

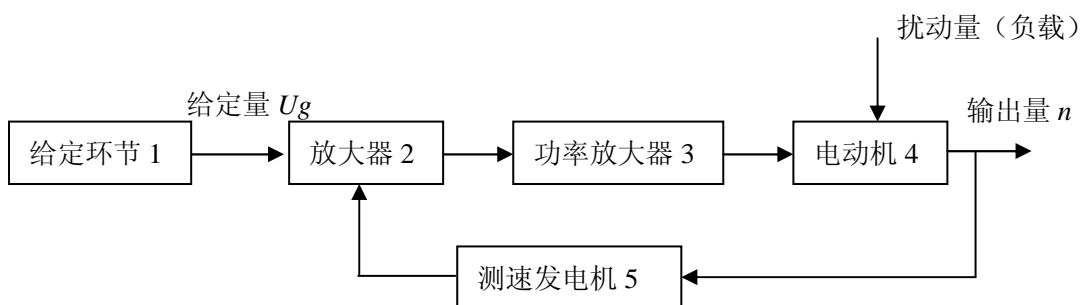
目 录

第 1 章 习题答案.....	- 1 -
第 2 章 习题答案.....	- 3 -
第 3 章 习题答案.....	- 9 -
第 4 章 习题答案.....	- 17 -
第 5 章 习题答案.....	- 36 -
第 6 章 习题答案.....	- 49 -
第 7 章 习题答案.....	- 66 -
第 8 章 习题答案.....	- 75 -

第 1 章 习题答案

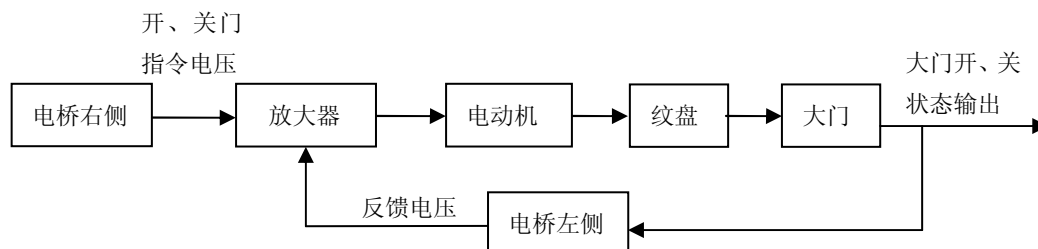
1-4 答：(1) 系统由给定环节（电位器 1）、比较环节（放大器 2）、放大环节（放大器 2 和晶闸管功率放大 3）、被控对象（电动机 4）和检测环节（测速发电机 5）组成。可变电位器滑动端确定的电压 U_g 为系统的给定量。放大器 2 和晶闸管功率放大 3 完成比较和放大功能。测速发电机 5 把输出量（电动机的转速）检测出来并转换成电压的形式 u_f 反馈到输入端。

(2) 系统结构图如下：



(3) 可能的扰动量有负载变化、电网电压波动等。

1-5 答：当开门开关闭合时，在放大器输入端得到偏差电压为正，经放大使电动机正转，拖动纹盘逆时针转动，大门上提打开。直到偏差电压为零，电动机停转，大门完全打开。关门时原理类同。系统原理结构图如下图所示。

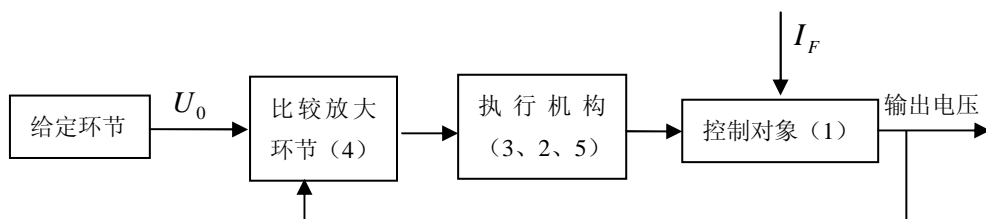


如果大门不能全开或全关，可调整电桥右侧对应开门或关门滑动端的位置。

1-6 答：(1) 系统由给定环节（直流电源 U_0 ）、比较放大环节（放大器 4）、执行机构（电动机 3、变速器 2 和电位器 5）、控制对象（发电机 1）和反馈环节（为直接反馈，即发电机输出电压作为反馈量）组成。系统结构图如下图所示。

(2) 如果负载电流增大使发电机输出电压降低时，它与给定值 U_0 比较出现偏差，此偏差经放大后使电动机转动，经变速器带动可调电位器滑动端移动，增大发电机的励磁电流，使发电机输出电压回升。经过这样的一段调节过程，直至偏差信号为零，电动机停转，使发电机输出电压保持恒定为 U_0 。

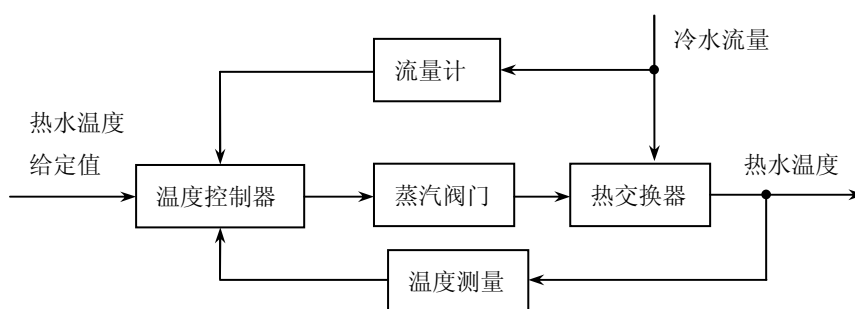
(3) 该系统属于恒值控制系统。



1-7 答：(1) 比如由于扰动（冷水流量的增大或热水用量的增加）将使热水温度下降，偏离给定值，由温度检测装置检测出来，反馈到温度控制器，它将比较后得到的偏差通过某种运算处理使蒸汽阀门开度增大，增加蒸汽量，使热水温度回升，保持热水温度在给定值上。

(2) 控制对象为热交换器，控制器为温度控制器。

(3) 绘制系统原理方框图如下：



(4) 系统属于恒值控制系统。

第 2 章 习题答案

2-1 什么是系统的数学模型？在自动控制系统中常见的数学模型形式有哪些？

答：数学模型是描述系统内部各物理量直接按动态关系的数学表达式。在经典控制理论中常用的数学模型有微分方程、传递函数、信号流图和结构框图。

2-2 简要说明用解析法编写自动控制系统动态微分方程的步骤。

答：1) 确定系统的输入量和输出量；

2) 从系统的输入端开始，沿着信号传递方向，逐次依据组成系统各元部件的有关物理规律，列写元件或环节的微分方程；

3) 消除中间变量，建立只有输入量和输出量及其各阶导数构成的微分方程。

2-3 什么是小偏差线性化？这种方法能够解决哪类问题？

答：线性化这一概念用数学方法来处理，就是将一个非线性函数 $y = f(x)$ ，在其工作点 (x_0, y_0) 展开成泰勒 (Taylor) 级数，然后略去二次以上的高阶项，得到线性化方程，用来代替原来的非线性函数。综合起来就是使用某点的切线代替原非线性曲线称为小偏差线性化。

2-4 什么是传递函数？定义传递函数的前提条件是什么？

答：对于线性定常系统，在初始条件为零时，把系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比称为系统的传递函数。

2-5 列写出传递函数三种常用的表达式。并说明什么是系统的阶数、零点、极点和放大系数。

答：从略

2-6 自动控制系统有哪几种典型环节？它们的传递函数是什么样的？

答：比例环节 $W(s) = K$ 、惯性环节 $W(s) = \frac{K}{Ts+1}$ 、积分环节 $W(s) = \frac{K}{s}$ 、微分环节

$W(s) = Ks$ 、振荡环节 $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ 、时滞环节 $W(s) = e^{-\tau s}$

2-7 什么是系统的动态结构图？它等效变换的原则是什么？系统的动态结构图有哪几种典型连接？将它们用图形的形式表示出来，并列写出典型连接的传递函数。

答：系统动态结构图是将系统中所有的环节用方框图表示，图中标明其传递函数，并且按照在系统中各环节之间的联系，将各方框图连接起来。用这一动态结构图来描述系统，具有明显的优点，可形象而明确地表达动态过程中系统各环节的数学模型及其相互关系，也就是系统图形化的动态模型。

传递函数的典型连接包括单元方框图、串联连接、并联连接、反馈连接。图形表示从略。

2-8 什么是系统的开环传递函数？什么是系统的闭环传递函数？当给定量和扰动量同时作用

于系统时，如何计算系统的输出量？

答：把闭环系统反馈信号的拉氏变换与偏差信号的拉氏变换之比，称为系统的开环传递函数。

在初始条件为零时，系统输出量的拉氏变换和输入量的拉氏变换之比称为系统的闭环传递函数。

此时分开计算传递函数后进行叠加即可。

2-9 试比较微分方程、传递函数、结构图和信号流图的特点与适用范围。列出求系统传递函数的几种方法。

答：略

2-10 建立图 P2-1 所示各系统的微分方程。图中电压 U_i 和外力 $F(t)$ 为输入量，电压 $U_0(t)$ 和位移 $y(t)$ 为输出量。

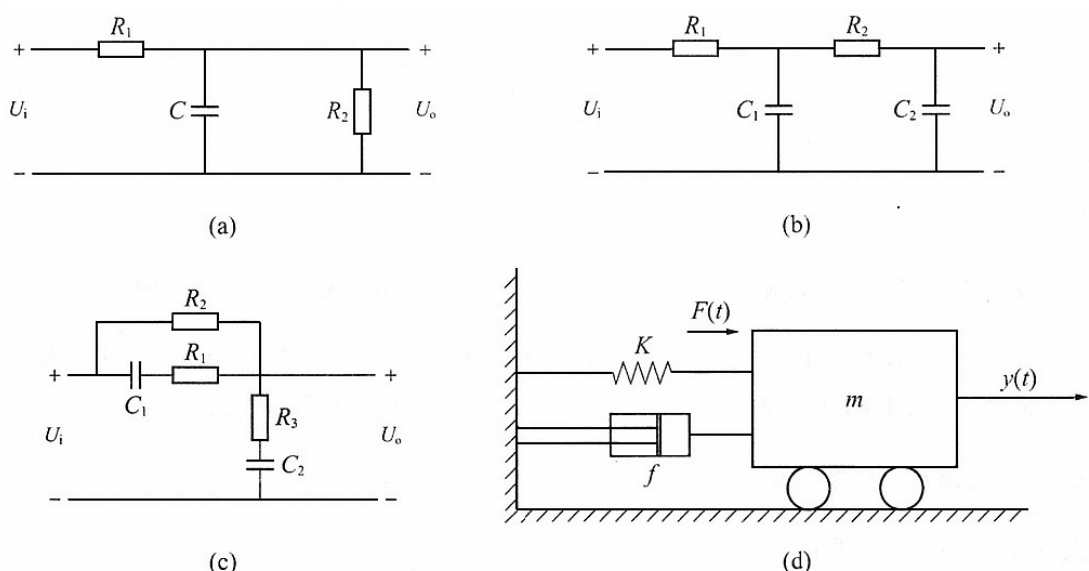


图 P2-1 系统原理图

解：

$$\text{图 (a) : } U_i = R_1 \frac{dU_0}{dt} + U_0$$

$$\text{图 (b) : } U_i = R_2 \frac{d^2U_0}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{dU_0}{dt} + U_0$$

图 (c) :

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{R_1 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_1 C_1 s + R_2 C_1 s + R_3 C_2 s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + R_1 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_2 R_3 C_1 C_2 s^2 + R_1 C_1 s + R_2 C_1 s + R_3 C_2 s + 1}$$

$$\text{图 (d) : } F(t) - Ky(t) - f \frac{dy(t)}{dt} = m \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

2-11 求如图 P2-2 所示运算放大器网络的传递函数。

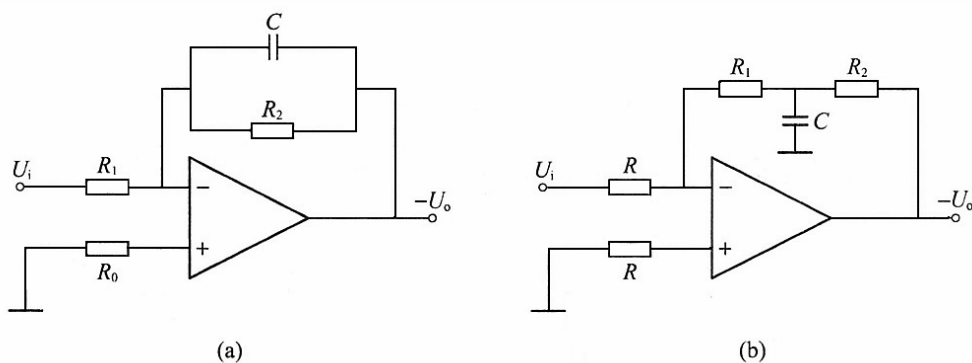


图 P2-2 运算放大器网络

解:

图 (a) 根据运放的“虚地”概念可得:
$$W(s) = \frac{U_c}{U_r} = -\frac{R_1 R_2}{R_2 C s + 1}$$

图 (b) 根据运放的“虚地”概念可得:
$$W(s) = \frac{U_c}{U_r} = -\frac{R_2(R_1 C_2 s + 1) + R_1}{R_2}$$

2-12 求图 P2-3 所示弹簧-阻尼器运动系统的传递函数。分别求图 (a) $\frac{X_0(s)}{X_r(s)}$, 图 (b) 的

$\frac{X_0(s)}{X_r(s)}$, 图 (c) 的 $\frac{X_0(s)}{F(s)}$ 。

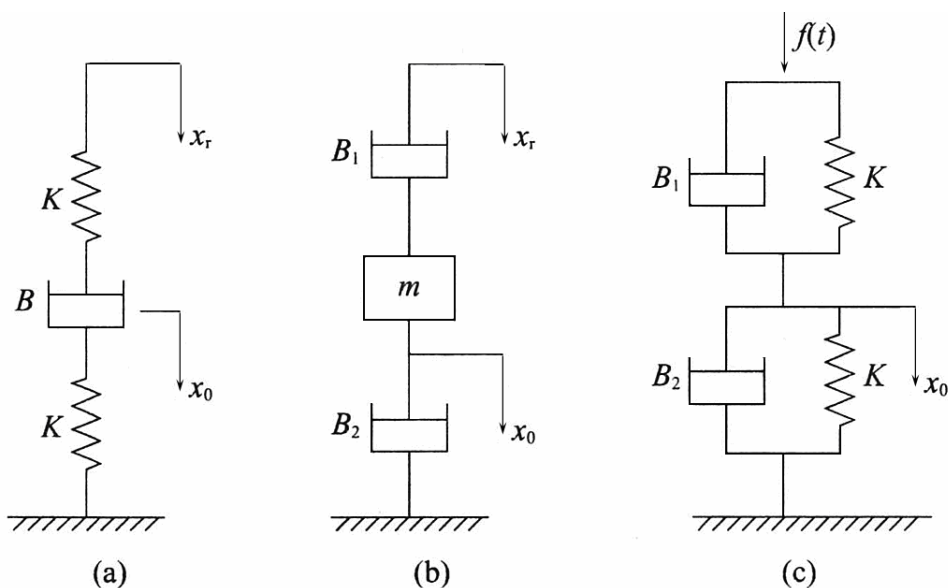


图 P2-3 弹簧-阻尼器运动系统

解:

