{12}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00222\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}y|11000\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}z|22111\rangle_{23567}) \quad (2.2.20)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{22}|\Psi\rangle = \frac{1}{3}(x|00222\rangle_{23567} + e^{-4\pi i/3}y|11000\rangle_{23567} + e^{-2\pi i/3}z|22111\rangle_{23567}) \quad (2.2.21)$$

接着, Alice 对粒子 2 和 3 在基 $\{|\pi_0\rangle, |\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle\}$ 下进行单独测量, 基 $\{|\pi_0\rangle, |\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle\}$ 被定义为

$$\begin{pmatrix} |\pi_0\rangle \\ |\pi_1\rangle \\ |\pi_2\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |2\rangle \end{pmatrix} \quad (2.2.22)$$

其中 $\lambda = e^{2\pi i/3}$ 。粒子 5、6、7 的量子态塌缩为

$$|\Psi\rangle_{567} = {}_2\langle\pi_\alpha| \otimes {}_3\langle\pi_\beta| \otimes {}_{14}\langle\Psi_{nm}|\Psi\rangle \quad (2.2.23)$$

其中 $\alpha, \beta = 0, 1, 2$ 。根据 (2.2.13) — (2.2.22) 式, 可很容易对上式展开。

最后, Alice 将测量结果通过经典信道告诉 Bob, Bob 根据接收到的信息对粒子 5、6 和 7 的基实施相应的幺正变换 U'_{nm} (如下式), 即可重建 Alice 要传输的

量子态，实现量子态的隐形传态：

$$U_{nm}^\gamma = \sum_j e^{2\pi i j(m+\gamma)/3} (|j\rangle\langle(j+m)\bmod 3|) \otimes (|j\rangle\langle(j+m)\bmod 3|) \otimes (|j\rangle\langle(j+m)\bmod 3|) \quad (2.2.24)$$

其中 nm 与 (2.2.3) 式中的 nm 一致； γ 的取值与 α 和 β 有关，若 $\alpha = \beta$ ，则 $\gamma = \alpha = \beta$ ；若 $\alpha \neq \beta$ ，则 γ 取 α 和 β 之外的第三个数(即 0、1、2 的其中之一)。

例如，当 Alice 对粒子 1、4 和粒子 2、3 的单独测量结果分别是 $|\Psi_{00}\rangle$ 和 $|\pi_1\rangle|\pi_1\rangle$ 时，则由 (2.2.13)、(2.2.22) 和 (2.2.23) 很容易得出

$$|\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{9}(x|000\rangle_{567} + \lambda^2 y|111\rangle_{567} + \lambda z|222\rangle_{567}) \quad (2.2.25)$$

对上式实施幺正变换 $U_{00}^0 = |000\rangle\langle 000| + \lambda |111\rangle\langle 111| + \lambda^2 |222\rangle\langle 222|$ 可得

$$U_{00}^0 |\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{9}(x|000\rangle_{567} + y|111\rangle_{567} + z|222\rangle_{567}) \quad (2.2.26)$$

此即为 Alice 要传输的 (2.2.1) 式的态。

再例如 Alice 对粒子 1、4 和对粒子 2、3 的单独测量结果分别是 $|\Psi_{01}\rangle$ 和 $|\pi_1\rangle|\pi_1\rangle$ ，则由 (2.2.16)、(2.2.22) 和 (2.2.23) 很容易得出

$$|\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{9}(x|111\rangle_{567} + y|222\rangle_{567} + z|000\rangle_{567}) \quad (2.2.27)$$

对上式实施幺正变换 $U_{01}^2 = |000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 222| + |222\rangle\langle 000|$ 可得

$$U_{01}^2 |\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{9}(x|000\rangle_{567} + y|111\rangle_{567} + z|222\rangle_{567}) \quad (2.2.28)$$

此即为 Alice 要传输的 (2.2.1) 式的态。

同理，我们可以验证其他 79 种情况均能实现相应的隐形传态。因此这是一种必然性(几率为 1)的隐形传态方案。

§ 2.2.2 利用四个三态粒子的非最大纠缠态作为量子信道

实现未知的三粒子纠缠态的量子几率隐形传态

设 Alice 要将 (2.2.1) 式的态传输给 Bob。Alice 可在她和 Bob 之间制备四个处于非最大纠缠态的三态粒子作为量子信道，即

$$|\Psi\rangle_{4567} = a|0000\rangle_{4567} + b|1111\rangle_{4567} + c|2222\rangle_{4567} \quad (2.2.29)$$

不失一般性, 可设 a, b, c 为实数且满足 $|a| > |c| > |b|$ 和 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$ 。同样, 假设粒子 1、2、3、4 属于 Alice, 粒子 5、6、7 属于 Bob, 这时系统的量子态是 $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{123} |\Psi\rangle_{4567}$ 。

首先 Alice 对粒子 1 和 4 进行 Bell 态测量, 这时系统的量子态将塌缩为

${}_{14}\langle\Psi_{nm}|\Psi\rangle$, 根据 (2.2.4) — (2.2.12) 式, 进一步展开可得

$${}_{14}\langle\Psi_{00}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(ax|00000\rangle_{23567} + by|11111\rangle_{23567} + cz|22222\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.30)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{10}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(ax|00000\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} by|11111\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} cz|22222\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.31)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{20}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(ax|00000\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} by|11111\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} cz|22222\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.32)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{01}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(bx|00111\rangle_{23567} + cy|11222\rangle_{23567} + az|22000\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.33)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{11}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(bx|00111\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} cy|11222\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} az|22000\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.34)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{21}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(bx|00111\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} cy|11222\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} az|22000\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.35)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{02}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(cx|00222\rangle_{23567} + ay|11000\rangle_{23567} + bz|22111\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.36)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{12}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(cx|00222\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} ay|11000\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} bz|22111\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.37)$$

$${}_{14}\langle\Psi_{22}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(cx|00222\rangle_{23567} + e^{-4\pi/3} ay|11000\rangle_{23567} + e^{-2\pi/3} bz|22111\rangle_{23567} \right) \quad (2.2.38)$$

接着, Alice 对粒子 2 和 3 在基 $\{|\pi_0\rangle, |\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle\}$ 下进行单独测量, 根据 (2.2.22) 式可得此时粒子 5、6、7 的量子态也塌缩为 (2.2.23) 式的形式。

假设 Alice 对粒子 1、4 和对单独粒子 2、3 的测量结果分别是 $|\Psi_{00}\rangle$ 和 $|\pi_1\rangle|\pi_1\rangle$,

则由 (2.2.30)、(2.2.22) 和 (2.2.23) 式很容易得出

$$|\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(ax|000\rangle_{567} + b\lambda^2 y|111\rangle_{567} + c\lambda z|222\rangle_{567}) \quad (2.2.39)$$

再对 $|\Psi\rangle_{567}$ 实施么正变换 $U_{00}^0 = |000\rangle\langle 000| + \lambda|111\rangle\langle 111| + \lambda^2|222\rangle\langle 222|$, 可得

$$U_{00}^0|\Psi\rangle_{567} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(ax|000\rangle_{567} + by|111\rangle_{567} + cz|222\rangle_{567}) \quad (2.2.40)$$

这时为了得到 Alice 想要传输的(2.2.1)式的态, Bob 可引入初始量子态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A, 对基矢 $\{|000\rangle_{56A}, |110\rangle_{56A}, |220\rangle_{56A}, |001\rangle_{56A}, |111\rangle_{56A}, |221\rangle_{56A}, |002\rangle_{56A}, |112\rangle_{56A}, |222\rangle_{56A}\}$ 实施一个么正变换

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{c} & 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{b}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{b}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.41)$$

将上述么正变换作用于(2.2.40)式可得

$$\frac{b}{3\sqrt{3}}(x|000\rangle_{567} + y|111\rangle_{567} + z|222\rangle_{567}) \otimes |0\rangle_A + \frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{a^2-b^2}|000\rangle_{567} + \sqrt{c^2-b^2}|222\rangle_{567}) \otimes |1\rangle_A \quad (2.2.42)$$

最后, Bob 对粒子 A 进行测量, 若结果为 $|1\rangle_A$, 则传输失败; 若结果为 $|0\rangle_A$, 则传输成功, 此时粒子 5、6 和 7 的态塌缩为

$$|\Psi\rangle_{567} = \frac{b}{3\sqrt{3}}(x|000\rangle_{567} + y|111\rangle_{567} + z|222\rangle_{567}) \quad (2.2.43)$$

显然传输成功的几率是 $\frac{|b|^2}{27}$ 。

用同样的方法我们可求得其他 80 种情况传输成功的几率均为 $\frac{|b|^2}{27}$ 。

综合所有的情况（共 81 种）可得传输成功的总几率为 $3|b|^2$ 。在 a 、 b 、 c 三个系数中，若我们设 $|a|$ 最小，则传输成功的总几率将是 $3|a|^2$ ，即传输成功的总几率是 $2 \times \min\{|a|^2, |b|^2, |c|^2\}$ 。如果 $|a|=|b|=|c|$ ，则有 $|b|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，此时传输成功的总几率为 1，即是我们在 § 2.2.1 中讨论的情况。

本节我们提出了两种量子隐形传态方案，即分别利用四个三态粒子的最大纠缠态和非最大纠缠态作为量子信道来传输未知的三个三态粒子纠缠态。不难看出，用最大纠缠态作量子信道时，Bob 不必引入辅助粒子，这时是必然性隐形传态；而非最大纠缠态作量子信道时，Bob 一般要引入辅助粒子，这时是几率隐形传态。本方案的方法也可推广到 N 个三态粒子的隐形传态，甚至可推广到 N 个多态粒子的隐形传态。

§ 2.3 通过纠缠交换实现两个三态纠缠

态粒子的量子隐形传态

郭光灿等人[31]提出一种通过纠缠交换的方法来实现两个二态纠缠态粒子的隐形传态的方案；周等人[30]提出了通过 EPR 对来传输一个有限态粒子的方案；于等人[62]提出了通过四个三态纠缠态粒子来传输三个三态纠缠态粒子的方案等。在文献[30,31,63]的基础上，我们提出分别利用两对三态粒子的最大纠缠态和非最大纠缠态作为量子信道，通过纠缠交换的方法来传输一未知的两个三态粒子的纠缠态的方案。首先讨论量子信道是最大纠缠态的情况，然后进一步研究量子信道是非最大纠缠态的情况。