图 (a), 利用力学定律列写方程组, 化简后可得

$$\frac{X_0(s)}{X_r(s)} = \frac{BK_1 s}{B(K_1 + K_2)s + K_1 K_2}$$

图 (b) 利用力学定律列写方程组，化简后可得

$$\frac{X_0(s)}{X_r(s)} = \frac{B_1 s}{s(ms + B_1 + B_2)}$$

图 (c) 利用力学定律列写方程组，化简后可得

$$\frac{X_0(s)}{X_r(s)} = \frac{1}{B_2 s + K_2}$$

2-13 图 P2-4 所示为以磁场控制的直流电动机。设工作时电枢电流不变，控制电压加在励磁绕组上，输出为电机位移，求传递函数 $W(s) = \frac{\theta(s)}{U_r(s)}$ 。

绕组上，输出为电机位移，求传递函数 $W(s) = \frac{\theta(s)}{U_r(s)}$ 。

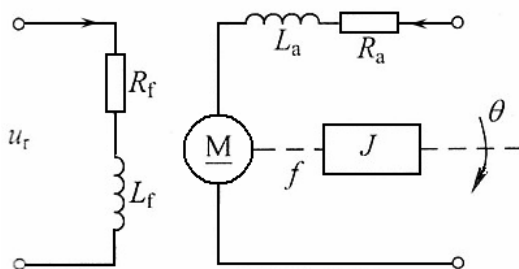


图 P2-4 磁场控制的直流电动机

解：根据电机学和电路理论有：

$$W(s) = \frac{\theta(s)}{U_r(s)} = \frac{K_m}{(J^2 s + fs)(R_f + L_f s)}$$

2-14 图 P2-5 所示为一用作放大器的直流发电机，原电机以恒定转速运行。试确定传递函数

$W(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)}$ ，假设不计发电机的电枢电感和电阻。

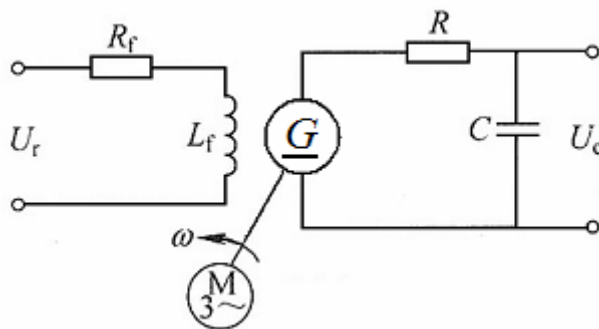


图 P2-5 放大用直流发电机模型

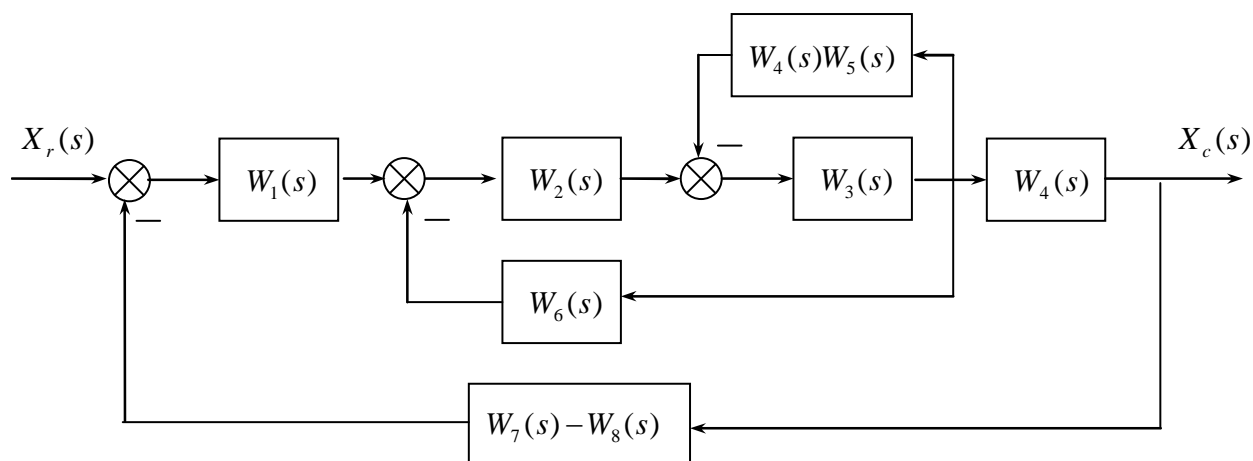
解：本题借助电动机的电路平衡关系及基尔霍夫定律可得

$$W(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{K_f}{(RCs + 1)(R_f + L_f s)}$$

2-15 已知一系统由如下方程组组成，试绘制系统方框图，并求出传递函数。

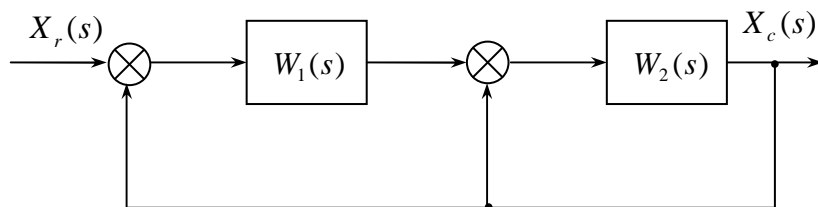
$$\begin{aligned} X_1(s) &= X_r(s)W_1(s) - W_1(s)[W_7(s) - W_8(s)]X_c(s) \\ X_2(s) &= W_2(s)[X_1(s) - W_6(s)X_3(s)] \\ X_3(s) &= [X_2(s) - X_c(s)W_5(s)]W_3(s) \\ X_c(s) &= W_4(s)X_3(s) \end{aligned}$$

方框图如下。

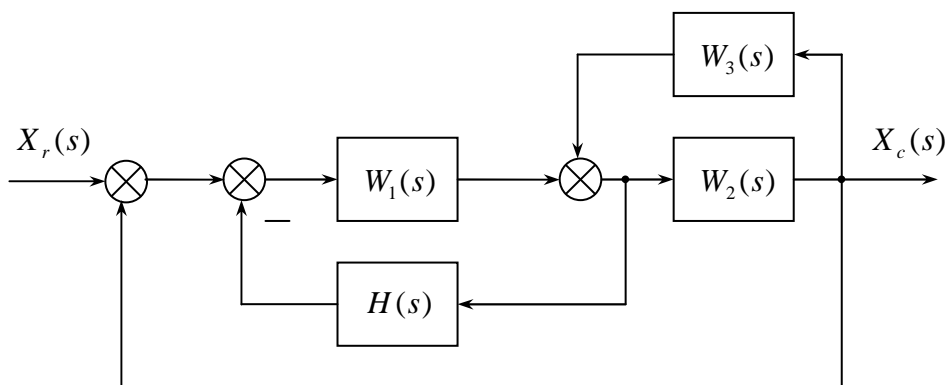


传递函数为：
$$W_B(s) = \frac{W_1W_2W_3W_4}{1 + W_2W_3W_6 + W_3W_4W_5 + W_1W_2W_3W_4(W_7 - W_8)}$$

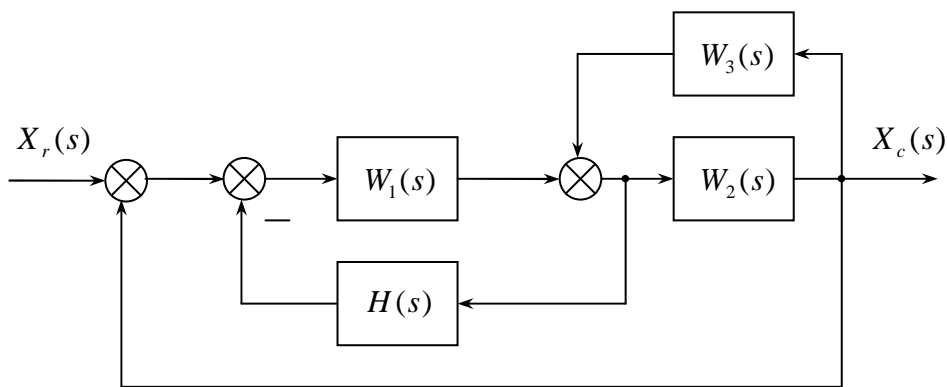
2-16 试分别化简图 P2-6 所示结构图，并求出相应的传递函数。



(a)



(b)



(c)

图 P2-6 系统结构图

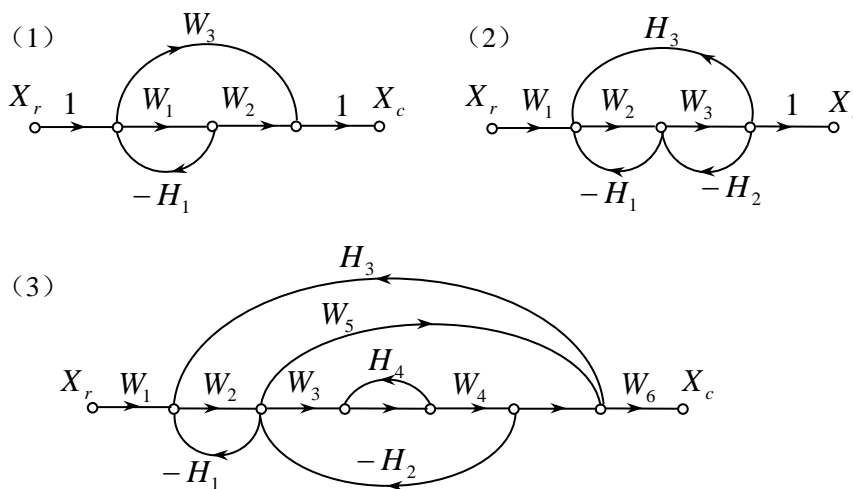
解:

图 (a) 传递函数为: $W_B(s) = \frac{W_1 W_2}{1 - W_2 - W_1 W_2}$

图 (b) $W_B(s) = \frac{W_1 W_2}{1 - W_2 H_3 + W_1 H - W_1 W_2}$

图 (c) 传递函数为: $W_B(s) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 H_1 + W_2 H_2 + W_3 H_3 + W_1 W_3 H_1 H_3}$

2-17 已知系统的信号流图如图 P2-7 所示, 试用梅逊公式求取下述系统的传递函数。



P2-7 系统信号流图

解:

图 (1) $W_B(s) = \frac{1 + W_1 H}{W_1 W_2 + W_3 + W_1 W_3 H}$

图 (2) $W_B(s) = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_2 H_1 + W_3 H_2 + W_2 W_3 H_1 H_2 - W_2 W_3 H_3}$

图 (3) $W_B(s) = \frac{W_1 W_2 W_3 W_4 W_6 + W_1 W_2 W_5 W_6}{1 + W_2 H_1 + W_3 W_4 H_2 - W_2 W_3 W_4 H_3}$

第 3 章 习题答案

3-1 解: 由题意知, 惯性环节在阶跃输入作用下的响应时间 (即调节时间 t_s (2%)) 为 15 秒, 根据惯性环节特性知

$$t_s(2\%) = 4T$$

T , 为惯性环节的时间常数。

将已知数据 $t_s(2\%)=15$ 秒代入上式, 求得惯性环节的时间常数 $T=15$ 秒。

则闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{1}{15s+1}$$

单位反馈系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{W_B(s)}{1-W_B(s)} = \frac{1}{15s}$$

3-2 解: $0.2\dot{x}_c(t) = 2x_r(t)$

微分方程两侧同时取拉氏变换, 得

$$0.2sX_c(s) = 2X_r(s)$$

又输入信号为 $X_r(s) = \frac{1}{s}$, 则输出

$$X_c(s) = \frac{10}{s^2}$$

拉氏反变换后, 得单位阶跃响应为

$$x_c(t) = 10t$$

3-3 解: 由单位阶跃响应的表达式为 $-\zeta\omega_n = -1.2$ $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.6$, 从而可得:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.75$$

$$\text{系统超调量 } \delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\% = 9.4\%$$

$$\text{峰值时间 } t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.96\text{ s}$$

$$\text{调节时间 } t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 2.5\text{ s} \qquad t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 3.33\text{ s}$$

3-5 解: 已知系统闭环特征方程 $s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K_k}{\tau} = 0$, 与二阶系统标准特征方程比较,

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau} \\ \omega_n^2 = \frac{K_k}{\tau} \end{cases} \quad (3-1)$$

由图 P3-1 知, 系统单位阶跃响应的超调量

$$\delta\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = \frac{1.25-1.0}{1.0} \times 100\% = 25\%$$

系统单位阶跃响应的最大峰值对应的峰值时间为

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1.5$$

可得

$$\zeta = 0.404, \quad \omega_n = 2.289 \quad (3-2)$$

将式 (3-2) 代入式 (3-1), 解得

$$\tau = 0.54, \quad K_k = 2.83$$

3-6 解:

(3) 暂态性能比较:

通过上述计算, 系统的微分负反馈控制较比例微分控制超调量小, 振荡平缓。而调节时间变化不明显。

稳态性能比较:

1) $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.1$ 时, 系统开环传递函数

$$W_K(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s(0.5s+1)}$$

则静态误差系数与稳态误差为

$$K_p = \infty, \quad e_p(\infty) = 0;$$

$$K_v = K_k = 5, \quad e_v(\infty) = \frac{1}{K_k} = 0.2;$$

$$K_a = 0, \quad e_a(\infty) = \infty。$$

2) $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$ 时, 系统开环传递函数

$$W_K(s) = \frac{10(1+0.1s)}{s(s+1)}$$

则静态误差系数与稳态误差为

$$K_p = \infty, \quad e_p(\infty) = 0;$$

$$K_v = K_k = 10, \quad e_v(\infty) = \frac{1}{K_k} = 0.1;$$

$$K_a = 0, e_a(\infty) = \infty。$$

微分负反馈控制较比例微分控制稳态性能差。

3-8 (3) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

列劳斯表:

s^5	1	12	32
s^4	3(1)	24(8)	48(16)
s^3	4(1)	16(4)	
s^2	4(1)	16(4)	
s^1	0(ε)		
s^0	4		

劳斯表左端第一列出现 0, 且上下符号无变化, 则系统临界稳定。

(4) $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$

由特征方程的系数出现负数, 则不必列劳斯表就可得出闭环系统不稳定。

若需了解特征根的分布情况, 则仍需列劳斯表

s^6	1	-4	-7	10	
s^5	4	4	-8		
s^4	-5(-1)	-5(-1)	10(2)		s^3 行为全 0 行
s^3	0(-2)	0(-1)			利用 s^4 行构建辅助多项式 $F(s) = -s^4 - s^2 + 2$
s^2	0.5	2			多项式求导 $\frac{dF(s)}{ds} = -4s^3 - 2s$, 将系数写入 s^3 行。
s^1	7				
s^0	2				

劳斯表在 s^3 行出现全 0 行, 可通过解辅助方程 $F(s) = -s^4 - s^2 + 2 = 0$ 得到对称于原点的特征根 $s_{1,2} = \pm 1, s_{3,4} = \pm 2j$ 。另在劳斯表左端第一列出现两个负数, 符号改变两次, 所以在 s 右半平面有两个闭环特征根。

(5) $s^6 + 3s^5 + 9s^4 + 18s^3 + 22s^2 + 12s + 12 = 0$

列劳斯表:

s^6	1	9	22	12	
s^5	3	18	12		
s^4	3	18	12		s^3 行为全 0 行, 利用 s^4 行构建辅助多项式
s^3	0(1)	0(3)			$F(s) = 3s^4 + 18s^2 + 12$
s^2	9	12			多项式求导 $\frac{dF(s)}{ds} = 12s^3 + 36s$,
s^1	$\frac{5}{3}$				将系数 1, 3 写入 s^3 行。继续计算。
s^0	12				

劳斯表中出现 s^3 行为全 0 行, 且无符号变化, 则闭环系统临界稳定, 有 2 对对称于原

点的特征根。可通过辅助方程得到。

$$\text{令 } F(s) = 3s^4 + 18s^2 + 12 = 0 \quad \text{解得} \quad s_{1,2} = \pm j0.87, \quad s_{3,4} = \pm j2.29$$

3-9 解：特征方程为

$$s^3 + (1 + 10\tau)s^2 + 10s + 10 = 0$$

列劳斯表：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 1 + 10\tau & 10 \\ s^1 & 10 - \frac{10}{1 + 10\tau} & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

若闭环系统稳定，则劳斯表左端第一列元素全部大于 0，即

$$\begin{cases} 1 + 10\tau > 0 \\ 10 - \frac{10}{1 + 10\tau} > 0 \end{cases} \quad \text{得 } \tau > 0$$

3-10 解：由题意知，闭环系统必具有共轭虚根 $\pm 2j$ 。

由劳斯判据知，当劳斯表中出现全 0 行，闭环系统存在对称于原点的特征根，可能临界稳定。

确定上述系统的闭环特征方程

$$s^3 + as^2 + (2 + K)s + 1 + K = 0$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 + K \\ s^2 & a & 1 + K \\ s^1 & 2 + K - \frac{1 + K}{a} & \\ s^0 & 1 + K & \end{array}$$

由劳斯表可知，当 s^1 行为全零行时，虚根若满足由 s^2 行构造的辅助方程，则恰好满足题意要求。

令

$$2 + K - \frac{1 + K}{a} = 0 \tag{3-3}$$

利用 s^2 行构造辅助方程

$$F(s) = as^2 + 1 + K = 0$$

得

$$s = \pm j\sqrt{\frac{1 + K}{a}} = \pm j2 \tag{3-4}$$

式 (3-3) 和式 (3-4) 联立，可得

$$K = 2$$

$$a = 0.75$$

3-11 解：(1) 系统闭环传递函数

$$W_B(s) = \frac{K_c(T_c s + 1)}{s^2 - \tau s + K_c T_c s + K_c}$$

闭环特征方程

$$s^2 - \tau s + K_c T_c s + K_c = 0$$

题示为二阶系统，若

$$K_c T_c - \tau > 0$$

则闭环系统稳定。

闭环系统稳定时，PD 控制器参数满足条件为 $K_c T_c > \tau$ 。

(2) 当 $\tau = 0.8$ 时，闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{K_c(T_c s + 1)}{s^2 + (K_c T_c - 0.8)s + K_c}$$

与二阶系统标准传递函数比较，得

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= K_c \\ K_c T_c - 0.8 &= 2\zeta\omega_n \end{aligned} \quad (3-5)$$

由题意，单位阶跃响应的性能指标

$$\begin{aligned} \delta\% &= 16.3\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% & \zeta &= 0.5 \\ t_s &= 0.8s = \frac{3}{\zeta\omega_n} & \omega_n &= 7.5 \end{aligned}$$

代入式 (3-5) 得

$$\begin{aligned} K_c &= \omega_n^2 = 56.25 \\ T_c &= 0.148 \end{aligned}$$

3-13 解：(1) $W_K(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$

系统为 0 型系统， $K_k = 50$ ， $x_r(t) = 2 + 2t + 2t^2$

$$e_{ss} = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{4}{K_a} = \frac{2}{1+K_k} + \frac{2}{0} + \frac{4}{0} = \infty$$

$$(2) W_K(s) = \frac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} = \frac{\frac{7}{8}(s+1)}{s(0.25s+1)(0.5s^2+s+1)}$$

系统为 0 型系统, $K_k = \frac{7}{8}$, $x_r(t) = 2 + 2t + 2t^2$

$$e_{ss} = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{4}{K_a} = \frac{2}{1+\infty} + \frac{2}{K_k} + \frac{4}{0} = \infty$$

$$(3) W_K(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(0.1s+1)}$$

系统为 0 型系统, $K_k = 5$, $x_r(t) = 2 + 2t + 2t^2$

$$e_{ss} = \frac{2}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} + \frac{4}{K_a} = \frac{2}{1+\infty} + \frac{2}{\infty} + \frac{4}{K_k} = 0.8$$

3-14 解: 图 P3-7 系统的开环传递函数

$$W_K(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{\tau s} \cdot \frac{100}{s(s+10)} = \frac{10K(\tau s + 1)}{\tau s^2(0.1s + 1)}$$

系统为 II 型系统, $K_k = \frac{10K}{\tau}$ 。

若输入信号 $x_r(t) = t^2$, 稳态误差

$$e_{ss} = \frac{2}{K_a} = \frac{2}{K_k} = \frac{\tau}{5K}$$

由题意, $e_{ss} \leq 0.1$, 即

$$\frac{\tau}{5K} \leq 0.1 \tag{3-6}$$

闭环系统特征方程

$$\tau s^2(0.1s + 1) + 10K(\tau s + 1) = 0$$

$$0.1\tau s^3 + \tau s^2 + 10K\tau s + 10K = 0$$

列劳斯表

s^3	0.1 τ	10K τ
s^2	τ	10K
s^1	10K $\tau - K$	
s^0	10K	

若闭环系统稳定, 则有

$$10K\tau - K > 0 \tag{3-7}$$

式 (3-6) 和式 (3-7) 联立

$$\begin{aligned} \tau &> 0.1 \\ K &\geq 0.2 \end{aligned}$$

3-15 解: 将某种温度计置于一恒温水槽内, 相当于给温度计系统加一恒位置信号, 即阶跃信号。此时, 在一分钟内, 温度计的指示值达实际值的 98%, 表示温度计系统在阶跃输入

下，响应时间为 $t_s(2\%) = 1 \text{ min}$ 。又由惯性环节的特性

$$t_s(2\%) = 1 \text{ min} = 4T$$

则有 $T = 0.25 \text{ min}$ 。

则惯性环节的传递函数为

$$W(s) = \frac{1}{0.25s + 1}$$

如果将水槽以 $10^\circ/\text{min}$ 的速度升温，表示给温度计系统加一速度信号 $x_r(t) = 10t$ ，则系统稳态指示误差

$$E(s) = (1 - W_B(s))X_r(s) = \frac{0.25s}{0.25s + 1} \cdot \frac{10}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0.25s}{0.25s + 1} \cdot \frac{10}{s^2} = 2.5^\circ$$

3-16 解：考虑系统的扰动稳态误差时，可记输入量的变化量为零，即 $\Delta X_r(s) = 0$ 。扰动量发生变化时，输出量的变化情况 $\Delta X_c(s)$ 即为系统的扰动稳态误差。

$$\Delta X_c(s) = \Delta N(s) \cdot \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \Delta N(s) \cdot \frac{K_2s}{s^2(1 + T_2s) + K_1K_2(1 + T_1s)}$$

则扰动稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta X_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta N(s) \cdot \frac{K_2s}{s^2(1 + T_2s) + K_1K_2(1 + T_1s)}$$

$$\text{当 } \Delta N(s) = \frac{1}{s} \text{ 时, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta X_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{K_2s}{s^2(1 + T_2s) + K_1K_2(1 + T_1s)} = 0;$$

$$\text{当 } \Delta N(s) = \frac{1}{s^2} \text{ 时, } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta X_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{K_2s}{s^2(1 + T_2s) + K_1K_2(1 + T_1s)} = \frac{1}{K_1}。$$

3-17 解：由图 P3-9 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{(W_1(s) + W_c(s))W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{(1 + 0.5s) \frac{2}{s(0.25s + 1)}}{1 + \frac{2}{s(0.25s + 1)}} = \frac{2 + s}{s(0.25s + 1) + 2}$$

因为 $x_r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$ ， $X_r(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$ 。根据误差的定义，误差函数为

$$E(s) = X_r(s) - X_c(s) = X_r(s)(1 - W_B(s)) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) \frac{0.25s^2}{s(0.25s + 1) + 2}$$

则系统稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right) \frac{0.25s^2}{s(0.25s+1)+2} = 0 + 0 + 0.125 = 0.125$$

第 4 章 习题答案

4-1 绘制下列各开环传递函数所对应的负反馈系统的根轨迹。

$$(1) W_K(s) = \frac{K_g}{(s+2)(s+4)}$$

解：开环极点： $-p_1 = -2$ ， $-p_2 = -4$ 。分离点计算如下：

$$D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 2s + 6 = 0, \text{ 解得： } s = -3 \text{ 为分离点。}$$

$$\text{计算渐近线：倾角 } \varphi = \frac{\mp 180^\circ(1+2\mu)}{n-m} = \pm 90^\circ$$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{2+4}{2} = -3$$

根轨迹如图 4-1 所示。

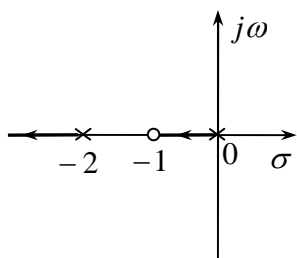


图 4-1

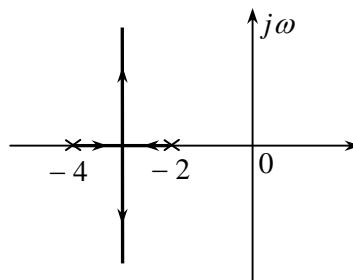


图 4-2

$$(2) W_K(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+2)}$$

解：开环极点： $-p_1 = 0$ ， $-p_2 = -2$ ，开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-\infty, -2]$ ， $[-1, 0]$ 。根轨迹如图 4-2 所示。

$$(3) W_K(s) = \frac{K_g(s+2)}{s(s+1)}$$

解：开环极点： $-p_1 = 0$ ， $-p_2 = -1$ ，开环有限零点： $-z_1 = -2$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-\infty, -2]$ ， $[-1, 0]$ 。

计算分离点会合点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 3s^2 + 6s + 2 = 0$ ，解得：

$$s = -2 \pm \sqrt{2} \approx -0.59, -3.41。$$

复平面上根轨迹为一圆，圆心在有限零点上，半径为有限零点到分离点或会合点的距离。

如图 4-3 所示。

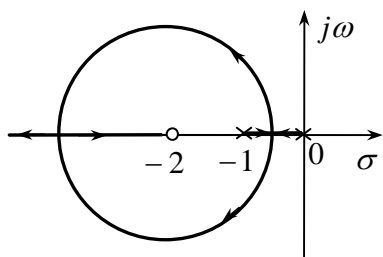


图 4-3

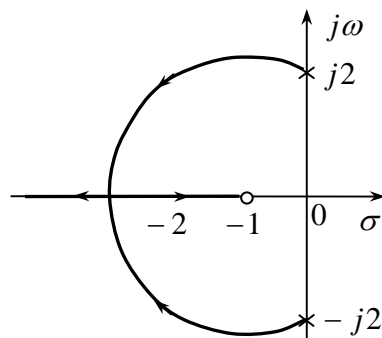


图 4-4

$$(4) W_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{s^2+4}$$

解：开环极点： $-p_{1,2} = \pm j2$ ，开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-\infty, -1]$

计算会合点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = s^2 + 2s - 4 = 0$ ，解得： $s = -1 - \sqrt{5} \approx -3.24$ 。

复平面上根轨迹为一段圆弧，圆心在有限零点上，半径为有限零点到会合点的距离。如图 4-4 所示。

$$(5) W_k(s) = \frac{K_g(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

解：开环极点： $-p_1 = 0$ ， $-p_2 = -1$ ， $-p_3 = -2$ 开环有限零点： $-z_1 = -3$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-3, -2]$ ， $[-1, 0]$ 。

计算分离点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 2s^3 + 12s^2 + 18s + 6 = 0$ ，解得： $s \approx -0.47$ 。

计算渐近线：倾角 $\varphi = \frac{\mp 180^\circ(1+2\mu)}{n-m} = \pm 90^\circ$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{0+1+2-3}{2} = 0$$

根轨迹如图 4-5 所示。

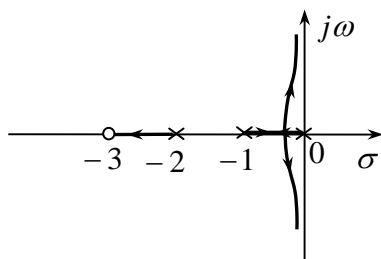


图 4-5

$$(6) W_k(s) = \frac{K_g s(s+6)}{(s^2+4s+8)(s^2+8s+20)}$$

解：开环极点： $-p_{1,2} = -2 \pm j2$ ， $-p_{3,4} = -4 \pm j2$ 开环有限零点： $-z_1 = 0$ ，

$-z_2 = -6$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-6, 0]$ 。

计算分离点、会合点：

$D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = s^5 + 15s^4 + 72s^3 + 108s^2 - 160s - 480 = 0$ ，解得：

$s_1 = -7.6529$ ， $s_2 = 1.6529$ ， $s_{3,4} = -3 \pm j1.9103$ ， $s_5 = -3$ 。其中， s_1 和 s_2 不在根轨迹上，故舍去，则 $s_{3,4}$ 为分离点， s_5 为会合点。

计算出射角：先求开环极点 $-p_1 = -2 + j2$ 的出射角。

$$\begin{aligned} \beta_{c1} &= 180^\circ + \sum_{i=1}^2 \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^4 \beta_j \\ &= 180^\circ + (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \\ &= 180^\circ + (180^\circ - 45^\circ + 26.6^\circ) - (90^\circ + 0 + 63.4^\circ) \\ &= 188.2^\circ \end{aligned}$$

则开环极点 $-p_2 = -2 - j2$ 的出射角为 $\beta_{c2} = -188.2^\circ$ 。

同理，计算开环极点 $-p_3 = -4 + j2$ 的出射角。

$$\begin{aligned} \beta_{c3} &= 180^\circ + \sum_{i=1}^2 \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \beta_j \\ &= 180^\circ + (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_4) \\ &= 180^\circ + (180^\circ - 26.6^\circ + 45^\circ) - (180^\circ + 90^\circ + 26.6^\circ + 90^\circ) \\ &= -8.2^\circ \end{aligned}$$

则开环极点 $-p_4 = -4 - j2$ 的出射角为 $\beta_{c4} = 8.2^\circ$ 。

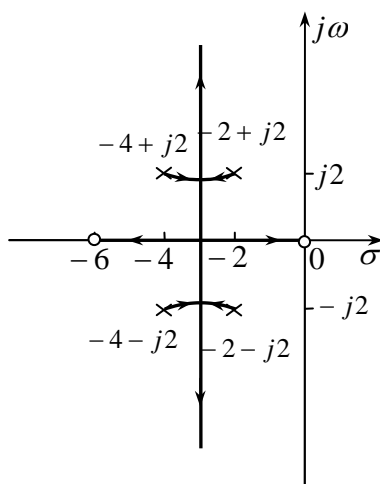


图 4-6

渐近线：倾角 $\varphi = \frac{\mp 180^\circ(1 + 2\mu)}{n - m} = \pm 90^\circ$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{2+2+4+4-6}{2} = -3$$

系统根轨迹如图 4-6 所示。

4-3 已知单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$W_k(s) = \frac{K_g(s+0.5)(s+1)(s+2)}{(s-0.5)(s^2-s+2.5)}$$