§ 2.3.1 通过纠缠交换实现两个三态纠缠态粒子的量子隐形传态

纠缠态粒子的量子隐形传态

现设想 Alice 有一未知的两个三态粒子的纠缠态为

$$|\Psi\rangle_{12} = x|00\rangle_{12} + y|11\rangle_{12} + z|22\rangle_{12} \quad (2.3.1)$$

其中 x, y, z 为任意实数并满足 $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$ 。Alice 要将它传送给 Bob。

Alice 可以在她和 Bob 之间制备两对处于最大纠缠态的三态粒子作为量子信道，

即

$$|\Psi\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle_{34} + |11\rangle_{34} + |22\rangle_{34}) \quad (2.3.2)$$

$$|\Psi\rangle_{56} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle_{56} + |11\rangle_{56} + |22\rangle_{56}) \quad (2.3.3)$$

我们假设粒子 1、2、3、5 属于 Alice，粒子 4、6 属于 Bob，此时系统总的量子态是 $|\Phi\rangle = |\Psi\rangle_{12} \otimes |\Psi\rangle_{34} \otimes |\Psi\rangle_{56}$ 。

传输时，Alice 先对粒子 1 和 3 进行 Bell 态测量，再对粒子 2 和 5 进行 Bell 态测量，此时整个系统的量子态就塌缩到粒子 4 和 6 的态上，粒子 1 和 2 之间的纠缠完全消失，而在粒子 4 和 6 之间建立了新的纠缠，即粒子 1 和 2 态的纠缠通过纠缠交换传输给粒子 4 和 6 的态矢。该过程可用图 2.1 至图 2.3 来形象表示。

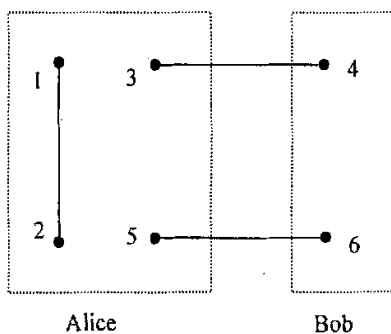


图 2.1 Alice 想要把粒子 1、2 的纠缠态传送给 Bob, 两对最大纠缠态作为量子信道, 粒子

1、2、3 和 5 在 Alice 处, 粒子 4、6 在 Bob 处。

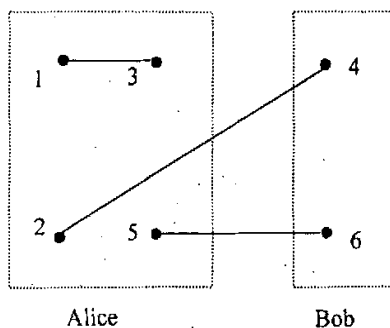


图 2.2 Alice 对粒子 1、3 进行 Bell 态测量, 在粒子 2、4 之间建立了新的纠缠。

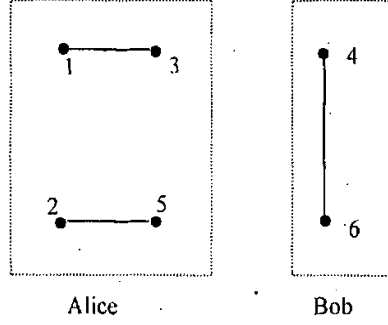


图 2.3 Alice 对粒子 2、5 进行态 Bell 态测量，在粒子 4、6 之间建立了新的纠缠。

首先，定义两个三态纠缠粒子 p 和 q 的 Bell 态为

$$|\Psi_{nm}\rangle_{pq} = \sum_j e^{2\pi i j n/3} |j\rangle_p \otimes |(j+m) \bmod 3\rangle_q / \sqrt{3} \quad (2.3.4)$$

其中 $n, j, m = 0, 1, 2$ 。Alice 对粒子 1 和 3 进行 Bell 态测量，系统的量子态塌缩为 ${}_{13}\langle\Psi_{nm}|\Phi\rangle$ ，展开可得（其中令 $\lambda = e^{2\pi i/3}$ ）

$${}_{13}\langle\Psi_{00}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0000\rangle + |0011\rangle + |0022\rangle)_{2456} + y(|1100\rangle + |1111\rangle + |1122\rangle)_{2456} + z(|2200\rangle + |2211\rangle + |2222\rangle)_{2456}] \quad (2.3.5)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{10}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0000\rangle + |0011\rangle + |0022\rangle)_{2456} + \lambda y(|1100\rangle + |1111\rangle + |1122\rangle)_{2456} + \lambda^2 z(|2200\rangle + |2211\rangle + |2222\rangle)_{2456}] \quad (2.3.6)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{20}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0000\rangle + |0011\rangle + |0022\rangle)_{2456} + \lambda^2 y(|1100\rangle + |1111\rangle + |1122\rangle)_{2456} + \lambda z(|2200\rangle + |2211\rangle + |2222\rangle)_{2456}] \quad (2.3.7)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{01}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0100\rangle + |0111\rangle + |0122\rangle)_{2456} + y(|1200\rangle + |1211\rangle + |1222\rangle)_{2456} + z(|2000\rangle + |2011\rangle + |2022\rangle)_{2456}] \quad (2.3.8)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{11}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0100\rangle + |0111\rangle + |0122\rangle)_{2456} + \lambda y(|1200\rangle + |1211\rangle + |1222\rangle)_{2456} + \lambda^2 z(|2000\rangle + |2011\rangle + |2022\rangle)_{2456}] \quad (2.3.9)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{21}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}} [x(|0100\rangle + |0111\rangle + |0122\rangle)_{2456} + \lambda^2 y(|1200\rangle + |1211\rangle + |1222\rangle)_{2456} + \lambda z(|2000\rangle + |2011\rangle + |2022\rangle)_{2456}] \quad (2.3.10)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{02}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}}[x(|0200\rangle+|0211\rangle+|0222\rangle)_{2456} + y(|1000\rangle+|1011\rangle+|1022\rangle)_{2456} + z(|2100\rangle+|2111\rangle+|2122\rangle)_{2456}] \quad (2.3.11)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{12}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}}[x(|0200\rangle+|0211\rangle+|0222\rangle)_{2456} + \lambda y(|1000\rangle+|1011\rangle+|1022\rangle)_{2456} + \lambda^2 z(|2100\rangle+|2111\rangle+|2122\rangle)_{2456}] \quad (2.3.12)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{22}|\Phi\rangle = \frac{1}{3\sqrt{3}}[x(|0200\rangle+|0211\rangle+|0222\rangle)_{2456} + \lambda^2 y(|1000\rangle+|1011\rangle+|1022\rangle)_{2456} + \lambda z(|2100\rangle+|2111\rangle+|2122\rangle)_{2456}] \quad (2.3.13)$$

接着, Alice 再对粒子 2 和 5 进行 Bell 态测量, 系统的量子态进一步塌缩为 ${}_{25}\langle\Psi_{k\ell}|\rangle_{13}\langle\Psi_{mn}|\Phi\rangle$, 其中 $k, \ell, m, n=0, 1, 2$ 。由于篇幅有限在此就不再对上式展开了。

最后, Alice 将两次 Bell 态测量的结果 (即 k, ℓ, m, n 共 $2\log_2 9 \sim 6.33985$ 比特信息量) 通过经典信道告诉 Bob, Bob 根据接收到的信息对粒子 4 和 6 的基实施幺正变换 $U_{mn}^{k\ell}$

$$U_{mn}^{k\ell} = \sum_j e^{i\pi j(k+m)/3} |j\rangle \otimes |j\rangle \langle (j+n) \bmod 3| \otimes \langle (j+\ell) \bmod 3| \quad (2.3.14)$$

即可重建 Alice 要传输的量子态, 成功的实现了量子态的隐形传态。例如, 若 Alice 对粒子 1、3 和粒子 2、5 的测量结果分别是 $|\Psi_{00}\rangle_{13}$ 和 $|\Psi_{10}\rangle_{25}$, 则由 (2.3.4) 和 (2.3.5) 式很容易得出

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{9}(x|00\rangle_{46} + \lambda y|11\rangle_{46} + \lambda^2 z|22\rangle_{46}) \quad (2.3.15)$$

根据 (2.3.14) 式, 对上式实施幺正变换 $U_{00}^{10} = |00\rangle\langle 00| + \lambda^2|11\rangle\langle 11| + \lambda|22\rangle\langle 22|$, 可得

$$U_{00}^{10}|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{9}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \quad (2.3.16)$$

此即为 Alice 要传输的 (2.3.1) 式的态。

再例如 Alice 对粒子 1、3 和对粒子 2、5 的测量结果分别是 $|\Psi_{10}\rangle_{13}$ 和 $|\Psi_{11}\rangle_{25}$, 则由 (2.3.4) 和 (2.3.6) 式很容易得出

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{9}(x|01\rangle_{46} + \lambda^2 y|12\rangle_{46} + \lambda z|20\rangle_{46}) \quad (2.3.17)$$

根据 (2.3.14) 式, 对上式实施么正变换 $U_{10}^{11} = |00\rangle\langle 10| + \lambda|11\rangle\langle 12| + \lambda^2|22\rangle\langle 20|$,

可得

$$U_{10}^{11}|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{9}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \quad (2.3.18)$$

此即为 Alice 要传输的 (2.3.1) 式的态。

同理, 我们可以验证其他 79 种情况均能成功地传输。因此这是一种必然性的隐形传态方案。

§ 2.3.2 通过纠缠交换来实现两个三态纠缠

态粒子的量子几率隐形传态

Alice 要将 (2.3.1) 式的量子态传送给 Bob。Alice 可以在她和 Bob 之间制备两对处于非最大纠缠态的三态粒子, 即

$$|\Psi\rangle_{34} = a|00\rangle_{34} + b|11\rangle_{34} + c|22\rangle_{34} \quad (2.3.19)$$

$$|\Psi\rangle_{56} = d|00\rangle_{56} + e|11\rangle_{56} + f|22\rangle_{56} \quad (2.3.20)$$

作为量子信道, 其中 a、b、c、d、e、f 为任意实数, 并满足 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$, $|d|^2 + |e|^2 + |f|^2 = 1$, 且假设 a 的绝对植最小。我们再假设粒子 1、2、3、5 属于 Alice, 粒子 4、6 属于 Bob, 此时系统总的量子态形式上仍然为 $|\Phi\rangle = |\Psi\rangle_{12} \otimes |\Psi\rangle_{34} \otimes |\Psi\rangle_{56}$ 。