试概略绘制系统根轨迹图。

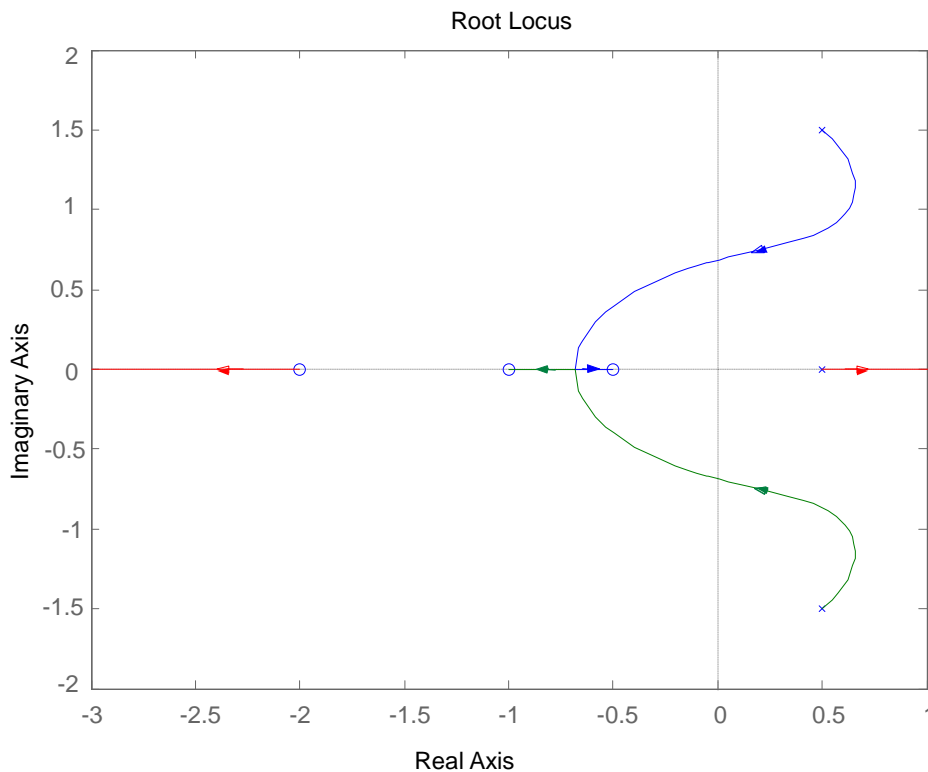


图 4-7

解：开环极点： $-p_1 = 0.5$ ， $-p_{2,3} = 0.5 \pm j1.5$ 。开环有限零点： $-z_1 = -0.5$ ， $-z_2 = -1$ ， $-z_3 = -2$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-2, -1]$ ， $[-0.5, 0.5]$ 。

计算会合点：根据 $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$ ，解得： $s \approx -1.48$ ，为会合点。

计算开环复极点 $0.5 + j1.5$ 的出射角：

$$\begin{aligned} \beta_{c1} &= 180^\circ + \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \beta_j = 180^\circ + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\beta_2 + \beta_3) \\ &= 180^\circ + \left(\arctan \frac{1.5}{1} + \arctan \frac{1.5}{1.5} + \arctan \frac{1.5}{2.5} \right) - (90^\circ + 90^\circ) = 132.27^\circ \end{aligned}$$

根轨迹如图 4-7 所示。

4-4 若题 4-1 的反馈改为正反馈，试概略绘制各系统的根轨迹图。

$$(1) W_K(s) = \frac{K_g}{(s+2)(s+4)}$$

解：开环极点： $-p_1 = -2$ ， $-p_2 = -4$ 。不存在开环有限零点。

实轴上根轨迹存在区间： $[-\infty, -4]$ ， $[-2, \infty]$ 。根轨迹如图 4-8 所示。

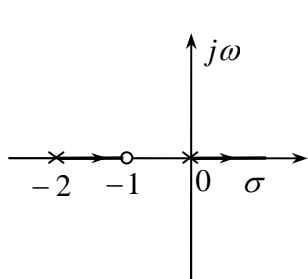


图 8

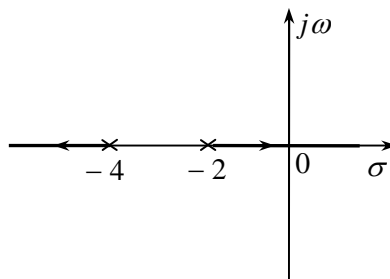


图 9

$$(2) W_K(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+2)}$$

解：开环极点： $-p_1 = 0$ ， $-p_2 = -2$ ，开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-2, -1]$ ， $[0, \infty]$ 。根轨迹如图 4-9 所示。

$$(3) W_K(s) = \frac{K_g(s+2)}{s(s+1)}$$

解：开环极点： $-p_1 = 0$ ， $-p_2 = -1$ ，开环有限零点： $-z_1 = -2$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-2, -1]$ ， $[0, \infty]$ 。根轨迹如图 4-10 所示。

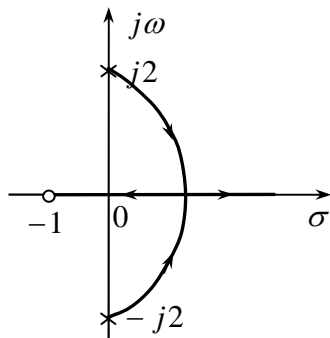


图 4-10

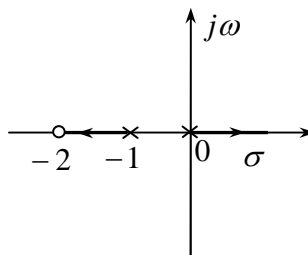


图 4-11

$$(4) W_K(s) = \frac{K_g(s+1)}{s^2+4}$$

解：开环极点： $-p_{1,2} = \pm j2$ ，开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-1, \infty]$ 。

计算会合点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = s^2 + 2s - 4 = 0$ ，解得： $s = -1 + \sqrt{5} \approx 1.24$ 。

复平面上根轨迹为一段圆弧，圆心在有限零点上，半径为有限零点到会合点的距离。如图 4-11 所示。

$$(5) W_K(s) = \frac{K_g(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

解：开环极点： $-p_1=0$ ， $-p_2=-1$ ， $-p_3=-2$ 开环有限零点： $-z_1=-3$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-\infty, -3]$ ， $[-2, -1]$ ， $[0, \infty]$ 。

计算分离点、会合点：根据 $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 0$ ，解得： $s_1 \approx -1.65$ 为分离点， $s_2 \approx -3.88$ 为会合点。

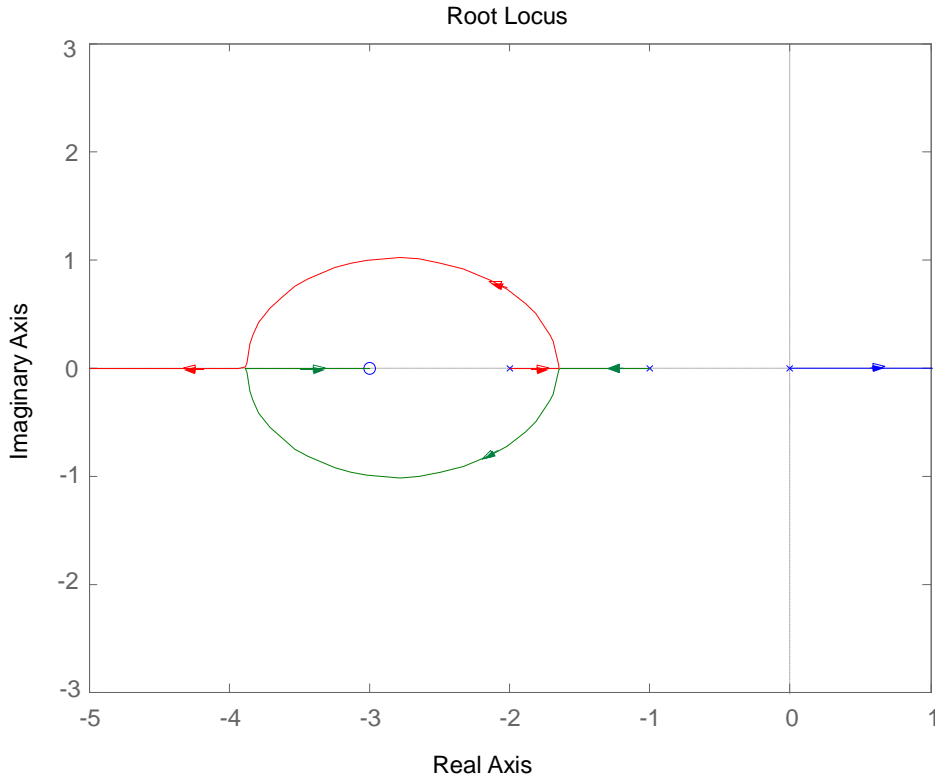


图 4-12

根轨迹如图 4-12 所示。

$$(6) W_K(s) = \frac{K_g s(s+6)}{(s^2+4s+8)(s^2+8s+20)}$$

解：开环极点： $-p_{1,2} = -2 \pm j2$ ， $-p_{3,4} = -4 \pm j2$ 开环有限零点： $-z_1=0$ ， $-z_2=-6$ 。

实轴上根轨迹存在区间： $[-\infty, -6]$ ， $[0, \infty]$

计算会合点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = s^5 + 15s^4 + 72s^3 + 108s^2 - 160s - 480 = 0$ ，

解得： $s_1 = -7.6529$ ， $s_2 = 1.6529$ 为会合点。

计算出射角：先求开环极点 $-p_1 = -2 + j2$ 的出射角。

$$\begin{aligned}\beta_{c1} &= 360^\circ + \sum_{i=1}^2 \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^4 \beta_j \\ &= 360^\circ + (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \\ &= 360^\circ + (180^\circ - 45^\circ + 26.6^\circ) - (90^\circ + 0 + 63.4^\circ) \\ &= 368.2^\circ\end{aligned}$$

根据对称性，极点 $-p_1 = -2 - j2$ 的出射角为 -368.2° 。

同理，计算开环极点 $-p_3 = -4 + j2$ 的出射角。

$$\begin{aligned}\beta_{c3} &= 360^\circ + \sum_{i=1}^2 \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \beta_j \\ &= 360^\circ + (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_4) \\ &= 360^\circ + (180^\circ - 26.6^\circ + 45^\circ) - (180^\circ + 90^\circ + 26.6^\circ + 90^\circ) \\ &= 171.8^\circ\end{aligned}$$

根据对称性，极点 $-p_3 = -4 - j2$ 的出射角为 -171.8° 。

根轨迹如图 4-13 所示。

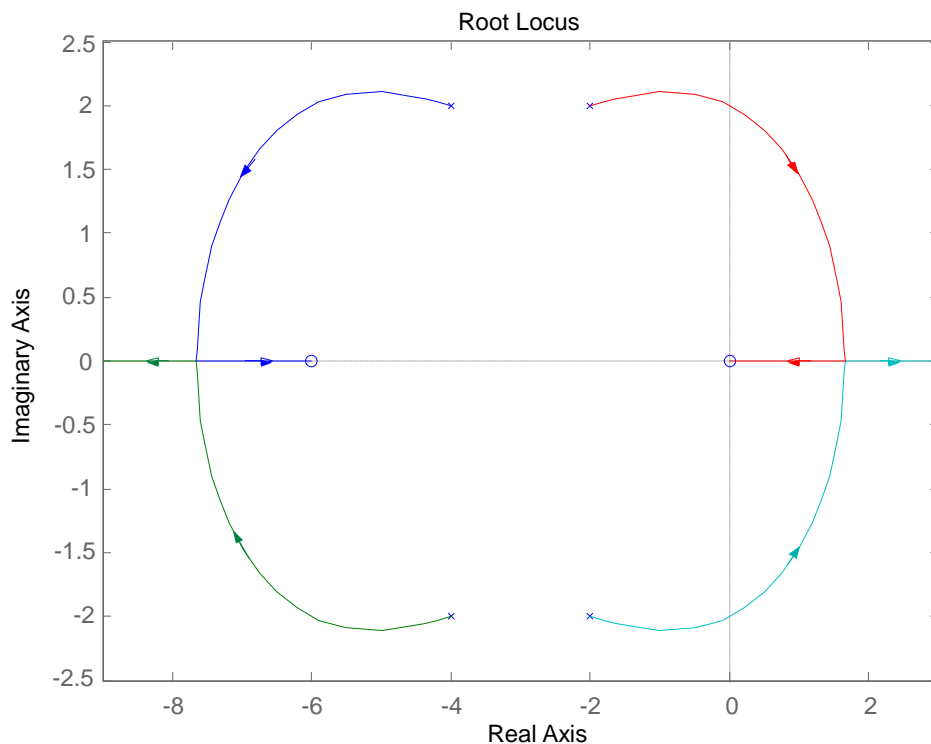


图 4-13

4-6 已知多项式

$$F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K(s+3)$$

其中 $K > 0$ 。如果要求 $F(s)=0$ 的根都为复根，试确定 K 的取值范围。

解：将 $F(s)$ 看作是闭环特征方程，有

$$F(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K(s+3) = 0$$

变形为

$$1 + \frac{K(s+3)}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} = 1 + \frac{K(s+3)}{s(s+1)^3} = 0$$

等效开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)^3} = 0$$

以 K 为根轨迹放大系数画常规 180° 根轨迹如图 4-14 所示。

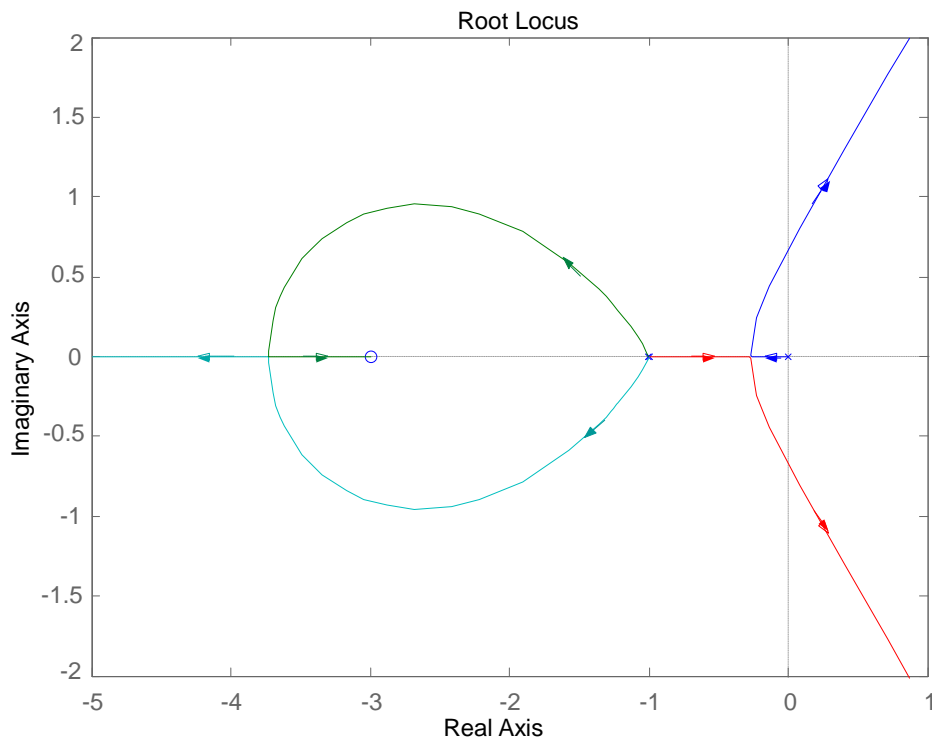


图 4-14

4-8 解：（1）属于广义根轨迹。闭环特征方程为 $1 + W_K(s) = 1 + \frac{s+p}{s(s+1)^2} = 0$ ，即

$s(s+1)^2 + s + p = 0$ ，转换形式为

$$1 + \frac{p}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

等效开环传递函数为

$$W_{eqK}(s) = \frac{p}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{pN(s)}{D(s)}$$

以 p 为根轨迹放大系数画常规 180° 根轨迹即可。

开环极点为开环极点： $-p_1=0$ ， $-p_{2,3}=-1 \pm j1$ 。不存在开环有限零点。

实轴上根轨迹存在区间： $[-\infty, 0]$ 。

计算渐近线：

$$\text{倾角 } \varphi = \frac{\pm 180^\circ(1+2\mu)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ(1+2\mu)}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{0+1+1}{3} = -0.67$$

计算出射角：求开环极点 $-p_2 = -1 + j1$ 的出射角。

$$\begin{aligned} \beta_{c1} &= 180^\circ + \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n \beta_j \\ &= 180^\circ - (\beta_1 + \beta_3) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 45^\circ + 90^\circ) \\ &= -45^\circ \end{aligned}$$

与虚轴的交点：闭环特征方程为

$$s(s+1)^2 + s + p = 0$$

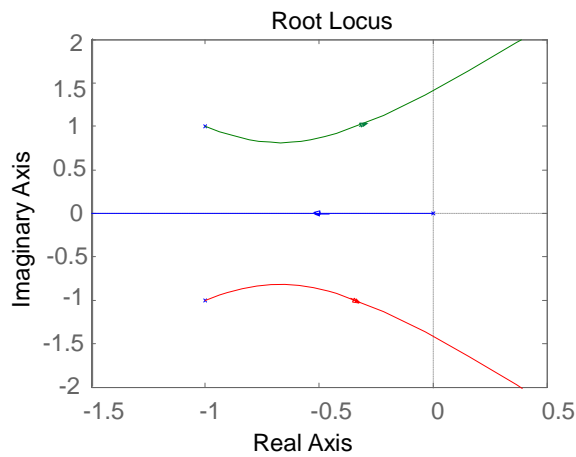


图 4-15

即： $s^3 + 2s^2 + 2s + p = 0$ ，列劳斯表如下：

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & p \\ s^1 & \frac{4-p}{2} & \\ s^0 & p & \end{array}$$

令： $\frac{4-p}{2} = 0$ ，得与虚轴相交时， $p = 4$ ，再由辅助方程求得交点位置。

辅助方程为 $2s^2 + p = 2s^2 + 4 = 0$ ，解得 $s = \pm j\sqrt{2} \approx \pm j1.41$

根轨迹如图 4-15 所示。

(2) 由与虚轴的交点知，系统要稳定，需 $p < 4$ ；由开环传递函数 $W_K(s) = \frac{s+p}{s(s+1)^2}$ ，得开环放大系数为 p 。为当输入 $x_r(t) = 2t$ 时，其稳态误差为 $e_{ss} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{p}$ ，所以，要使系统稳态误差 $e_{ss} \leq 0.1$ ，则 $p \geq 20$ ，但此时系统已不稳定了，所以，在稳定的前提下，不论 p 取何值，系统稳态误差都不满足 $e_{ss} \leq 0.1$ 的要求。

4-10 解：各系统的根轨迹概略图如图 4-16 所示。

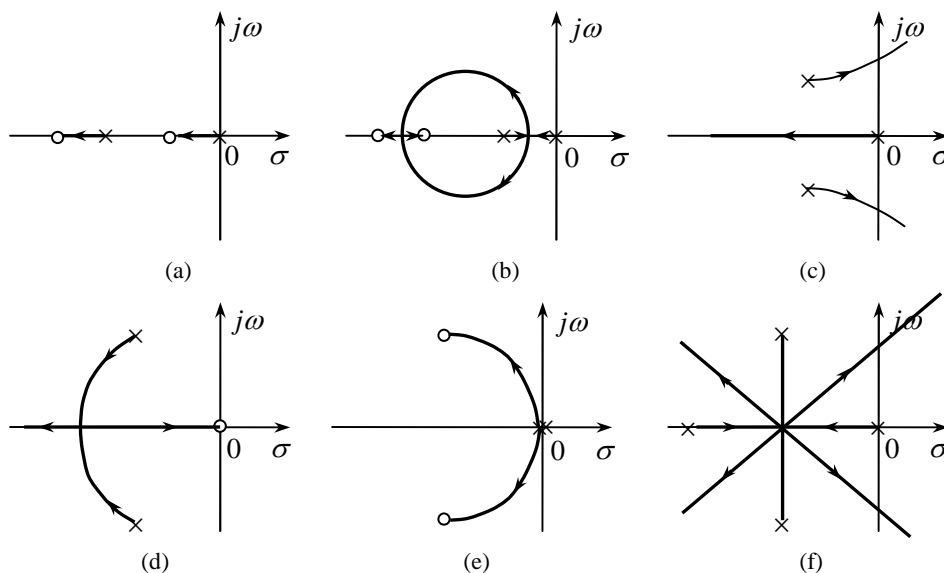


图 P4-16

4-12 解：由系统闭环特征方程 $s^3 + as^2 + K(s+1) = 0$ ，变形求等效开环传递函数：

$$1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)} = 0$$

等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$ ，画以 K 为根轨迹放大系数的常规 180° 根轨迹。

(1) $a = -1$ 时，等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s-1)}$ ，开环极点： $-p_1 = -p_2 = 0$ ，
 $-p_3 = 1$ 开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。

实轴上根轨迹存在区间为 $[-1, 0]$ ， $[0, 1]$ 。

分离点: $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = 2s(s^2 + s - 1) = 0$, 解得分离点为
 $s = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.62$ 。

计算渐近线:

$$\text{倾角 } \varphi = \frac{\pm 180^\circ(1 + 2\mu)}{n - m} = \frac{\pm 180^\circ(1 + 2\mu)}{2} = \pm 90^\circ$$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n - m} = -\frac{-1 - 1}{2} = 1$$

根轨迹如图 4-17 所示。

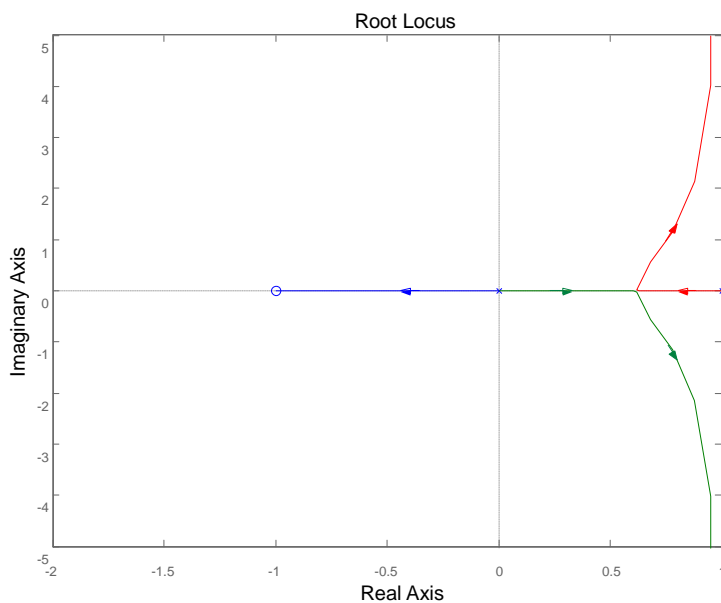


图 4-17

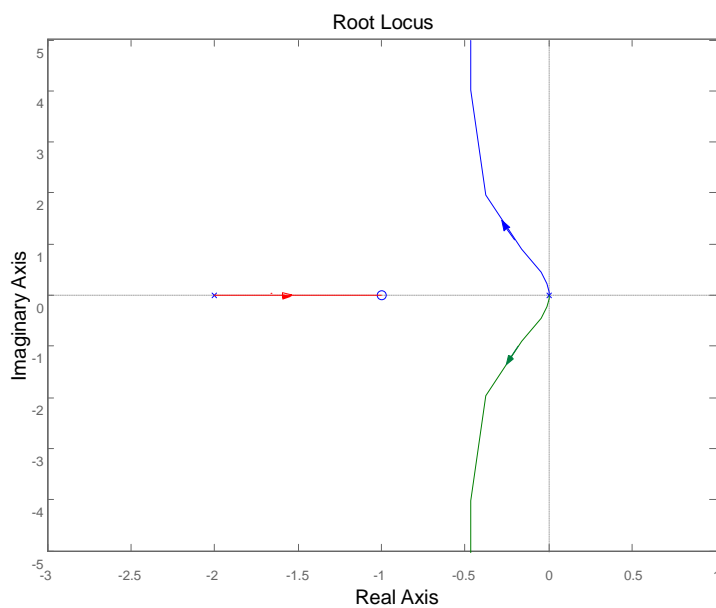


图 4-18

(2) $a = 2$ ，等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ ，开环极点： $-p_1 = -p_2 = 0$ ， $-p_3 = -2$ 开环有限零点： $-z_1 = -1$ 。根轨迹如图 4-18 所示。

(3) $a = 9$ ，等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$ ，根轨迹如图 4-19 所示。

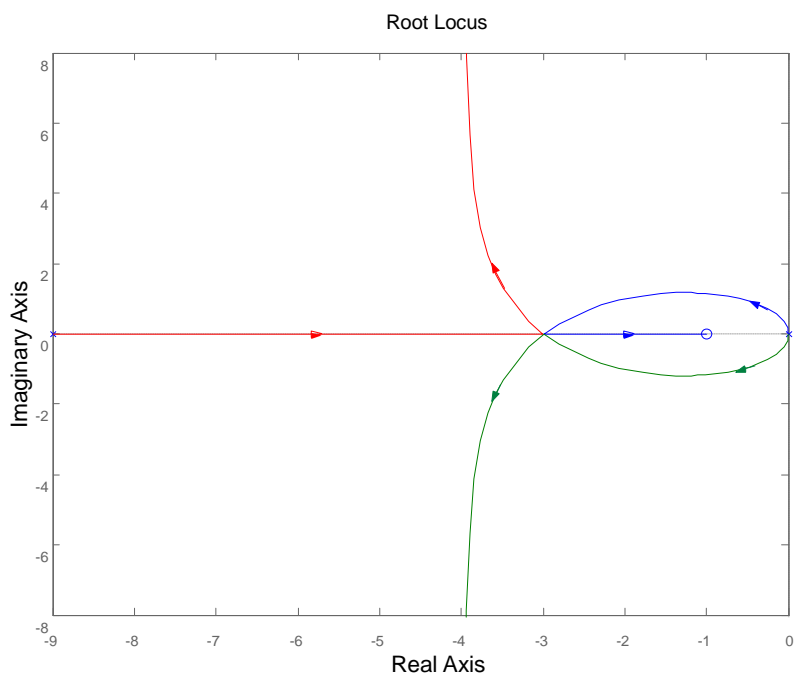


图 4-19

(4) $a = 10$ ，等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$ ，根轨迹如图 4-20 所示。

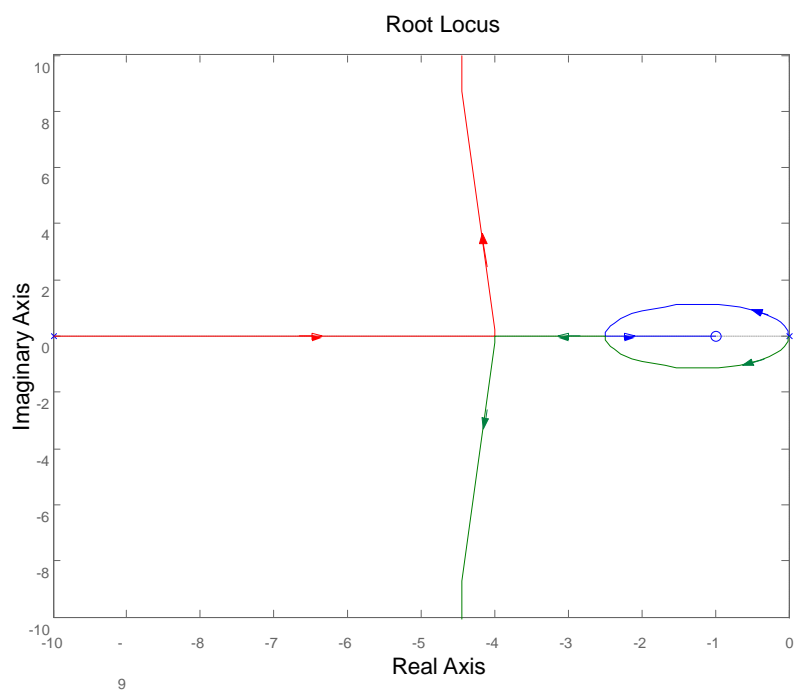


图 4-20

4-14 解：系统闭环特征方程为 $1+W_K(s)=1+\frac{\frac{1}{a}s-1}{s^3+s^2+\frac{s}{(1+a)^2}-1}=0$ ，即：

$$s^3+s^2+\frac{s}{(1+a)^2}-1+\frac{1}{a}s-1=s^3+s^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{(1+a)^2})s-2=0$$

设： $K=\frac{1}{a}+\frac{1}{(1+a)^2}$ ，有闭环特征方程 $1+\frac{Ks}{s^3+s^2-2}=0$ ，以 K 为变量画根轨迹，等价

于以 a 为变量画根轨迹。等效开环传递函数为 $W_K(s)=\frac{Ks}{s^3+s^2-2}$ ，画根轨迹见图 4-21 所示。

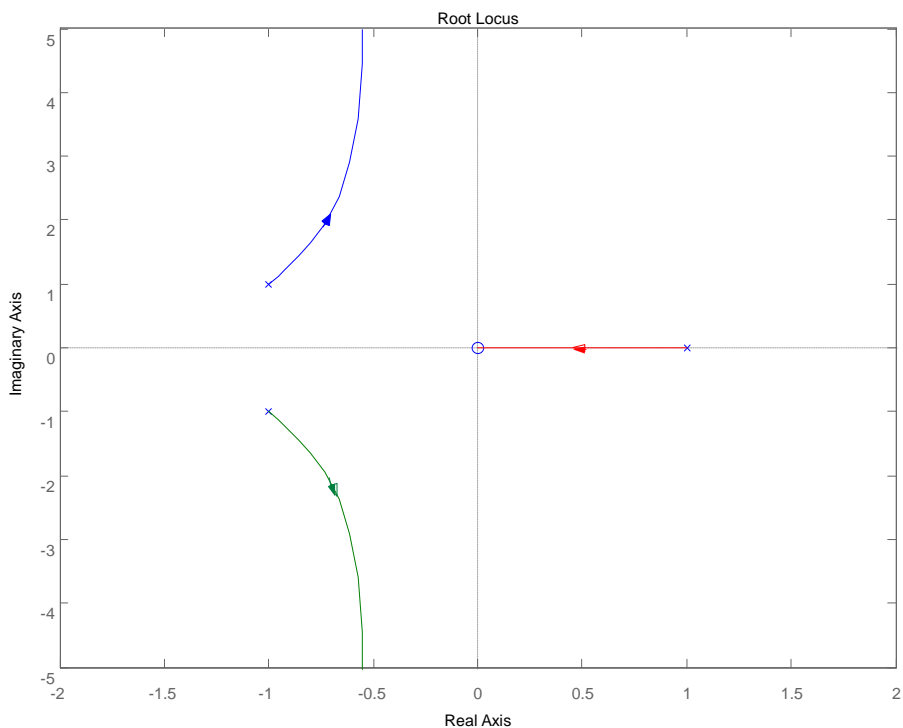


图 4-21

4-15 解：计算渐近线：

$$\text{倾角 } \varphi = \frac{\pm 180^\circ(1+2\mu)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ(1+2\mu)}{2} = \pm 90^\circ$$

$$\text{交点 } -\sigma_k = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{0+1+2-2-\tau}{2} = -\frac{1-\tau}{2}$$