传输时, Alice 先对粒子 1 和 3 进行 Bell 态测量, 再对粒子 2 和 5 进行 Bell 态测量, 此时整个系统的量子态就塌缩到粒子 4 和 6 的态上, 粒子 1 和 2 之间的纠缠完全消失, 而在粒子 4 和 6 之间建立了新的纠缠, 即粒子 1 和 2 态的纠缠通过纠缠交换传输给粒子 4 和 6 的态矢。

首先, Alice 对粒子 1 和 3 进行 Bell 态测量, 在此两个三态纠缠粒子 p 和 q 的 Bell 态仍被定义为 (2.3.4) 式。这时系统的量子态塌缩为 ${}_{13}\langle\Psi_m|\Phi\rangle$, 展开可得 (其中令 $\lambda = e^{2\pi i/3}$)

$${}_{13}\langle\Psi_{00}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(ad|0000) + ae|0011) + af|0022)]_{2456} + \\ y(bd|1100) + be|1111) + bf|1122)]_{2456} + z(cd|2200) + ce|2211) + cf|2222)]_{2456}] \quad (2.3.21)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{10}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(ad|0000) + ae|0011) + af|0022)]_{2456} + \\ \lambda y(bd|1100) + be|1111) + bf|1122)]_{2456} + \lambda^2 z(cd|2200) + ce|2211) + cf|2222)]_{2456}] \quad (2.3.22)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{20}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(ad|0000) + ae|0011) + af|0022)]_{2456} + \\ \lambda^2 y(bd|1100) + be|1111) + bf|1122)]_{2456} + \lambda z(cd|2200) + ce|2211) + cf|2222)]_{2456}] \quad (2.3.23)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{01}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(bd|0100) + be|0111) + bf|0122)]_{2456} + \\ y(cd|1200) + ce|1211) + cf|1222)]_{2456} + z(ad|2000) + ae|2011) + af|2022)]_{2456}] \quad (2.3.24)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{11}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(bd|0100) + be|0111) + bf|0122)]_{2456} + \\ \lambda y(cd|1200) + ce|1211) + cf|1222)]_{2456} + \lambda^2 z(ad|2000) + ae|2011) + af|2022)]_{2456}] \quad (2.3.25)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{21}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(bd|0100) + be|0111) + bf|0122)]_{2456} + \\ \lambda^2 y(cd|1200) + ce|1211) + cf|1222)]_{2456} + \lambda z(ad|2000) + ae|2011) + af|2022)]_{2456}] \quad (2.3.26)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{02}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(cd|0200) + ce|0211) + cf|0222)]_{2456} + \\ y(ad|1000) + ae|1011) + af|1022)]_{2456} + z(bd|2100) + be|2111) + bf|2122)]_{2456}] \quad (2.3.27)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{12}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(cd|0200) + ce|0211) + cf|0222)]_{2456} + \\ \lambda y(ad|1000) + ae|1011) + af|1022)]_{2456} + \lambda^2 z(bd|2100) + be|2111) + bf|2122)]_{2456}] \quad (2.3.28)$$

$${}_{13}\langle\Psi_{22}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}[x(cd|0200) + ce|0211) + cf|0222)]_{2456} + \\ \lambda^2 y(ad|1000) + ae|1011) + af|1022)]_{2456} + \lambda z(bd|2100) + be|2111) + bf|2122)]_{2456}] \quad (2.3.29)$$

接着, Alice 再对粒子 2 和 5 进行 Bell 态测量, 粒子 2 和 5 的 Bell 态仍为 (2.3.4) 式, 系统的量子态塌缩为 ${}_{25}\langle\Psi_{kl}|\Phi\rangle$, 其中 $k, \ell, m, n=0, 1, 2$ 。由于篇幅有限在此就不再对上式展开了。

最后, Alice 将两次 Bell 态测量的结果 (即 k, ℓ, m, n 共 $2\log_2 9 \sim 6.33985$

比特信息量) 通过经典信道告诉 Bob, Bob 根据接收到的信息对粒子 4 和 6 的基实施幺正变换 U_{mn}^{kl}

$$U_{mn}^{kl} = \sum_j e^{4\pi i j(k+m)/3} |j\rangle \otimes |j\rangle \langle (j+n) \bmod 3| \otimes \langle (j+l) \bmod 3| \quad (2.3.30)$$

即可重建 Alice 要传输的量子态, 成功的实现了量子态的隐形传态。例如, 假设 Alice 对粒子 1、3 和粒子 2、5 的测量结果分别是 $|\Psi_{00}\rangle_{13}$ 和 $|\Psi_{10}\rangle_{25}$ 时, 由 (2.3.21) 和 (2.3.22) 式很容易得出

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (adx|00\rangle_{46} + \lambda bey|11\rangle_{46} + \lambda^2 cfz|22\rangle_{46}) \quad (2.3.31)$$

根据 (2.3.30) 式, 对上式实施的幺正变换为 $U_{00}^{10} = |00\rangle\langle 00| + \lambda^2 |11\rangle\langle 11| + \lambda |22\rangle\langle 22|$, 可得

$$U_{00}^{10} |\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (adx|00\rangle_{46} + bey|11\rangle_{46} + cfz|22\rangle_{46}) \quad (2.3.32)$$

这时为了得到 Alice 想要传输的 (2.3.1) 式的态, Bob 可引入初始量子态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A, 然后对基矢 $\{|000\rangle_{46A}, |110\rangle_{46A}, |220\rangle_{46A}, |001\rangle_{46A}, |111\rangle_{46A}, |221\rangle_{46A}, |002\rangle_{46A}, |112\rangle_{56A}, |222\rangle_{46A}\}$ 实施一幺正变换

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{ad}{be} & 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{ad}{be}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{ad}{cf} & 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{ad}{cf}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \sqrt{1-\left(\frac{ad}{be}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{ad}{be} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \sqrt{1-\left(\frac{ad}{cf}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{ad}{cf} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

将该么正变换作用于 (2.3.32) 式可得

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle_{46} &\Rightarrow \frac{ad}{3\sqrt{3}}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \otimes |0\rangle_A \\
 &+ \frac{1}{3\sqrt{3}}[bey\sqrt{1-\left(\frac{ad}{be}\right)^2}|11\rangle_{46} + cfz\sqrt{1-\left(\frac{ad}{cf}\right)^2}|22\rangle_{46}] \otimes |1\rangle_A
 \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Bob 再对粒子 A 进行测量, 若结果为 $|1\rangle_A$, 则传输失败; 若结果为 $|0\rangle_A$, 则传输成功, 此时粒子 4、6 的态塌缩为

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{ad}{3\sqrt{3}}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \tag{2.3.34}$$

此即为 Alice 要传输的 (2.3.1) 式的态。从上式显然可看出传输成功的几率是

$$\frac{|ad|^2}{27}$$

再例如 Alice 对粒子 1、3 和对粒子 2、5 的测量结果分别是 $|\Psi_{10}\rangle_{13}$ 和 $|\Psi_{11}\rangle_{25}$,

则由 (2.3.4) 和 (2.3.22) 式很容易得出

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(aex|01\rangle_{46} + bf\lambda^2 y|12\rangle_{46} + cd\lambda z|20\rangle_{46}) \tag{2.3.35}$$

根据 (2.3.30) 式, 对上式实施的么正变换为 $U_{10}^{11} = |00\rangle\langle 10| + \lambda|11\rangle\langle 12| + \lambda^2|22\rangle\langle 20|$,

可得

$$U_{10}^{11}|\Psi\rangle_{46} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(aex|00\rangle_{46} + bfy|11\rangle_{46} + cdz|22\rangle_{46}) \quad (2.3.36)$$

这时为了得到 Alice 想要传输的态 (2.3.1) 式的态, Bob 还需引入初始量子态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A, 然后对基矢 $\{|000\rangle_{46A}, |110\rangle_{46A}, |220\rangle_{46A}, |001\rangle_{46A}, |111\rangle_{46A}, |221\rangle_{46A}, |002\rangle_{46A}, |112\rangle_{46A}, |222\rangle_{46A}\}$ 实施幺正变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ad}{be} & 0 & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{ad}{be}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ad}{cf} & 0 & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{ad}{cf}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{ad}{be}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{ad}{be} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \left(\frac{ad}{cf}\right)^2} & 0 & 0 & -\frac{ad}{cf} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将该幺正变换作用于 (2.3.36) 式可得

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{46} &\Rightarrow \frac{ae}{3\sqrt{3}}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \otimes |0\rangle_A \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{3}}[bfy\sqrt{1 - \left(\frac{ae}{bf}\right)^2}|11\rangle_{46} + cdz\sqrt{1 - \left(\frac{ae}{cd}\right)^2}|22\rangle_{46}] \otimes |1\rangle_A \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Bob 再对粒子 A 进行测量, 若结果为 $|1\rangle_A$, 则传输失败; 若结果为 $|0\rangle_A$, 则传输成功, 此时粒子 4、6 的态塌缩为

$$|\Psi\rangle_{46} = \frac{ae}{3\sqrt{3}}(x|00\rangle_{46} + y|11\rangle_{46} + z|22\rangle_{46}) \quad (2.3.38)$$

此即为 Alice 要传输的 (2.3.1) 式的态。从上式显然可看出传输成功的几率是 $\frac{|ae|^2}{27}$ 。

用同样的方法我们可求得其他 79 种情况均能成功地传输, 且总几率为

$\frac{|ad|^2}{27} \times 81 + \frac{|ae|^2}{27} \times 81 + \frac{|af|^2}{27} \times 81 = 3|a|^2$ 。倘若在 a、b、c、d、e、f 六个系数中，

$|b|$ 最小，则传输成功的总几率将是 $3|b|^2$ ，即传输成功的总几率由六个系数中绝

对值最小者确定。如果 $|a|=|b|=|c|=|d|=|e|=|f|$ ，则有 $|a|=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，此时传输成功的

总几率为 1，即是我们 在 § 2.3.1 中讨论的情况。

本节我们提出了一种量子几率隐形传态方案，即利用纠缠交换的方法来实现一未知的两个三态纠缠态粒子的量子几率隐形传态。不难看到，用最大纠缠态作量子信道时，Bob 不必引入辅助粒子，这时是必然性隐形传态；而非最大纠缠态作量子信道时，Bob 一般要引入辅助粒子，这时是几率隐形传态。同时我们也要注意，当采用纠缠交换的方法来实现隐形传态时，量子信道将浪费更多的纠缠态资源。比如在文献[28]中只要三个三态纠缠态粒子就可以实现两个三态纠缠态粒子的隐形传态；而采用纠缠交换的方法时，需要两对三态纠缠态粒子才能实现两个三态纠缠态粒子的隐形传态。

§ 2.4 利用大失谐的 Jaynes-Comings 模型实现

薛定谔猫态的隐形传态

近年来，人们又提出了一系列基于腔场量子电动力学 (QED) 的量子隐形传态的方案[15,23,26,35,37,38]。例如郑示标等人[26]提出了传输腔场的宏观叠加态的方案，他还提出通过 Raman 原子-腔的相互作用来传输一个未知的原子态的方案[35]；郭光灿等人[38]提出了利用原子与光场的非最大纠缠态传送薛定谔猫态的方案。本节是在文献[26,37,35,38]的基础上，提出利用一个二能级原子-腔场的相互作用，通过大失谐的 J-C 模型制备出原子-腔场的纠缠态，用此纠缠态作为量子信道来传输腔场的薛定谔猫态。与文献[38]相比较，在本方案中，我们讨论的是振幅很大的情况即 $|\alpha| \gg 1$ ，而且我们采用的是传统的 Bell 态测量的方法，并对结果给出了有益讨论，这些与文献[38]是显著不同的。

我们假设有待传输的腔 1 的量子初态处于如下的“猫态”

$$|\psi\rangle_1 = u|\alpha\rangle_1 + v|-\alpha\rangle_1 \quad (2.4.1)$$

其中 $|\alpha\rangle_1$ 和 $|\alpha\rangle_1$ 为两个相位相反的相干态；当 $|\alpha| \gg 1$ 时， $|\alpha\rangle_1$ 和 $|\alpha\rangle_1$ 是近似正交的 [26]，即 $\langle \alpha | -\alpha \rangle_1 \approx 0$ ，则在 $\{|\alpha\rangle_1, |-\alpha\rangle_1\}$ 所张的态矢空间中有 $|\alpha\rangle_1 \langle \alpha| + |-\alpha\rangle_1 \langle -\alpha| = I$ ； u 和 v 是任意实数，并满足 $|u|^2 + |v|^2 = 1$ 。(2.4.1) 式的态可用原子和腔场的非共振相互作用来制备 [41,42]。

再假设有初始量子态为 $|\alpha\rangle_2$ 的腔 2 来接收被传输的腔 1 的态。现在我们将一个二能级原子 A 注入腔 2，此二能级原子的初态为

$$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \quad (2.4.2)$$

其中 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 分别是原子的激发态和基态。根据 J-C 模型，在旋波近似下，原子 A 与腔场这一系统的哈密顿量为 [38]

$$H = \omega_0 S_z + \omega a_2^\dagger a_2 + g(a_2^\dagger S_- + a_2 S_+) \quad (2.4.3)$$

其中 g 是原子 A 和腔场的耦合常数， S_z 、 S_- 和 S_+ 分别为原子的反转、下降和上升算符， ω_0 为原子 A 在激发态和基态之间的跃迁频率， ω 为腔模频率， a_2^\dagger 和 a_2 分别是腔模的产生算符和湮没算符。

如果原子 A 的跃迁频率与腔场的频率的失谐量 Δ 远大于原子与腔场的耦合常数 g ，那么该系统的有效哈密顿量为

$$H = \omega_0 S_z + \omega a_2^\dagger a_2 + 2 \frac{g^2}{\Delta} S_z a_2^\dagger a_2 \quad (2.4.4)$$

在相互作用绘景中，在大失谐的情况下，该系统的相互作用哈密顿量为 [43]

$$H_1 = \frac{g^2}{\Delta} S_z a_2^\dagger a_2 \quad (2.4.5)$$

在此情况下系统的态满足薛定谔方程

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_1 |\psi(t)\rangle \quad (2.4.6)$$

上式的形式解为

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iH_1 t) |\psi(0)\rangle \quad (2.4.7)$$

其中 $|\psi(0)\rangle$ 为系统的初态。

如前所述, 可知原子 A 与腔 2 的初态为

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)|i\alpha\rangle \quad (2.4.8)$$

假设此时原子 A 和腔 2 相互作用, 经过相互作用时间 t_2 , 由 (2.4.7) 和 (2.4.8) 式可得原子 A 和腔 2 的量子态演化为

$$|\psi\rangle_{A2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|i\alpha e^{-ib}\rangle_2 + |g\rangle|i\alpha e^{ib}\rangle_2) \quad (2.4.9)$$

其中 $b = g^2 t_2 / \Delta$ 。通过调节原子 A 的速度可控制它与腔 2 的相互作用时间, 若使 $b = \pi/2$, 则 (2.4.9) 式变为

$$|\psi\rangle_{A2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha\rangle_2 + |g\rangle|-\alpha\rangle_2) \quad (2.4.10)$$

原子 A 穿过腔 2 后, 再把它注入腔 1, 此时整个系统的量子态为

$$|\psi\rangle_{A21} = |\psi\rangle_{A2} \otimes |\psi\rangle_1 \quad (2.4.11)$$

这时原子 A 和腔 1 也要发生相互作用。在原子的跃迁频率与腔场的频率大失谐情况下, 系统有效哈密顿量为

$$H_2 = \frac{g^2}{\Delta} a_1^\dagger a_1 S_2 \quad (2.4.12)$$

其中 a_1^\dagger 和 a_1 分别是腔 1 的产生算符和湮没算符。假设经过相互作用时间 t_1 , 则整个系统的量子态演化为

$$|\psi\rangle_{A21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u|e\rangle|\alpha\rangle_2|ae^{-ic}\rangle_1 + v|e\rangle|\alpha\rangle_2|-ae^{-ic}\rangle_1 + u|g\rangle|-\alpha\rangle_2|ae^{ic}\rangle_1 + v|g\rangle|-\alpha\rangle_2|-ae^{ic}\rangle_1) \quad (2.4.13)$$

其中 $c = g^2 t_1 / \Delta$ 。通过调节原子的速度可控制原子与腔 1 的相互作用时间, 若使 $c = \pi$, 则 (2.4.13) 式变为

$$|\psi\rangle_{A21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u|e\rangle|\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_1 + v|e\rangle|\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_1 + u|g\rangle|-\alpha\rangle_2|-\alpha\rangle_1 + v|g\rangle|-\alpha\rangle_2|\alpha\rangle_1) \quad (2.4.14)$$

为实现量子态的传输,对原子 A 和腔 1 进行 Bell 态测量,这里原子 A 和腔 1 的 Bell 态被定义为

$$|\Psi^\pm\rangle_{A1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha\rangle_1 \pm |g\rangle|-\alpha\rangle_1) \quad (2.4.15)$$

$$|\Phi^\pm\rangle_{A1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|\alpha\rangle_1 \pm |e\rangle|-\alpha\rangle_1) \quad (2.4.16)$$

在该相干态近似下 ($|\alpha| \gg 1$), $\langle \alpha | -\alpha \rangle_1 \approx 0$, 四个 Bell 态组成近似正交基。所以经测量,腔 2 的量子态坍塌为

$${}_{A1}\langle \Psi^\pm | \psi \rangle_{A21} = \frac{1}{2}(v|\alpha\rangle_2 \pm u|-\alpha\rangle_2) \quad (2.4.17)$$

$${}_{A1}\langle \Phi^\pm | \psi \rangle_{A21} = \frac{1}{2}(v|-\alpha\rangle_2 \pm u|\alpha\rangle_2) \quad (2.4.18)$$

假设施测测量后所得到的 Bell 态是 $|\Phi^+\rangle_{A1}$, 则腔 2 坍塌为

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{2}(u|\alpha\rangle_2 + v|-\alpha\rangle_2) \quad (2.4.19)$$

即成功地把腔 1 的初态传输给腔 2。此时若实施测量后所得到的是其他三种 Bell 态,则系统也坍塌到其相应的相干态上,这些相干态与腔 1 的初态只相差一个么正变换(如表 2.2 所示)。

表 2.2

所测得的 Bell 态	应实施的么正变换
$ \Psi^+\rangle_{12}$	$(-\alpha\rangle\langle\alpha + \alpha\rangle\langle-\alpha)_2$
$ \Psi^-\rangle_{12}$	$(-\alpha\rangle\langle\alpha - \alpha\rangle\langle-\alpha)_2$
$ \Phi^+\rangle$	$(-\alpha\rangle\langle-\alpha + \alpha\rangle\langle\alpha)_2$
$ \Phi^-\rangle$	$(-\alpha\rangle\langle-\alpha - \alpha\rangle\langle\alpha)_2$

最后我们来讨论一下本方案在实验上的可行性。对于主量子数为 50 的里德伯 (Rydberg) 原子,它的衰变时间为 $T_r = 3 \times 10^{-2} s$ [38,44]; 一般腔场的衰变时间为 $T_c = 1 \times 10^{-3} s$; 原子与腔场的耦合常数 $\lambda = 2\pi \times 25 kHz$; 最大失谐量 $\Delta = 278 kHz$;

因此我们可得到原子与两腔场的相互作用时间分别为 $t_2 = \frac{\pi}{2\lambda^2} \Delta = 1.77 \times 10^{-5} s$, $t_1 = \frac{\pi}{\lambda^2} \Delta = 3.53 \times 10^{-5} s$ 。原子通过两腔场的时间可分别假定为 $1.77 \times 10^{-4} s$ 和 $3.53 \times 10^{-4} s$, 因此原子通过两腔场的总时间为 $0.5 \times 10^{-3} s$, 这个时间比 T_r 和 T_c 都小多了。所以根据目前的 QED 技术, 我们提出的此方案可以实现。

总之, 本节提出利用一个二能级原子与腔场的相互作用, 通过大失谐的 J-C 模型制备出原子与腔场的纠缠态, 用此纠缠态作为量子信道来传输腔场的薛定谔猫态。由于在此方案中我们只使用了一个二能级原子和两个腔场, 而没使用更多的辅助粒子, 因此本方案在实验上更容易操作。