当渐近线交点 $-\sigma_k = -\frac{1-\tau}{2} \leq 0$ 时，即 $\tau \leq 1$ 时，根轨迹不会与虚轴相交。

如取 $\tau = 0.5$ ，其根轨迹如图 4-22 所示。

如取 $\tau = 1.5$ ，其根轨迹如图 4-23 所示。

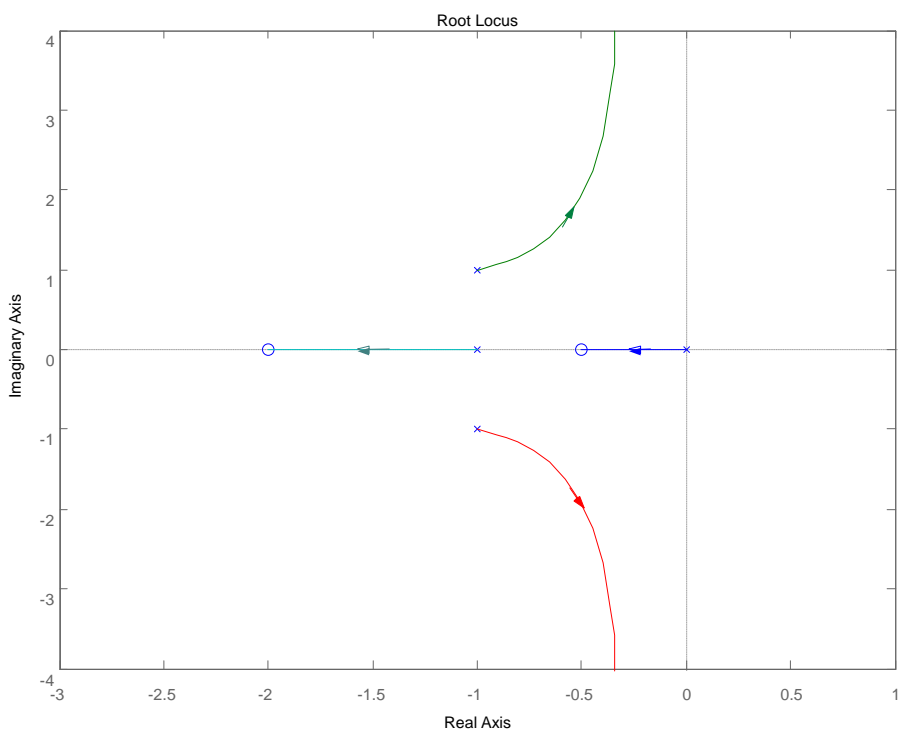


图 4-22

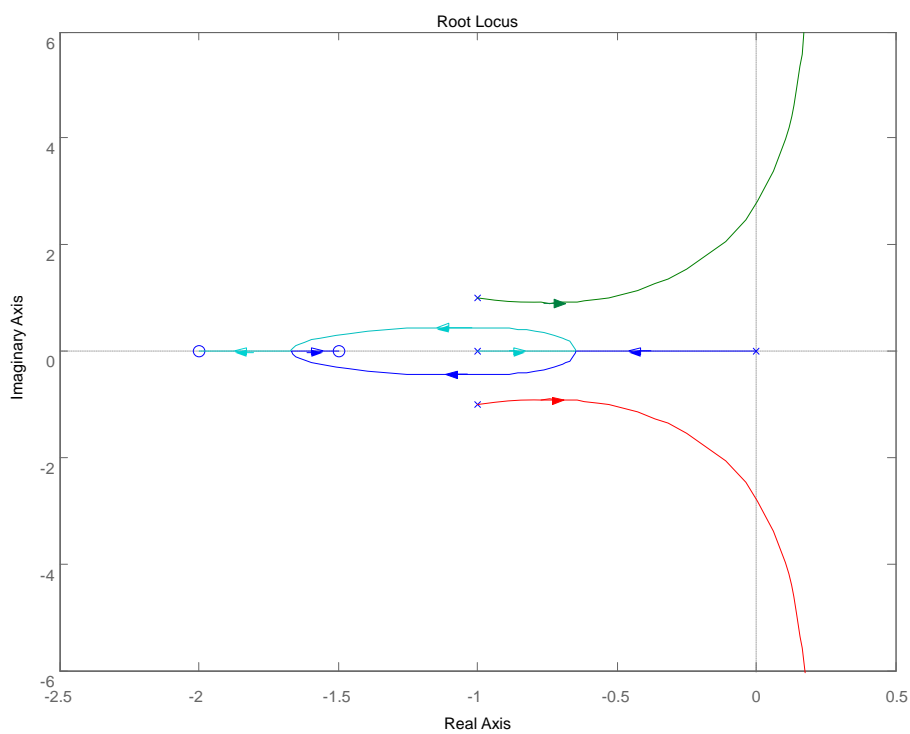


图 4-23

4-17 解：点 $(-0.65 + j1.07)$ 应满足辐角条件，即

$$\arctan \frac{1.07}{\frac{1}{T_1} - 0.65} - (180^\circ - \arctan \frac{1.07}{0.65} + \arctan \frac{1.07}{1 - 0.65} + \arctan \frac{1.07}{2 - 0.65}) = -180^\circ$$

解得： $\frac{1}{T_1} = 1.5$ 。系统开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{10KT_1(s + \frac{1}{T_1})}{s(s+1)(s+2)} = \frac{10}{1.5} \frac{K(s+1.5)}{s(s+1)(s+2)}$ ，

设 $K_1 = \frac{10}{1.5}K$ ，为根轨迹放大系数，即等价于以 K 为变量画根轨迹。根轨迹如图 4-24 所示。

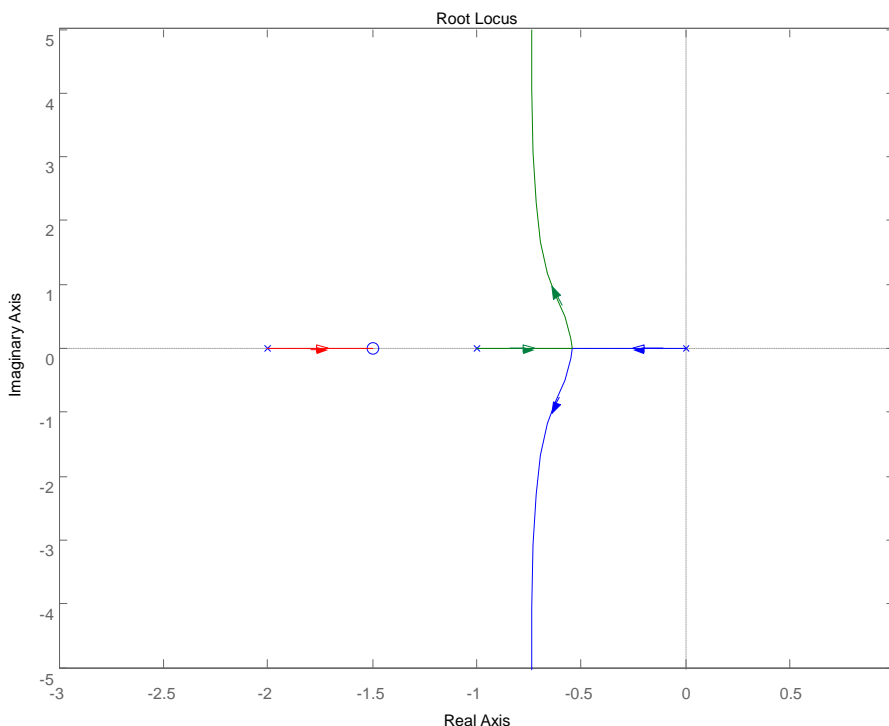


图 4-24

4-18 解：开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)} = \frac{K_1(s+2)}{s(s+1)}, \quad K_1 = 0.5K$$

以 K_1 为变量画根轨迹就等价于以 K 为

变量画根轨迹。根轨迹如图 4-25 所示。

当 $K=10$ 时 即 $K_1=5$ ，所以从根轨迹上求 $K_1=5$ 时的闭环极点。

计算分离点、会合点： $D'(s)N(s) - N'(s)D(s) = s^2 + 4s + 2 = 0$ ，解得分离点为 $s_1 = -2 + \sqrt{2} \approx -0.59$ ，会合点为 $s_2 = -2 - \sqrt{2} \approx -3.41$ 。

闭环特征方程为 $s(s+1) + K_1(s+2) = 0$ ，将 $K_1=5$ 代入得：

$$s^2 + 6s + 10 = 0$$

解得 $K=10$ 时的闭环极点为: $s_{1,2} = -3 \pm j1$ 。

对应阻尼比为 $\zeta = 0.95$, $\omega_n = 3.16$ 。系统暂态响应呈现为衰减振荡形式, 其超调量为

$$\delta\% = 0.0071\%, \text{ 基本没有超调, 上升时间为 } t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 2.86 \text{ 秒。}$$

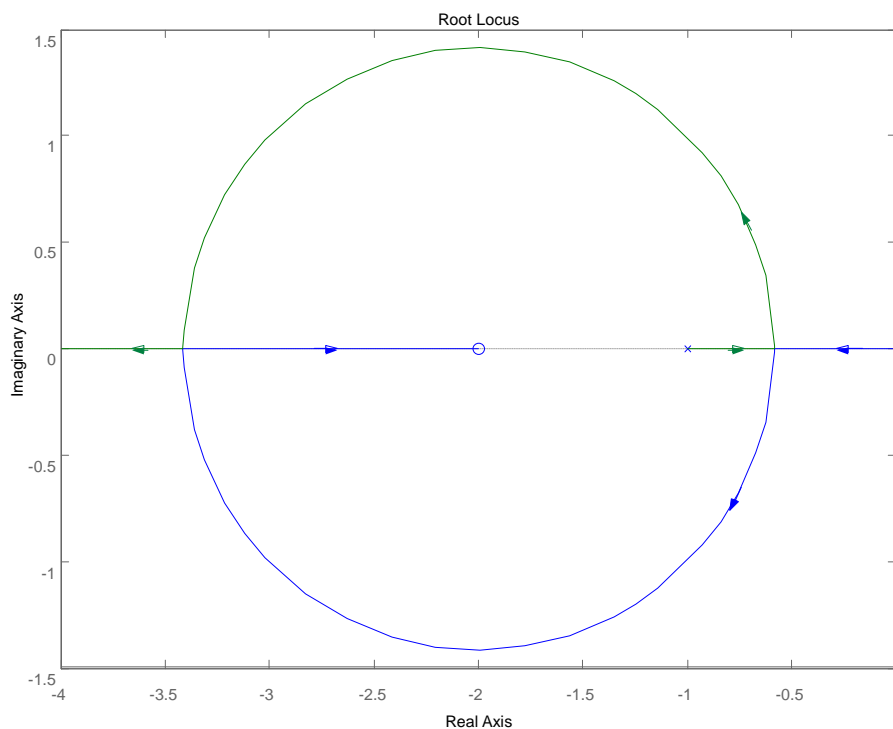


图 4-25

4-19 解: (1) 当 $H(s) = K_t s$ 时, 其开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{1000}{s(s+20)(s+10+10K_t)}$,

闭环特征方程为 $s(s+10)(s+20) + 1000 + 10K_t s(s+20) = 0$, 即:

$$1 + \frac{10K_t s(s+20)}{s(s+10)(s+20) + 1000} = 0$$

设 $K = 10K_t$, 其等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{Ks(s+20)}{s(s+10)(s+20) + 1000} = 0$, 其根轨迹如

图 4-26 所示。

(2) 当 $H(s) = K_a s^2$ 时, 其开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{1000}{s(s+10K_a s+10)(s+20)}$, 闭

环特征方程为 $s(s+20)(s+10) + 1000 + 10K_a s^2(s+20) = 0$, 即:

$$1 + \frac{10K_a s^2(s+20)}{s(s+10)(s+20) + 1000} = 0$$

设 $K_1 = 10K_a$ ，其等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K_1 s^2 (s + 20)}{s(s + 10)(s + 20) + 1000} = 0$ ，以 K_1 为变

量画根轨迹如图 4-27 所示。

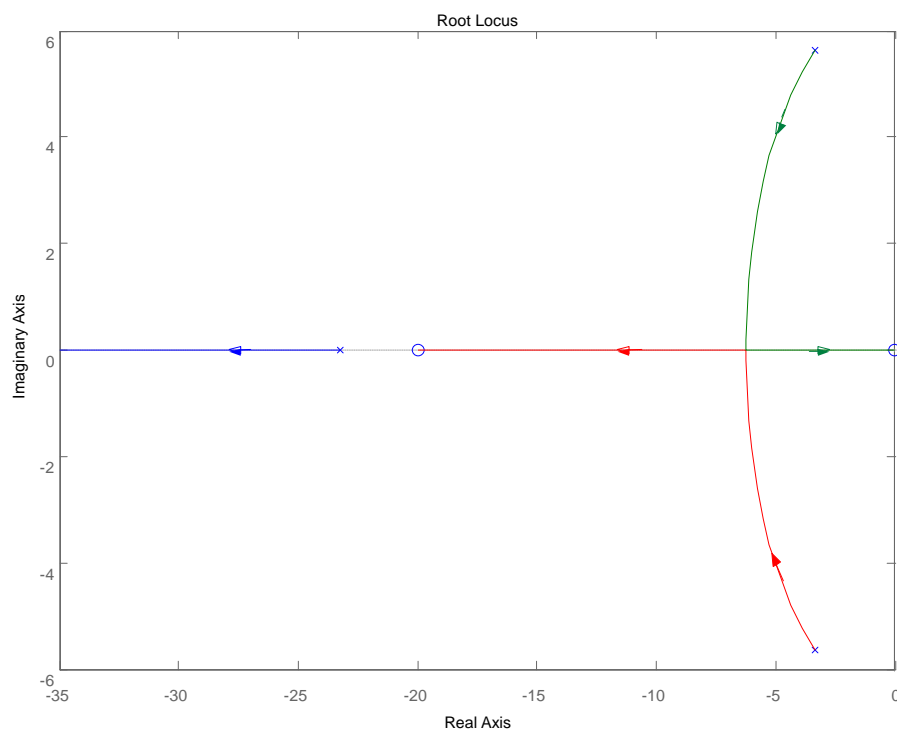


图 4-26

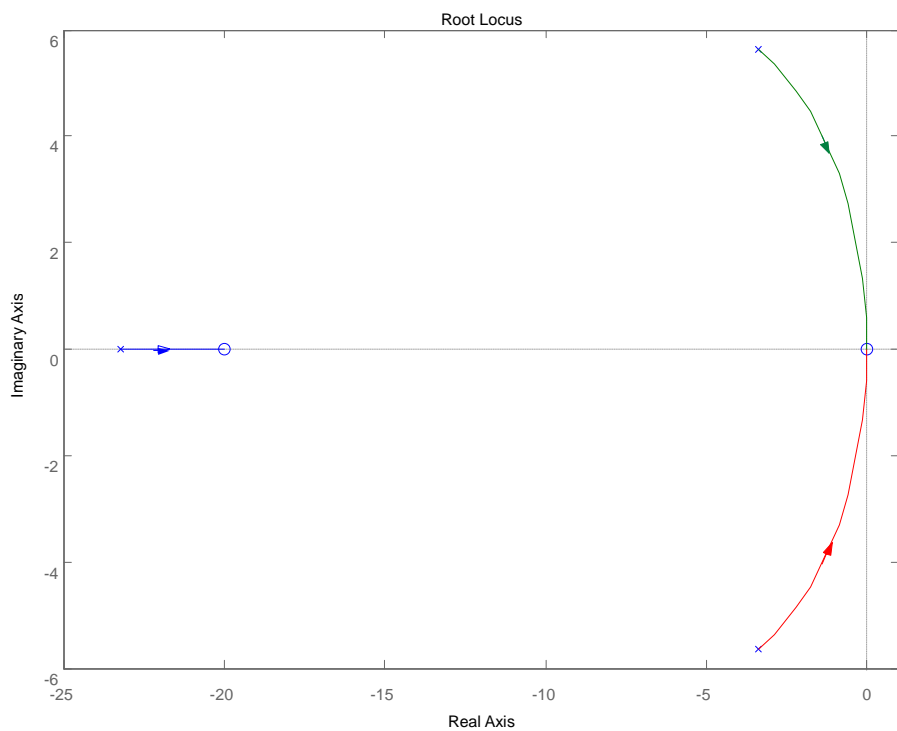


图 4-27

(3) 当 $H(s) = \frac{K_a s^2}{s+20}$ 时, 其开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+20)+10K_a s^2}$,