第三章 利用纠缠交换实现多粒子纠缠态纯化

由于在实际的量子通信中，通常需要最大纠缠的量子态作为信息传递的通道，这就需要从大量低纠缠度的量子态中提取少数具有尽可能高纠缠度的量子态，可见纠缠态纯化的研究就显得相当重要[45-59]。1996年，Bennett等人[45]首先提出了一种纠缠态的纯化方案，该方案是从无穷多个相同的 Werner 态中提取出一个最大纠缠态，接着他们证明了只要 Werner 态是纠缠态则该 Werner 态就是可纯化的。Horodecki 等人[46]证明了任何 2×2 系统的混合纠缠态都是可以纯化的，并提出了可提取的必要条件，由这个必要条件和纠缠态的必要条件还可得出自然界存在不可提取的纠缠态，即束缚纠缠态[46,47]。Bose 等人[48,54]又提出通过纠缠交换的方法对纠缠态进行纯化。本节是在上述文献的背景下提出利用纠缠交换的方法实现两粒子和三粒子纠缠态的纯化。文献[48]研究的是正交偏振态的纯化，而本文讨论的是福克态的纯化，并且我们将该方法推广到多粒子福克纠缠态的纯化。

§ 3.1 两粒子纠缠态的纯化

设想有两个二粒子部分纠缠态如下

$$|\psi\rangle_{12} = a|00\rangle_{12} + b|11\rangle_{12} \quad (3.1)$$

$$|\psi\rangle_{34} = c|00\rangle_{34} + d|11\rangle_{34} \quad (3.2)$$

其中 a 、 b 、 c 和 d 是任意实数且满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ， $|c|^2 + |d|^2 = 1$ 。不失一般性，在本章假设 $|a| \geq |d| \geq |c| \geq |b|$ 。

假设粒子 1、2 和 3 属于 Alice，粒子 4 属于 Bob。现在我们利用纠缠交换的方法来对它们进行纯化。首先 Alice 对粒子 1 和 3 实施 Bell 态测量，则粒子 2 和 4 塌缩到下列的态上

$${}_{13}\langle\phi^{\pm}|\psi\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_{34} = (ac|00\rangle_{24} \pm bd|11\rangle_{24})/\sqrt{2} \quad (3.3)$$

$${}_{13}\langle\varphi^{\pm}|\psi\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_{34} = (ad|00\rangle_{24} \pm bc|11\rangle_{24})/\sqrt{2} \quad (3.4)$$

其中 $|\phi^\pm\rangle_{13}$ 和 $|\varphi^\pm\rangle_{13}$ 为四个 Bell 态

$$|\phi^\pm\rangle_{13} = (|00\rangle_{13} \pm |11\rangle_{13})/\sqrt{2} \quad (3.5)$$

$$|\varphi^\pm\rangle_{13} = (|01\rangle_{13} \pm |10\rangle_{13})/\sqrt{2} \quad (3.6)$$

从 (3.1.3)、(3.1.4) 式可看出，粒子 1、2 和粒子 3、4 之间的纠缠消失，而在粒子 2、4 之间建立了新的纠缠，此即纠缠交换（如图 3.1）。

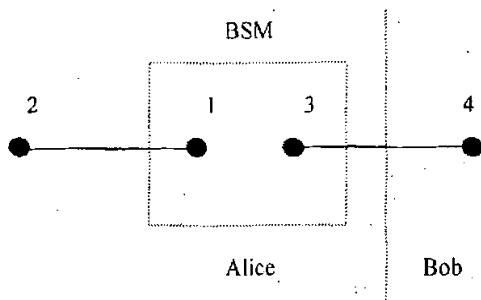


图 3.1 通过纠缠交换实现纠缠纯化的简单原理图。虚线的左边表示 Alice 拥有的部分，

右边表示 Bob 拥有的部分；BSM 表示 Alice 实施的 Bell 态测量。

接着，对于 (3.3) 式的结果，为了实现纠缠态的纯化，Alice 可引入一个初始态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A，然后对粒子 2、A 的基 $\{|00\rangle_{2A}, |10\rangle_{2A}, |01\rangle_{2A}, |11\rangle_{2A}\}$ 作么正变换 U_1

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{bd}{ac} & 0 & \sqrt{1 - (\frac{bd}{ac})^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - (\frac{bd}{ac})^2} & 0 & -\frac{bd}{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

将 U_1 作用于 (3.3) 式可得

$$bd \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{24} \pm |11\rangle_{24}) \right) |0\rangle_A + \frac{1}{\sqrt{2}} ac \sqrt{1 - (\frac{bd}{ac})^2} |00\rangle_{24} |1\rangle_A \quad (3.8)$$

最后，Alice 对粒子 A 进行测量，若测量结果为 $|1\rangle_A$ ，则粒子 2、4 完全消纠缠；若测量结果为 $|0\rangle_A$ ，显然可看出粒子 2、4 以概率 $2|bd|^2$ 坍塌为最大纠缠态。

对于 (3.4) 式的结果，为了实现纠缠态的纯化，Alice 在引入一个初始态为

$|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A 后, 应对粒子 2、A 的基 $\{|00\rangle_{2A}, |10\rangle_{2A}, |01\rangle_{2A}, |11\rangle_{2A}\}$ 实施的幺正变换 U_2 为

$$U_2 = \begin{bmatrix} \frac{bc}{ad} & 0 & \sqrt{1 - (\frac{bc}{ad})^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - (\frac{bc}{ad})^2} & 0 & -\frac{bc}{ad} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

将 U_2 作用于 (3.4) 式可得

$$bc \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle_{2A} \pm |10\rangle_{2A}) \right) |0\rangle_A + \frac{1}{\sqrt{2}} ad \sqrt{1 - (\frac{bc}{ad})^2} |01\rangle_{2A} |1\rangle_A \quad (3.10)$$

最后, Alice 对粒子 A 进行测量, 显然粒子 2、4 以概率 $2|bc|^2$ 坍塌为最大纠缠态。

因此从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率为 $2|b|^2$, 此时对于粒子 2 和 4 而言, 它们之间的纠缠增加了, 即实现了纠缠态的纯化, 但是对于整个系统而言, 总的纠缠度保持不变[48]。

§ 3.2 三粒子纠缠态的纯化

设想有两个三粒子部分纠缠态如下

$$|\psi\rangle_{123} = a|000\rangle_{123} + b|111\rangle_{123} \quad (3.11)$$

$$|\psi\rangle_{456} = c|000\rangle_{456} + d|111\rangle_{456} \quad (3.12)$$

其中 a、b、c 和 d 是任意实数且满足 $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$ 。

假设粒子 1、2、3 和 4 属于 Alice, 粒子 5、6 属于 Bob。首先 Alice 对粒子 1 和 4 实施 Bell 态测量, 则粒子 2、3、5 和 6 塌缩到下列的态上

$${}_{14}\langle\phi^+|\psi\rangle_{123} \otimes |\psi\rangle_{456} = (ac|0000\rangle_{2356} \pm bd|1111\rangle_{2356})/\sqrt{2} \quad (3.13)$$

$${}_{14}\langle\phi^+|\psi\rangle_{123} \otimes |\psi\rangle_{456} = (ad|0011\rangle_{2356} \pm bc|1100\rangle_{2356})/\sqrt{2} \quad (3.14)$$

对于 (3.13) 式的结果, 为了实现纠缠态的纯化, Alice 可引入一个初始态

为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A, 并对粒子 3、A 的基 $\{|00\rangle_{3A}, |10\rangle_{3A}, |01\rangle_{3A}, |11\rangle_{3A}\}$ 作么正变换 $U_3=U_1$ (如 (3.7) 式), 将 U_3 作用于 (3.2.13) 式得到

$$\frac{bd}{\sqrt{2}}(|0000\rangle_{2356} \pm |1111\rangle_{2356})|0\rangle_A + \frac{ac}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{bd}{ac}\right)^2}|0000\rangle_{2356}|1\rangle_A \quad (3.15)$$

接着 Alice 对辅助粒子进行测量, 若测量结果为 $|1\rangle_A$, 则粒子 2、3、5 和 6 之间完全消纠缠; 若测量结果为 $|0\rangle_A$, 则粒子 2、3、5 和 6 塌缩为

$$|\psi\rangle_{2356} = \frac{bd}{\sqrt{2}}(|0000\rangle_{2356} \pm |1111\rangle_{2356}) \quad (3.16)$$

此时, Alice 需要对上式中粒子 2 的基实施 Hadamard 变换。Hadamard 变换定义为

$$H\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

(3.16) 式在 Hadamard 变换下变为

$$H|\psi\rangle_{2356} = \frac{bd}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{356} \pm |111\rangle_{356})|0\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{356} \mp |111\rangle_{356})|1\rangle_2\right\} \quad (3.18)$$

不论对粒子 2 测量的结果为何, 粒子 3、5 和 6 之间都建立了新的纠缠, 并以概率 $2|bd|^2$ 塌缩为最大纠缠态。

对于 (3.14) 式的结果, 为了实现纠缠态的纯化, Alice 在引入一个初始态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A 后, 应对粒子 3、A 的基 $\{|00\rangle_{3A}, |10\rangle_{3A}, |01\rangle_{3A}, |11\rangle_{3A}\}$ 实施的么正变换为 $U_4=U_2$ (如 (3.9) 式), 将 U_4 作用于 (3.14) 式得到

$$\frac{bc}{\sqrt{2}}(|0011\rangle_{2356} \pm |1100\rangle_{2356})|0\rangle_A + \frac{ad}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{bc}{ad}\right)^2}|0011\rangle_{2356}|1\rangle_A \quad (3.19)$$

接着 Alice 对辅助粒子 A 进行测量, 若测量结果为 $|1\rangle_A$, 则粒子 2、3、5 和 6 之间完全消纠缠; 若测量结果为 $|0\rangle_A$, 则粒子 2、3、5 和 6 塌缩为

$$|\psi\rangle_{2356} = \frac{bc}{\sqrt{2}}(|0011\rangle_{2356} \pm |1100\rangle_{2356}) \quad (3.20)$$

此时, Alice 也需要对上式中粒子 2 的基实施 Hadamard 变换, 可得到

$$H|\psi\rangle_{2356} = \frac{bc}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle_{356} \pm |100\rangle_{356}) |0\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (|011\rangle_{356} \mp |100\rangle_{356}) |1\rangle_2 \right\} \quad (3.21)$$

显然, 粒子 3、5 和 6 之间建立了新的纠缠, 并以概率 $2|bc|^2$ 塌缩为最大纠缠态。

因此从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率为 $2|b|^2$, 此时对于粒子 3、5 和 6 而言, 它们之间的纠缠增加了, 即实现了纠缠态的纯化, 但是对于整个系统而言, 总的纠缠度保持不变[48]。

§ 3.3 多粒子纠缠态的纯化

在实际的应用中, 仅仅两粒子和三粒子纠缠态的纯化显然是远远不够的, 因此研究多粒子纠缠态的纯化是很有必要的。根据多粒子纠缠态的特点, 可将多粒子纠缠态的纯化分为两类。

§ 3.3.1 $2n$ 个粒子纠缠态的纯化

假设有两个 $2n$ 个粒子的部分纠缠态如下

$$|\psi\rangle_{123\dots(2n)} = a|00\dots 0\rangle_{123\dots(2n)} + b|11\dots 1\rangle_{123\dots(2n)} \quad (3.22)$$

$$|\psi\rangle_{1'2'3'\dots(2n')} = c|00\dots 0\rangle_{1'2'3'\dots(2n')} + d|11\dots 1\rangle_{1'2'3'\dots(2n')} \quad (3.23)$$

设粒子 1、2、3... $2n$ 和粒子 1'、2'... n' 属于 Alice, 粒子 $n'+1$ 、 $n'+2$... $2n'$ 属于 Bob。首先 Alice 对粒子对 (1, 1'), (2, 2'), ..., (n, n') 实施 Bell 态测量, 剩下的粒子将塌缩到下列的态上

$$\begin{aligned} & {}_{nn'} \langle \phi^{\alpha_n} |_{(n-1)(n'-1)} \langle \phi^{\alpha_{n-1}} | \dots \langle \phi^{\alpha_1} | \psi \rangle_{123\dots(2n)} \otimes |\psi\rangle_{1'2'3'\dots(2n')} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} (ac|0\dots 00\dots 0\rangle_{(n+1)\dots(2n)(n'+1)\dots(2n')} + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 bd|1\dots 11\dots 1\rangle_{(n+1)\dots(2n)(n'+1)\dots(2n')}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & {}_{nn'} \langle \phi^{\alpha_n} |_{(n-1)(n'-1)} \langle \phi^{\alpha_{n-1}} | \dots \langle \phi^{\alpha_1} | \psi \rangle_{123\dots(2n)} \otimes |\psi\rangle_{1'2'3'\dots(2n')} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} (ad|0\dots 01\dots 1\rangle_{(n+1)\dots(2n)(n'+1)\dots(2n')} + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 bc|1\dots 10\dots 0\rangle_{(n+1)\dots(2n)(n'+1)\dots(2n')}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 α_i ($i=1, 2, 3 \dots n$) 可以取 “+” 或 “-”, $|\phi^{\pm}\rangle$ 和 $|\varphi^{\pm}\rangle$ 为四个 Bell 态 (如 (3.5) 和 (3.6) 式)。

接着, 在引入一个初始态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A 后, Alice 对 (3.24) 式实施么正变换 U_1 , 并对辅助粒子 A 进行测量, 就可以以概率 $2|bd|^2$ 提取最大纠缠态; 对 (3.25) 式实施么正变换 U_2 , 并对辅助粒子 A 进行测量, 就可以以概率 $2|bc|^2$ 提取最大纠缠态; 因此从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率为 $2|b|^2$, 即实现了纠缠态的纯化, 但是对于整个系统而言, 总的纠缠度保持不变。

§ 3.3.2 $2n+1$ 个粒子纠缠态的纯化

假设有两个 $2n+1$ 个粒子的部分纠缠态如下

$$|\psi\rangle_{123 \dots (2n+1)} = a|00 \dots 0\rangle_{123 \dots (2n+1)} + b|11 \dots 1\rangle_{123 \dots (2n+1)} \quad (3.26)$$

$$|\psi\rangle_{1'2'3' \dots (2n'+1)} = c|00 \dots 0\rangle_{1'2'3' \dots (2n'+1)} + d|11 \dots 1\rangle_{1'2'3' \dots (2n'+1)} \quad (3.27)$$

其中 α_i ($i=1, 2, 3 \dots n$) 可以取 “+” 或 “-”, $|\phi^{\pm}\rangle$ 和 $|\varphi^{\pm}\rangle$ 为四个 Bell 态 (如 (3.5) 和 (3.6) 式)。

设粒子 $1, 2, 3 \dots 2n+1$ 和粒子 $1', 2', \dots, n'$ 属于 Alice, 粒子 $n'+1, n'+2 \dots 2n'+1$ 属于 Bob。首先 Alice 对粒子对 $(1, 1'), (2, 2'), \dots, (n, n')$ 实施 Bell 态测量, 剩下的粒子将塌缩到下列的态上

$$\begin{aligned} & {}_m \langle \phi^{\alpha_n} |_{(n-1)(n'-1)} \langle \phi^{\alpha_{n-1}} | \dots \langle \phi^{\alpha_1} | \psi \rangle_{123 \dots (2n+1)} \otimes |\psi\rangle_{1'2'3' \dots (2n'+1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} (ac|0 \dots 00 \dots 0\rangle_{(n+1) \dots (2n+1)(n'+1) \dots (2n'+1)} + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 bd|1 \dots 11 \dots 1\rangle_{(n+1) \dots (2n+1)(n'+1) \dots (2n'+1)}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & {}_m \langle \varphi^{\alpha_n} |_{(n-1)(n'-1)} \langle \varphi^{\alpha_{n-1}} | \dots \langle \varphi^{\alpha_1} | \psi \rangle_{123 \dots (2n+1)} \otimes |\psi\rangle_{1'2'3' \dots (2n'+1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} (ad|0 \dots 01 \dots 1\rangle_{(n+1) \dots (2n+1)(n'+1) \dots (2n'+1)} + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 bc|1 \dots 10 \dots 0\rangle_{(n+1) \dots (2n+1)(n'+1) \dots (2n'+1)}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

接着, 在引入一个初始态为 $|0\rangle_A$ 的辅助粒子 A 后, Alice 对 (3.28) 式实施么正变换 U_1 , 对 (3.29) 式实施么正变换 U_2 , 并对辅助粒子 A 进行测量, 最后

再对(3.28)和(3.29)式的第 $n+1$ 个粒子实施 Hadamard 变换, 就可以总概率 $2|b|^2$ 提取最大纠缠态, 即实现了纠缠态的纯化, 但是对于整个系统而言, 总的纠缠度保持不变。

第四章 两个量子系统的纠缠随时间的演化

人们注意到违背 Bell 不等式虽然是量子纠缠的一个显著特征, 但并非所有的纠缠态都违背 Bell 不等式[59], 因此为了从经典关联中分离出量子关联, 就需要一种新的标准, 这就启发了最初纠缠态度量问题的研究, 并取得了一系列的研究成果[60-67]。石等人[63,64]研究了量子纯态和量子混合态在时间反演下的行为以及与其相应的密度矩阵在 Hilbert-Schmidt 空间中的表示, 由此给出了纠缠度较为直观的几何解释。杨等人[67]研究了双光子 J-C 模型中的原子与腔纠缠的时间演化和热纠缠现象。本节内容就是在上述文献的基础上, 利用度量纯态纠缠的两种常用方法探讨了 J-C 模型中原子-腔场的纠缠随时间的演化。尽管本节内容没有实质性的创新之处, 但我们作出了原子-腔场的纠缠随时间演化的图象, 还对原子-腔场纠缠演化的周期性作了定性分析, 由于本人的一点偏爱, 被保留下来并单独成一章。

§ 4.1 纯态纠缠量的两个常用量度

我们探讨自旋为 1/2 的任意两粒子 A 和 B 构成的一般纠缠态的纠缠随时间的演化情况。我们在 § 1.5 节中已经谈到过若粒子 A 和 B 的态是分离的, 则系统的态可表示为 A 和 B 态的张量积, 其纠缠度为 0; 若粒子 A 和 B 的态是纠缠的, 则系统的态一般可表示为

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (4.1)$$

其中 a、b、c、d 是任意复数, 满足 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ 。

下面我们分别利用纯态纠缠的两种常用量度来讨论态 $|\psi\rangle$ 的纠缠度。

1. von Neumann 熵

粒子 A 和 B 系统的密度矩阵为

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (4.2)$$

将 (4.1) 代入上式可得

$$\rho = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} (a^* b^* c^* d^*) = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* & ac^* & ad^* \\ ba^* & bb^* & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & cc^* & cd^* \\ da^* & db^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

对子系统 B 求迹, 我们就可以得到子系统 A 的约化密度矩阵

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

粒子 A 和 B 系统的纠缠度可以利用 von Neumann 熵 S 来表示

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (4.5)$$

其中 λ_i 为约化密度矩阵 ρ_A 的本征值。经计算, 约化密度矩阵 ρ_A 的本征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \quad (4.6)$$

其中 $\varepsilon = 4|ad - bc|^2 \leq 1$ 。所以系统的纠缠度为

$$S(\rho) = -\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \quad (4.7)$$

2. 共生纠缠 (concurrence)

共生纠缠定义为[51]

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\} \quad (4.8)$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$ 是算符 R 本征值的平方根。算符 R 定义为

$$R = \rho \bar{\rho} \\ \bar{\rho} = (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \rho^* (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \quad (4.9)$$

其中 $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 为泡利算符, ρ^* 为 ρ 的复共轭矩阵。

§ 4.2 单光子 J—C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化

二能级原子与单模腔场的共振相互作用可用 Jaynes-Cummings 模型来描述。此时系统的哈密顿量为

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^\dagger a + g(a^\dagger S_- + a S_+) \quad (4.10)$$

其中 g 是原子和腔场的耦合常数, S_z 、 S_- 和 S_+ 分别为原子的反转、下降和上升算符, ω_0 为原子在激发态和基态之间的跃迁频率, ω 为腔模频率, a^\dagger 和 a 分别是腔模的产生算符和湮没算符。前两项是原子与腔的自由作用项, 第三项是它们的相互作用项。

(4.10) 式的哈密顿量满足薛定谔方程

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (4.11)$$

上式的形式解为

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi(0)\rangle \quad (4.12)$$

若光场初态为 $|0\rangle$, 原子的初态为激发态 $|e\rangle$, 上式的解为

$$|\psi(t)\rangle = \cos(gt)|e, 0\rangle - i \sin(gt)|g, 1\rangle \quad (4.13)$$

现在我们先利用 von Neumann 熵讨论原子-腔场的纠缠随时间的演化。将 (4.13) 式与 (4.4) 至 (4.7) 式作对照, 很容易得出系统的纠缠度为

$$S(|\psi(t)\rangle) = -\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2} - \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \quad (4.14)$$