闭环特征方程为 $s(s+10)(s+20)+1000+10K_a s^2 = 0$, 即:

$$1 + \frac{10K_a s^2}{s(s+10)(s+20)+1000} = 0$$

设 $K_2 = 10K_a$, 其等效开环传递函数为 $W_{eqK}(s) = \frac{K_2 s^2}{s(s+10)(s+20)+1000} = 0$, 以 K_2 为变

量画根轨迹如图 4-28 所示。

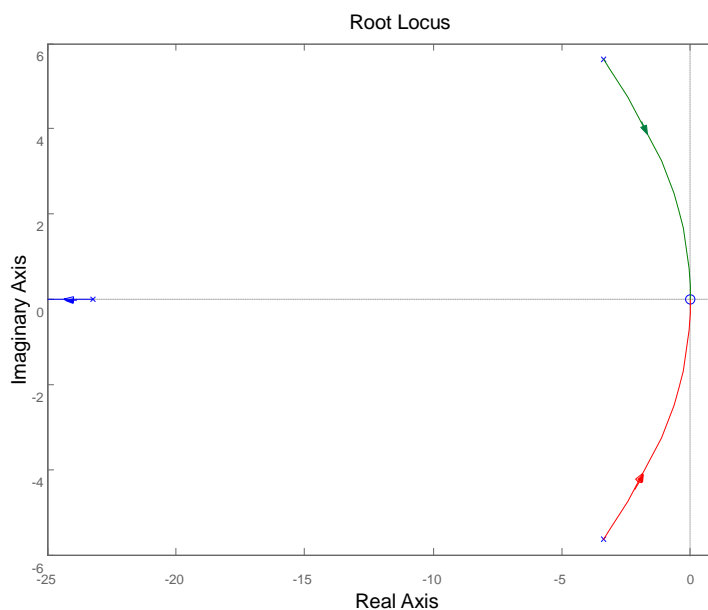


图 4-28

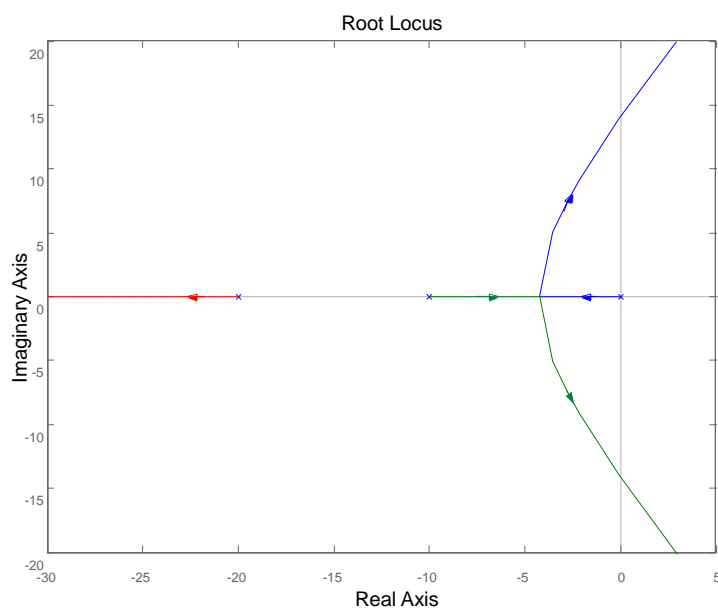


图 4-29

(4) 原系统开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{1000}{s(s+20)(s+10)}$ ，这里，根轨迹放大系数

$K_g = 1000$ ，若以 K_g 为变量画根轨迹如图 4-29 所示。当 $K_g = 1000$ 时，闭环极点为 $s_1 = -23.2472$ ， $s_2 = -3.3764 + j5.6228$ ， $s_3 = -3.3764 - j5.6228$ 。比较可看出，第一种反馈装置改变 K_t 的值，使复平面的根轨迹向左弯曲，改善了暂态性能，所以选择第一种 $H(s) = K_t s$ 。

第 5 章 习题答案

5-1 解：由单位反馈系统的开环传递函数 $W_K(s) = \frac{10}{s+1}$ ，得闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{10}{s+11}$$

系统频率特性为

$$W_B(j\omega) = \frac{10}{j\omega+11} = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+121}} e^{j-\arctan\frac{\omega}{11}}$$

$$(3) x_r(t) = \sin(t+30^\circ) - 2\cos(2t-45^\circ)$$

描写成极坐标形式， $X_r(j\omega) = e^{j(t+30^\circ)} - 2e^{j(2t-45^\circ)}$

可描述为两个正弦输入信号单独作用时系统稳态输出之和。

稳态响应的瞬时表示

$$x_c(t) = x_{c1}(t) - x_{c2}(t) = 0.91\sin(t+24.8^\circ) - 1.78\sin(2t-55.3^\circ)$$

5-3 设系统开环传递函数如下，绘制各系统的开环幅相频率特性曲线和开环对数频率特性曲线。

$$(1) W_K(s) = \frac{750}{s(s+5)(s+15)}$$

$$(2) W_K(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(110s+1)}$$

$$(3) W_K(s) = \frac{10}{(2s+1)(8s+1)}$$

$$(4) W_K(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s^2+8s+100)}$$

$$(5) W_K(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$(6) W_K(s) = \frac{10s+1}{3s+1}$$

$$(7) W_K(s) = \frac{s+0.2}{s(s+0.02)}$$

$$(8) W_K(s) = \frac{25(0.2s+1)}{s^2+2s+1}$$

解：

$$(1) W_K(s) = \frac{750}{s(s+5)(s+15)}$$

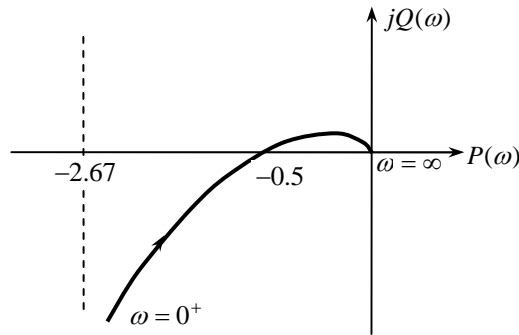
开环幅相频率特性曲线：

$$W_K(j\omega) = \frac{750}{j\omega(j\omega+5)(j\omega+15)} = \frac{10}{j\omega(j0.2\omega+1)(j0.067\omega+1)}$$

$\omega \rightarrow 0$ 时， $A(0) = \infty$ ， $\varphi(0) = -90^\circ$ 。低频渐近线与负实轴交点为 $\sigma_x = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) = -2.67$ 。

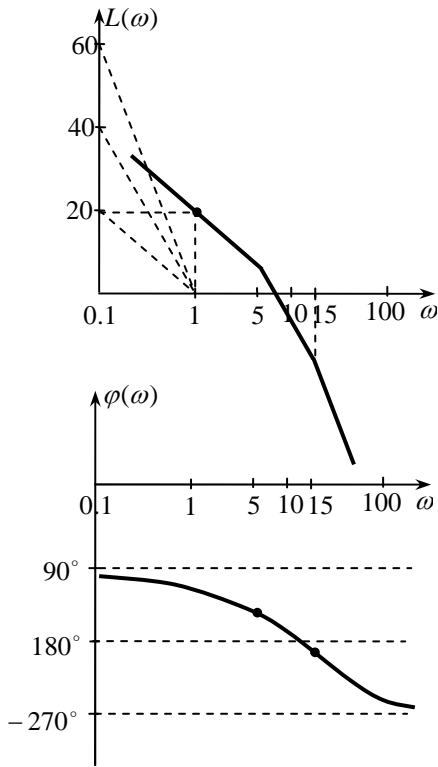
$\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -270^\circ$ 。

开环幅相频率特性曲线如图。

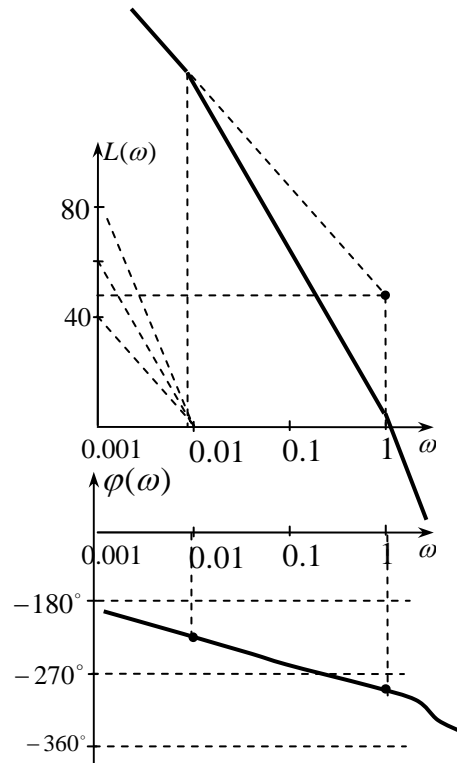


题 5-3 (1) 系统幅相频率特性曲线

开环对数频率特性曲线:



题 5-3 (1) 系统对数频率特性曲线



题 5-3 (2) 系统对数频率特性曲线

$$(2) W_K(s) = \frac{200}{s^2(s+1)(110s+1)}$$

开环幅相频率特性曲线:

$$W_K(j\omega) = \frac{200}{-\omega^2(j\omega+1)(110j\omega+1)}$$

$\omega \rightarrow 0$ 时, $A(0) = \infty$, $\varphi(0) = -180^\circ$ 。

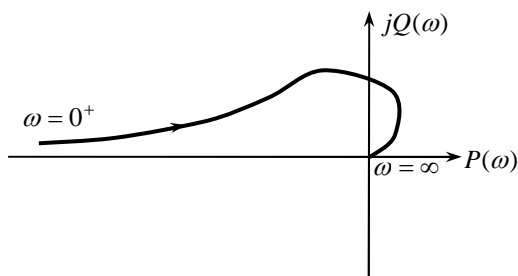
$\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -360^\circ$ 。

由 $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ 知, 曲线与负实轴无交点。

令 $P(\omega) = 0$, 得 $110\omega^2 - 1 = 0$, $\omega = 0.1$ 。

则 $Q(\omega)|_{\omega=0.1} = 1819.67j$

开环幅相频率特性曲线如。



题 5-3 (2) 系统幅相频率特性曲线

开环对数频率特性曲线:

$$(3) W_K(s) = \frac{10}{(2s+1)(8s+1)}$$

开环幅相频率特性曲线:

$$W_K(j\omega) = \frac{10}{(2j\omega+1)(8j\omega+1)}$$

$$A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{64\omega^2+1}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan 2\omega - \arctan 8\omega$$

$$P(\omega) = \frac{10(1-16\omega^2)}{(1+4\omega^2)(1+64\omega^2)} \quad Q(\omega) = \frac{-100j\omega}{(1+4\omega^2)(1+64\omega^2)}$$

$\omega \rightarrow 0$ 时, $A(0) = 10$, $\varphi(0) = 0^\circ$ 。

$\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -180^\circ$ 。

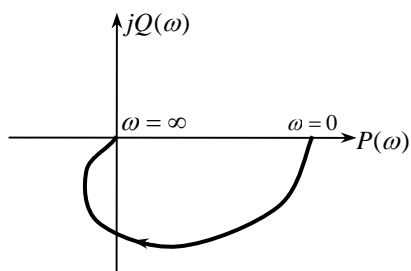
由 $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ 知, 曲线与负实轴无交点。

与虚轴交点: 令 $P(\omega) = 0$, 得

$$16\omega^2 - 1 = 0, \quad \omega = 0.25。$$

则 $Q(\omega)|_{\omega=0.1} = -4j$

开环幅相频率特性曲线如图。



题 5-3 (3) 系统幅相频率特性曲线

开环对数频率特性曲线:

$$(4) W_K(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s^2+8s+100)}$$

开环幅相频率特性曲线:

$$W_K(j\omega) = \frac{1000(j\omega+1)}{j\omega((j\omega)^2+8j\omega+100)}$$

$$A(\omega) = \frac{1000\sqrt{\omega^2+1}}{\omega\sqrt{(100-\omega^2)^2+64\omega^2}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan \omega - \arctan \frac{8\omega}{100-\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{1000(-\omega^2+92)}{(100-\omega^2)^2+64\omega^2} \quad Q(\omega) = -\frac{1000(100+7\omega^2)}{\omega[(100-\omega^2)^2+64\omega^2]}$$

$\omega \rightarrow 0$ 时, $A(0) = \infty$, $\varphi(0) = -90^\circ$ 。

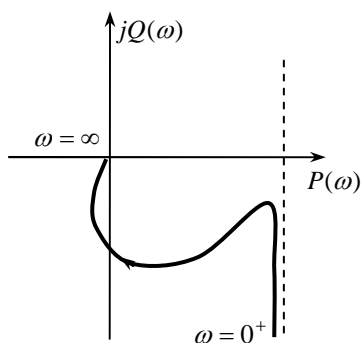
$\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -180^\circ$ 。

由 $P(\omega)$ 、 $Q(\omega)$ 知, 曲线与实轴无交点。

与虚轴交点: 令 $P(\omega) = 0$, 得 $-\omega^2 + 92 = 0$, $\omega = 9.6$ 。

则 $Q(\omega)|_{\omega=9.6} = -13j$

开环幅相频率特性曲线。

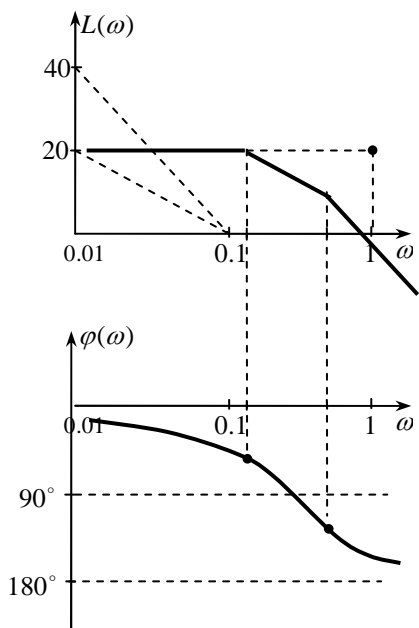


题 5-3 (4) 系统幅相频率特性曲线

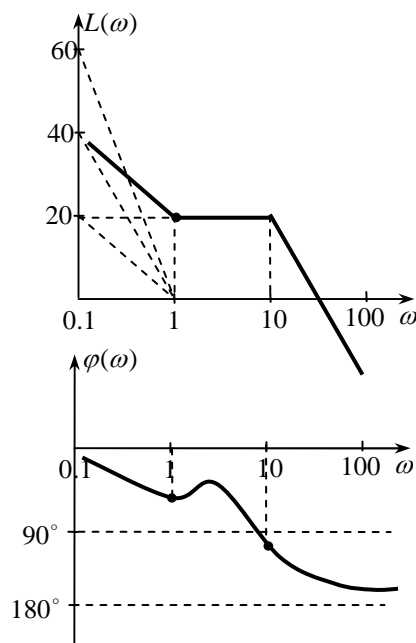
开环对数频率特性曲线: $W_K(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s^2+8s+100)} = \frac{10(s+1)}{s(0.01s^2+0.08s+1)}$

5-5 解: 当 $\tau > T$ 时, 开环幅相频率特性如图, 系统为 II 型系统, 需要添加增补线, 在 $\omega = 0^+$ 处, 以半径为 ∞ , 逆时针绕 180° 的圆弧。由图知, 当 ω 由 0 变化到 ∞ 时, 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 则 $N = 0$; 由原题知, 系统为最小相位系统, $P = 0$ 。根据奈奎斯特稳定判据知, $Z = P - 2N = 0$ 。有闭环系统稳定, s 右半平面没有闭环极点。