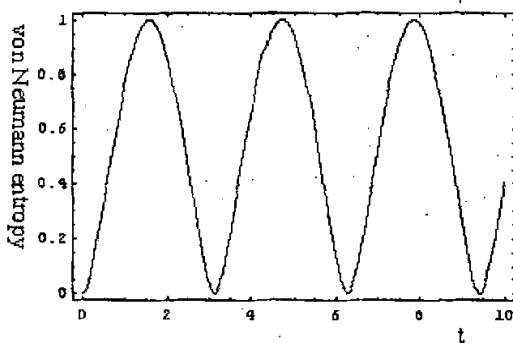
其中 $\varepsilon = 4|\sin(gt)\cos(gt)|^2 \leq 1$ 。(4.14) 式数据模拟如图 4.1 所示。

我们再用共生纠缠讨论 (4.13) 式中原子-腔场的纠缠随时间演化的情况。由 (4.8)、(4.9) 和 (4.13) 式, 经计算可得系统的共生纠缠为

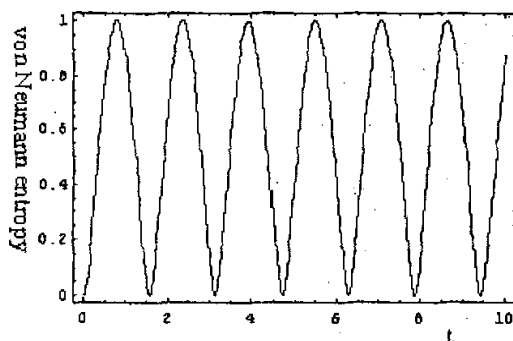
$$C(t) = |\sin(2gt)| \quad (4.15)$$

对 (4.15) 式进行数据模拟, 模拟的图形和用 (4.14) 式模拟的图形基本相同。

可见, 利用纠缠度的这两种不同定义对同一系统纠缠的描述是吻合的。



(a) $g=0.5$



(b) $g=1$

图 4.1 单光子原子-腔场的纠缠随时间的演化

从图 4.1 可以看出，原子-腔场之间的纠缠演化展现出周期性。在时刻

$t = \frac{n\pi}{2g}$ ($n=0,1,2,\dots$) 时， $C(t)=0$ ，表明原子-腔场是消纠缠的；在时刻

$t = \frac{(2n-1)\pi}{4g}$ ($n=0,1,2,\dots$) 时， $C(t)=1$ ，表明原子-腔场处于最大纠缠态；在其他

的时间 $0 < C(t) < 1$ ，说明原子-腔场处于部分纠缠态。而且纠缠演化的周期随着原子-腔场之间的耦合常数的增大而缩短。这对于利用 QED 方法制备、控制和操纵原子的纠缠态有一定的参考价值。

§ 4.3 双光子 J—C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化

二能级原子与单模腔场双光子共振相互作用可用双光子 Jaynes-Cummings

模型来描述。在相互作用绘景中和旋波近似下，系统的有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = g(a^{\dagger}S_{-} + a^2S_{+}) \quad (4.16)$$

此哈密顿量也满足 (4.11) 和 (4.12) 式。由 (4.11) 和 (4.12) 式，可得系统的态为

$$|\psi(t)\rangle = C_{e,n}(t)|e,n\rangle + C_{g,n+2}(t)|g,n+2\rangle \quad (4.17)$$

其中

$$C_{e,n}(t) = \cos\sqrt{(n+1)(n+2)}gtC_{e,n}(0) - i\sin\sqrt{(n+1)(n+2)}gtC_{g,n+2}(0) \quad (4.18)$$

$$C_{g,n+2}(t) = \cos\sqrt{(n+1)(n+2)}gtC_{g,n+2}(0) - i\sin\sqrt{(n+1)(n+2)}gtC_{e,n}(0) \quad (4.19)$$

$$\text{而 } C_{e,n}(0) = C_e C_n(0) \quad (4.20)$$

$$C_{g,n+2}(0) = C_g C_{n+2}(0) \quad (4.21)$$

C_e 和 C_g 由原子的初态决定， $C_n(0)$ 和 $C_{n+2}(0)$ 由腔场的初态决定。例如，将初态为 $|e\rangle$ 的原子注入初态为 $|0\rangle$ 的腔场中，则有

$$C_e = 1, C_g = 0, C_n(0) = 1$$

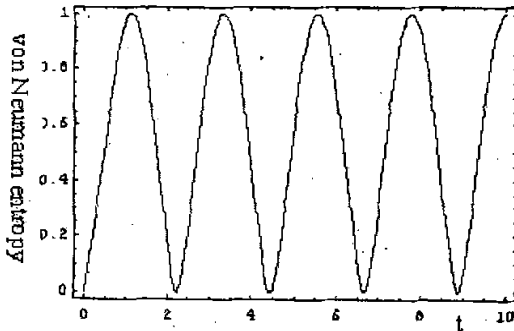
代入 (4.15)、(4.16)、(4.13) 和 (4.14) 式，则系统的态为

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\sqrt{2}gt)|e,0\rangle - i\sin(\sqrt{2}gt)|g,2\rangle \quad (4.22)$$

现在我们先利用 von Neumann 熵讨论原子-腔场的纠缠随时间的演化。将 (4.22) 式与 (4.4) 至 (4.7) 式作对照，很容易得出系统的纠缠度为

$$S(|\psi(t)\rangle) = -\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2} - \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \log_2 \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \quad (4.23)$$

其中 $\varepsilon = 4|\sin(\sqrt{2}gt)\cos(\sqrt{2}gt)|^2 \leq 1$ 。(4.23) 式数据模拟如图 4.2 所示。



(a) $g=0.5$

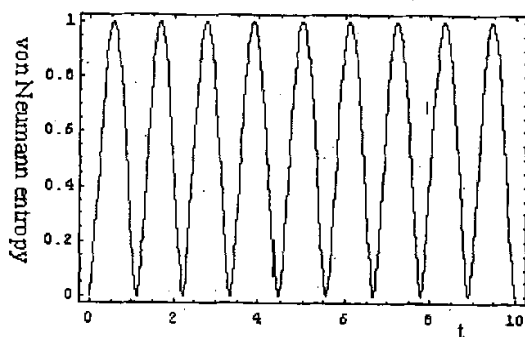
(b) $g=1$

图 4.2 双光子原子-腔场的纠缠随时间的演化

我们再用共生纠缠来讨论 (4.22) 式中原子-腔场的纠缠随时间的演化情况。

由 (4.8)、(4.9) 和 (4.22) 式, 经计算可得系统的共生纠缠为

$$C(t) = |\sin(2\sqrt{2}gt)| \quad (4.24)$$

对 (4.24) 式进行数据模拟, 模拟的图形和用 (4.23) 式模拟的图形基本相同。

从图 4.2 可以看出, 原子-腔场之间的纠缠演化也展现出周期性。这与单光子 J-C 模型中原子-腔场的纠缠随时间演化的规律相似。

第五章 结束语

本论文是作者在硕士研究生期间研究工作的总结。量子信息学是一个迅速发展的学科，也是一个很有实用价值的学科，本文所述的工作主要涉及量子信息学领域的三个方面：量子隐形传态、纠缠态的纯化以及纠缠随时间的演化。

量子隐形传态应用了量子特性来实现信息的传送和处理，其信息容量大，可靠性高，这种方法能完成纯经典方法或纯量子方法所无法做到的量子态的传送。在第二章我们提出了几种尚未见于文献报道的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案，并给出了在量子几率隐形传态方案中的传输成功几率。在第一节，首先提出了通过三对非最大纠缠态粒子来实现三粒子纠缠态的量子几率隐形传态方案；在第二节，探讨了通过四个纠缠态粒子来实现未知的三个纠缠态粒子的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案；在第三节，讨论了通过纠缠交换来实现两个三态纠缠态粒子的量子隐形传态方案和量子几率隐形传态方案；在第四节，研究了利用大失谐 J-C 模型实现薛定谔猫态的隐形传态方案。虽然我们提出的都是有限个粒子态的传态方案，但是我们的方案可以推广到多粒子态的隐形传态情形。

在第三章我们研究了纠缠态的纯化。首先研究了两粒子纠缠态的纯化和三粒子纠缠态的纯化，并给出了从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率；接着将上述方法运用到多粒子纠缠态的纯化上，同时也给出从原来的部分纠缠态获得最大纠缠态的总概率。

在第四章我们分别利用纠缠度的两种不同定义研究了两个量子系统的纠缠随时间的演化情况。第一节讨论了单光子 J-C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化情况；第二节则探讨了双光子 J-C 模型中原子与腔场之间的纠缠随时间的演化，并得出此两系统的纠缠随时间演化的规律。

然而，量子信息领域还有许多问题亟待解决。例如在量子信息领域占有特殊地位的量子纠缠的很多特性、Bell 态的测量、纠缠的度量等很多问题都尚未研究清楚。但是，这无损于量子信息学的发展势头，反而吸引了更多的专家和学者的加入。我们有理由相信量子信息学的明天会更加灿烂，人类从经典信息时代进入量子信息时代已不再是梦想。

参考文献

- [1] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A and Wootters W K. Teleporting and Unknown Quantum state via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels[J]. Phys Rev Lett, 1993, 70: 1895-1899.
- [2] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, *et al.* Experimental Quantum Teleportation[J]. Nature, 1997, 390: 575-579.
- [3] Furusawa A, Sørensen J L, Braunstein S L, *et al.* Unconditional Quantum Teleportation[J]. Science, 1998, 282: 706-709.
- [4] Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack[J]. Phys Rev Lett, 1997, 79:325-328.
- [5] Ekert A K. Quantum cryptography based Bell's theorem[J]. Phys Rev A, 1991, 67: 661-663.
- [6] Bennett C H. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states[J]. Phys Rev Lett, 1992, 68:3121-3124.
- [7] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states [J]. Phys Rev Lett, 1992, 69:2881-2884.
- [8] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys Rev, 1935, 47:777-780.
- [9] E.Schrodinger. Naturwiss, 23 (1935) 307.
- [10] Horodecki M, Horodecki P and Horodecki R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions[J]. Phys Lett A, 1996, 223:1-8.
- [11] Horodecki P. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition[J]. Phys Lett A, 1997, 232:333-339.
- [12] Derkacz L and Jakobczyk L. Bell inequalities versus entanglement and mixed for a class of two-qubit states[J]. Phys Lett A, 2004, 328:26-35.
- [13] White A G, James D F V, Eberhard P H and Kwiat P G. Nonmaximally entangled States: Production, Characterization, and Utilization[J]. Phys Rev Lett, 1999, 83: 3103-3107.
- [14] Du W, Vidal G and Cirac J I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways [J]. Phys Rev A, 2000, 62:62314.

- [15] Zen B, Liu X S, Li Y S, Long G L. High-Dimension Multi-particle Cat-state Teleportation[J]. Commun Theor Phys, 2002, 38:537-540.
- [16] Enk S J and Hirota O. Entangled coherent states: Teleportation and decoherence[J]. Phys Rev A, 2001, 64:022313.
- [17] Fang J X, Ling Y S, Zhu S Q and Chen X F. Teleportation of a three-particle State via Entanglement Swapping[J]. Commun Theor Phys, 2003, 39:529-530.
- [18] Yan F L and Bai Y K. Probabilistic Teleportation of One-particle State of S-level[J]. Commun Theor Phys, 2003, 40:273-278.
- [19] Feng L Y and Dong W. Probabilistic and controlled teleportation of unknown quantum states[J]. Phys Lett A, 2003, 316:297-303.
- [20] Lou S L and Zhang Z M. Entanglement and interference[J]. Phys Lett A, 2003, 315:189-193.
- [21] Li S B and Xu J B. Quantum probabilistic teleportation via entangled coherent states[J]. Phys Lett A, 2003, 309:321-328.
- [22] Guzman R, Retamal J C, Romero J L and Saavedra C. Entanglement rate in Qubits[J]. Phys Lett A, 2004, 323:382-388.
- [23] Cao X L, Yang M and Guo G C. The scheme for realizing probabilistic teleportation of atomic states and purifying the quantum channel on cavity QED[J]. Phys Lett A, 2003, 308:349-354.
- [24] Shi B S, Jiang Y K and Guo G C. Probabilistic teleportation of two-particle entangled state[J]. Phys Lett A, 2000, 268:161-164.
- [25] Bennett C H, Divincenzo D P, Smolin J A and Wotters W K. Mixed-state entanglement and quantum error correction[J]. Phys Rev A, 1996, 54:3824-3851.
- [26] Zheng S B and Guo G C. Teleportation of superpositions of macroscopic states of a cavity field[J]. Phys Lett A, 1997, 236:180-182.
- [27] Li C H. Four-photon, Five-dimensional entanglement for quantum communication[J]. Phys Lett A, 2003, 313:389-392.
- [28] Dai H Y, Zhang M and Li C H. Probabilistic teleportation of an unknown entangled state of two three-level particles using a partially entangled state of three three-level particles[J]. Phys Lett A, 2004, 323:360-364.

- [29] Song T Q. Teleportation of quantum states with continuous variables[J]. Phys Lett A, 2003, 316:363-368.
- [30] Zhou J D, Hou G, Zhang Y D. Teleportation scheme of S-level quantum pure states by two-level Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Phys Rev A, 2001, 64: 012301.
- [31] Hong L and Guo G C. Teleportation of a Two-Particle Entangled state Via Entanglement Swapping[J]. Phys Lett A, 2000, 276:209-212.
- [32] Yeo Y. Teleportation via thermally entangled state of a two-qubit Heisenberg chain[J]. Phys A, 2003, 309:215-217.
- [33] Nielsen M A, Knill E and Laflamme R. Nature, 1998, 396:52-55.
- [34] Boschi D, Branca S and Martini F D, *et al.* Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80:1121-1124.
- [35] Zheng S B and Guo G C. Teleportation of an unknown atomic state through the Raman atom-cavity-field interaction[J]. Phys Lett A, 1997, 232: 171-174.
- [36] 杨涛, 潘建伟. 中国科学院院刊, 2004, 19:355-358.
- [37] Cirac J L and Parkins A S. Schemes for atomic state teleportation [J]. Phys Rev A, 1994, 50: R4441-R4444.
- [38] 叶柳, 郭光灿. 利用原子与光场的非最大纠缠态传送薛定谔猫态[J]. 光学学报, 2002, 22:407-409.
- [39] Zheng S B. Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement[J]. Phys Rev A, 2004, 69:064302.
- [40] Yang M, Song W and Cao Z L. Entanglement swapping without measurement[J]. Phys Rev A, 2005, 71:034312.
- [41] Gerry C C. Generation of four-photon coherent states in dispersive cavity QED[J]. Phys Rev A, 1996, 53:3818-3821.
- [42] Gerry C C. Preparation of multi-atom entangled states through dispersive atom-cavity-field interactions[J]. Phys Rev A, 1996, 53:2857-2860.
- [43] Yang M, Song W and Cao Z L. Entanglement swapping without measurement[J]. Phys Rev A, 2005, 71:034312.
- [44] Rauschenbeutel A, Bertet P, and Osnaghi S *et al.* Controlled entanglement of two

- field modes in a Cavity Quantum Electrodynamics experiment[J]. Phys Rev A, 2001, 64:050301.
- [45] Bennett C H, Brassard G, Popescu S, *et al.* Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels[J]. Phys Rev Lett, 1996, 76:722-725.
- [46] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Inseparable two spin-1/2 density matrices can be distilled to a singlet form[J]. Phys Rev Lett, 1997, 78:574-577.
- [47] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Mixed-state entanglement and distillation: Is there a "bound" entanglement in nature?[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80:5239-5240.
- [48] Bose S, Vedral V, Knight P L. Purification via entanglement swapping and conserved entanglement[J]. Phys Rev Lett, 1999, 60:194-197.
- [49] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, *et al.* Concentrating partial entanglement by local operations[J]. Phys Rev A, 1996, 53:2046-2052.
- [50] Thew R T and Munro W J. Entanglement manipulation and concentration[J]. Phys Rev A, 2001, 63:030302.
- [51] Wotters W K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits Phys Rev Lett, 1998, 80:2245 -2248.
- [52] Feng X L, Gong S Q and Xu Z Z. Entanglement purification via controlled-Not operations[J]. Phys Lett A, 2000, 271:44-47.
- [53] Yang M and Cao Z L. Entanglement distillation for W states[J]. Phys A, 2004, 337:141-148.
- [54] Bose S, Vedral V, Knight P L. A multi-particle Generalization of entanglement swapping[J]. Phys Rev Lett, 1998, 57:822-830.
- [55] Ling L M, Chen P X, Li C Z and Huang M Q. Purification of multiparticle entangled mixed states under local manipulation[J]. Phys Lett A, 2002, 294:71-73.
- [56] Hsu L Y. Optimal entanglement purification via entanglement swapping with the least classical communication[J]. Phys Lett A, 2002, 297:126-128.
- [57] Chen P X and LI C Z. Distilling multi-partite state from a finite number of copies of multi-partite mixed state[J]. arXiv:quant-ph/0311095.
- [58] 陈平形, 李承祖. 纠缠的纯化和提取[J]. 量子光学学报, 2003, 9:149-157.

- [59] Gisin G, Hidden quantum non-locality revealed by local filters[J]. Phys Lett A, 1996, 210: 151-156.
- [60] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A and Knight P L. Quantifying entanglement[J]. Phys Rev Lett, 1997, 78:2275-2279.
- [61] Bennett C H, Popescu S, Rohflich D, *et al.* Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement[J]. Phys Rev A, 2000, 63:012307.
- [62] 于立志, 龚仁山. 通过四个纠缠态粒子来实现未知的三个纠缠态粒子的量子几率隐形传输[J]. 量子光学学报, 2005, 11(1):29-33.
- [63] 石名俊, 杜江峰, 朱栋培. 量子纯态的纠缠度[J]. 物理学报, 2000, 49:825-829.
- [64] 石名俊, 杜江峰, 朱栋培等. 混合纠缠态的几何描述[J]. 物理学报, 2000, 49:1913-1918.
- [65] 叶柳, 郭涛. 局域测量对多粒子纠缠度的影响[J]. 量子光学学报, 1997, 3:181-184.
- [66] Fei S M, Wang Z X and Zhao H. A note on entanglement of formation and generalized concurrence[J]. Phys Lett A, 2004, 329:414-419.
- [67] 杨雄, 向少华, 宋克慧. 双光子 J-C 模型中的纠缠演化和热纠缠现象[J]. 原子和分子物理学报, 2004, 21:68-72.

致 谢

在本论文完成之际，我要衷心地感谢学习和生活中给予我指导、关心、支持和帮助的各位老师、领导、同学和家人！

由衷的感谢我的导师龚仁山教授。恩师以渊博的学识、深邃的洞察力给予我谆谆教导，恩师严谨认真的治学态度、实事求是的工作作风和旺盛的工作热情让我学到了一整套的科学研究方法和严谨务实的科研态度。恩师在学习上提供给我良好的学习环境和宽松的学习气氛，在生活中也给予我莫大的关心和帮助，这令我的研究生生活充满了美好的回忆。先生之恩，永志不忘。再次向恩师表示最崇高地敬意！

感谢南昌大学物理系的刘正东、何济舟、刘新芽、刘念华、伍歆、付方正等各位教授三年来对我的关心和教诲，他们严谨的治学作风使我终生受益。

感谢师兄周盛华、于天宝、邓新华、尹承平和师姐姜卫群等在学习和生活上给我的关心和帮助。

感谢三年来在一起共同学习和生活的同学钟锋、刘晓亮、罗黎萍、张丽英、陈辉、陈约奇和刘志荣以及众多师弟和师妹，与他们的友谊是我终生的财富。

感谢南昌大学实验中心的方利广、郑军等诸位老师在生活的关心。还要感谢资料室、系办公室的各位老师提供的帮助。

最后要感谢我的爱人张静和我的父母以及我的所有家人，感谢他们对我的理解与支持。

再次衷心感谢以上我提及和因疏忽而没有提及的所有关心和帮助过我的人。

于立志

2006-3-20 南昌大学

在读硕士期间完成的论文

1. 于立志, 龚仁山. 通过四个最大纠缠三态粒子来实现一未知的三个纠缠三态粒子的隐形传输. 南昌大学学报 (理科版), 2005, 29(1): 67-69.
2. 于立志, 龚仁山. 通过三对非最大纠缠态粒子来实现三粒子纠缠态的量子隐形传输. 南昌大学学报 (理科版), 已录用, 将发表于 2006 年第 3 期.
3. 于立志, 龚仁山. 通过四个纠缠态粒子来实现未知的三个纠缠态粒子的量子几率隐形传输. 量子光学学报, 2005, 11(1): 29-33.
4. 于立志, 龚仁山. 通过纠缠交换实现多粒子纠缠态的纯化. 量子光学学报, 2006, 12 (2), 67-70.