当 $\tau > T$ 时, 开环幅相频率特性如图, 添加增补线如图, 由图知, 当 ω 由 0 变化到 ∞ 时, 曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点 1 圈, 则 $N = -1$; 由原题知, 系统为最小相位系统, $P = 0$ 。根据奈奎斯特稳定判据知, $Z = P - 2N = 2$ 。有闭环系统不稳定, s 右半平面有 2 个闭环极点。



题 5-3 (3) 系统对数频率特性曲线



题 5-3 (4) 系统对数频率特性曲线

5-6 解:

(1)由开环传递函数知,在 s 右半平面有一个开环极点,系统为非最小相位系统, $P = 1$ 。

系统开环频率特性为

$$W_k(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega-1)(0.2j\omega+1)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

其中, $A(\omega) = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{(0.2\omega)^2+1}}$, $\varphi(\omega) = -90^\circ - 180^\circ + \arctan \omega - \arctan 0.2\omega$

或可以表示为代数形式 $W_k(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

其中, $P(\omega) = -\frac{8}{(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$, $Q(\omega) = \frac{10(1+0.2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$

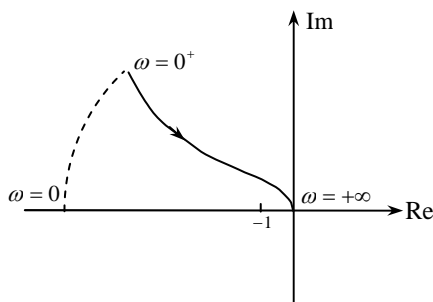
在低频段, $A(0^+) = \infty$, $\varphi(0^+) = -270^\circ$, 低频段的特性由平行于虚轴的渐近线决定, 渐近线与实轴交点为

$$\sigma_x = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} P(\omega) = -8$$

在高频段, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -270^\circ$ 。

开环系统为 1 型系统, 在原点处有一开环极点, 则 1 型系统的幅相频率特性需要增加轨迹, 在 $\omega = 0^+$ 处, 以半径为 ∞ , 逆时针绕 90° 的圆弧。即 $A(0) = \infty$, $\varphi(0) = -180^\circ$

完整的开环幅相频率特性绘于图。



题 5-6 (1) 系统的幅相特性

由图知，当 ω 从 0 变化到 ∞ 时，开环幅相频率特性顺时针包围 $(-1, j0)$ 点半圈， $N = -\frac{1}{2}$ ，则 $Z = P - 2N = 2$ ，闭环系统不稳定。

(2) 由开环传递函数知，在 s 右半平面有一个开环极点，系统为非最小相位系统， $P = 1$ 。
系统开环频率特性为

$$W_k(j\omega) = \frac{100(0.01j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{其中， } A(\omega) = \frac{100\sqrt{(0.01\omega)^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -270^\circ + \arctan \omega + \arctan 0.01\omega$$

或可以表示为代数形式

$$W_k(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$\text{其中， } P(\omega) = -\frac{101}{1 + \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{100(1 - 0.01\omega^2)}{\omega(1 + \omega^2)}$$

在低频段， $A(0^+) = \infty$ ， $\varphi(0^+) = -270^\circ$ ，低频段的特性由平行于虚轴的渐近线决定，渐近线与实轴交点为

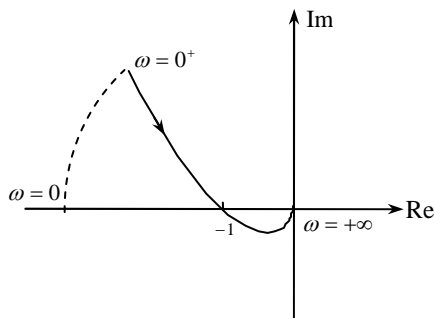
$$\sigma_x = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} P(\omega) = -101$$

在高频段， $A(\infty) = 0$ ， $\varphi(\infty) = -90^\circ$ 。

开环系统为 1 型系统，在原点处有一开环极点，则 1 型系统的幅相频率特性需要增加轨迹，在 $\omega = 0^+$ 处，以半径为 ∞ ，逆时针绕 90° 的圆弧。即 $A(0) = \infty$ ， $\varphi(0) = -180^\circ$

开环幅相频率特性与负实轴交点，令 $Q(\omega) = 0$ ，得 $\omega = 10$ ，则 $P(\omega)|_{\omega=10} = -1$ 。

完整的开环幅相频率特性绘于图。



题 5-6 (2) 系统的幅相特性

由图 知, 当 ω 从 0 变化到 ∞ 时, 开环幅相频率特性曲线与 $(-1, j0)$ 点相交, 则闭环系统临界稳定。

5-7 解:

奈氏稳定判据: 当 ω 从 0 变化到 ∞ 时, 设开环幅相频率特性曲线逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点的圈数为 N ; 开环系统在 s 右半平面的极点个数为 P ; 闭环系统在 s 右半平面的极点个数为 Z 。有 $Z = P - 2N$, 当 $Z = 0$ 时, 闭环系统稳定。 $N = P/2$ 。

- (a) $P = 1, N = \frac{1}{2}, Z = P - 2N = 0$, 闭环系统稳定。
- (b) $P = 0, N = -1, Z = P - 2N = 2$, 闭环系统不稳定。
- (c) 增加增补线后, $P = 0, N = -1, Z = P - 2N = 2$, 闭环系统不稳定。
- (d) 增加增补线后, $P = 0, N = -1, Z = P - 2N = 2$, 闭环系统不稳定。
- (e) 增加增补线后, $P = 1, N = -\frac{1}{2}, Z = P - 2N = 2$, 闭环系统不稳定。
- (f) $P = 1, N = 0, Z = P - 2N = 1$, 闭环系统不稳定。
- (g) 增加增补线后, $P = 0, N = 0, Z = P - 2N = 0$, 闭环系统稳定。
- (h) 增加增补线后, $P = 0, N = 0, Z = P - 2N = 0$, 闭环系统稳定。
- (i) 增加增补线后, $P = 0, N = 0, Z = P - 2N = 0$, 闭环系统稳定。

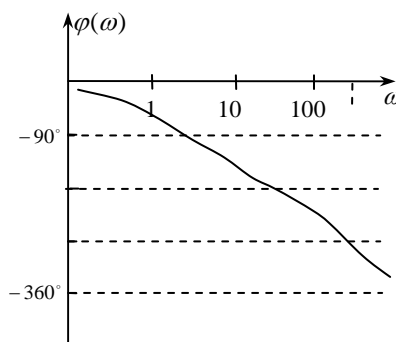
5-8 解:

(a) 由图,

$$W_K(s) = \frac{K_k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)^2}$$

式中, $T_1 = 1; T_2 = \frac{1}{10} = 0.1; T_3 = \frac{1}{300}$ 。

由 $20 \lg K_k = 60$; 得 $K_k = 1000$ 。所以



$$W_K(s) = \frac{1000}{(s+1)(0.1s+1)\left(\frac{1}{300}s+1\right)^2}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \arctan \omega + \arctan 0.1\omega + \arctan \frac{1}{300}\omega$$

相应的对数相频特性曲线如图

(b) 由图得

$$W_K(s) = \frac{K_k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

式中, $T_2 = 0.01$ 。

由低频渐近线延长线与 0 分贝线交于 $\omega = 100$, 所以 $K_k = 100$

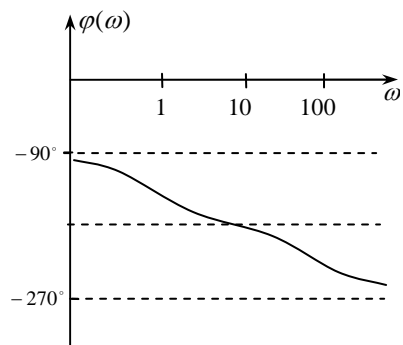
由图 $\omega_c = 10$, $A(\omega_c) = 1$

$$A(\omega_c) = \frac{100}{\omega_c \sqrt{1+(T_1\omega_c)^2} \sqrt{1+(0.01\omega_c)^2}} \Big|_{\omega_c=10} = 1$$

得 $T_1 = 1$

得开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{100}{s(1+s)(1+0.01s)}$$



相频特性: $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega - \arctan 0.01\omega$

对数相频特性曲线如图:

(c) 由图得

$$W_K(s) = \frac{K_k s}{1+T_1 s}$$

式中, $T_1 = 0.01$ 。

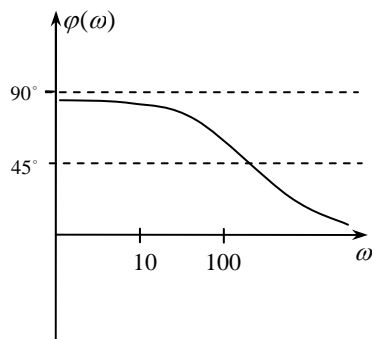
系统幅值穿越频率 $\omega_c = 10$, $A(\omega_c) = 1$

$$A(\omega_c) = \frac{K_k \omega_c}{\sqrt{1+(0.01\omega_c)^2}} \Big|_{\omega_c=10} = 1$$

得 $K_k = 0.1$

得开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{0.1s}{1+0.01s}$$



相频特性：
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan 0.01\omega$$

对数相频特性曲线如图：

(d) 由图得

$$W_K(s) = \frac{K_k s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)^2}$$

系统低频幅值穿越频率 $\omega_c = 0.5$ ， $A(0.5) = 1$

$$A(\omega_c) = \frac{K_k \omega_c}{\sqrt{1 + (T_1 \omega_c)^2} (1 + (T_2 \omega_c)^2)} \Big|_{\omega_c=0.5} = 1 \Rightarrow A(\omega_c) = \frac{K_k \omega_c}{1} \Big|_{\omega_c=0.5} = 1$$

得 $K_k = 2$ ；

系统高频幅值穿越频率 $\omega_c = 16$ ， $A(16) = 1$

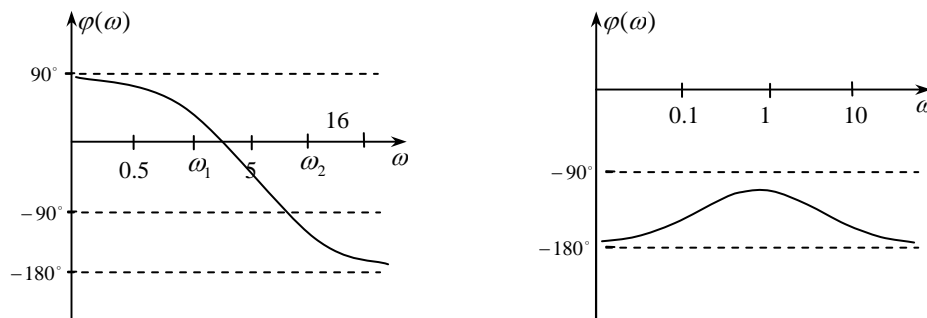
$$A(\omega_c) = \frac{K_k \omega_c}{\sqrt{1 + (T_1 \omega_c)^2} (1 + (T_2 \omega_c)^2)} \Big|_{\omega_c=16} = 1 \Rightarrow A(\omega_c) = \frac{K_k}{T_1 \cdot (T_2 \omega_c)^2} \Big|_{\omega_c=16} = 1$$

得 $\omega_1 \omega_2^2 = 128$ ；

由 $20 \lg A(\omega_1) = 12 \text{ dB}$ ，根据相似三角形，

$$\frac{12}{\lg \omega_1 - \lg 0.5} = 20 \quad \text{得 } \omega_1 = 2 \quad \text{联立上式， } \omega_2 = 8$$

所以传递函数为
$$W_K(s) = \frac{2s}{(1 + 0.5s)(1 + 0.125s)^2}$$



(e) 由图得

$$W_K(s) = \frac{K_k (1 + T_1 s)}{s(1 + T_2 s)}$$

式中， $T_1 = 10$ ， $T_2 = 1$ 。

系统幅值穿越频率 $\omega_c = 1$ ， $A(\omega_c) = 1$

$$A(\omega_c) = \frac{K_k \sqrt{1 + (10\omega_c)^2}}{\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2}} \Big|_{\omega_c=1} = 1$$

得 $K_k = 0.414$

得开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{0.414(1 + 10s)}{s(1 + s)}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctan 0.1\omega - \arctan \omega$$

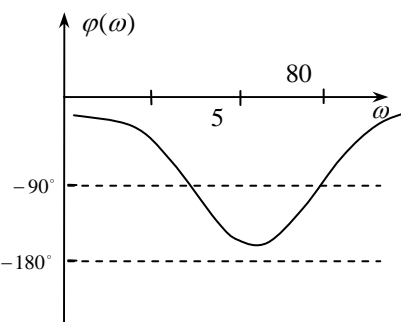
对数相频特性曲线如图:

(f) 由图得

$$W_K(s) = \frac{K_k (T_2^2 s^2 + 2\zeta_2 T_2 s + 1)}{T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 s + 1}$$

式中 $T_1 = 0.2$, $T_2 = \frac{1}{80} = 0.0125$, $\zeta_1 = 0.2$, $\zeta_2 = 0.1$ 。

且 $20 \lg A(5) = 20$, $A(5) = 10$ 。



$$A(5) = \frac{K_k \sqrt{(1 - 0.000156\omega^2)^2 + (0.0025\omega)^2}}{\sqrt{(1 - 0.04\omega^2)^2 + (0.08\omega)^2}} \Big|_{\omega=5} = 10$$

得 $K_k = 4$

得开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{4(0.000156s^2 + 0.0025s + 1)}{0.04s^2 + 0.08s + 1}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{0.0025\omega}{1 - 0.000156\omega^2} - \arctan \frac{0.08\omega}{1 - 0.04\omega^2}$$

对数相频特性曲线如图:

5-9 解: (1) $W_K(s) = \frac{2}{s(2s+1)(8s+1)}$

对数幅频特性:

低频段延长线过点

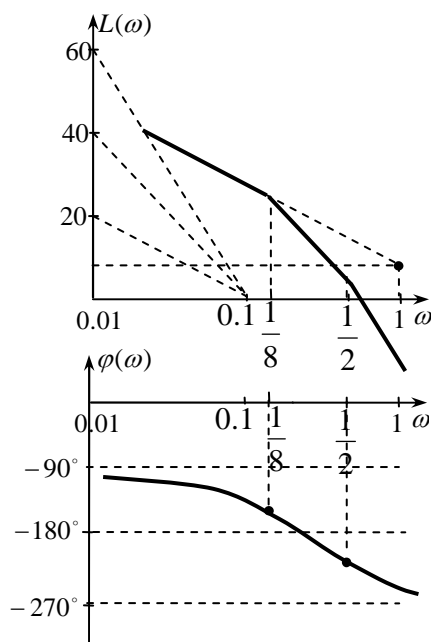
$$L(\omega = 1) = 20 \lg 2 = 6.02,$$

交接频率 $\omega_1 = 0.125$, $\omega_2 = 0.125$

对数相频特性:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 2\omega - \arctan 8\omega$$

对数相频特性的绘制: 由相频特性的表达式, 确定几个特殊点。可描述系统的相频特性曲线。



ω	0	0.125	0.5	∞
$\varphi(\omega)$	-90°	-149°	-211°	-270°

题 5-9 (1) 系统对数频率特性曲线

相位裕量:

$$\text{令 } A(\omega_c) = 1, A(\omega_c) = \frac{2}{\omega_c \sqrt{4\omega_c^2 + 1} \sqrt{64\omega_c^2 + 1}} = 1, \text{ 解得 } \omega_c = 2$$

$$\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 2\omega_c - \arctan 8\omega_c = -252.4^\circ$$

$$\text{相位裕量为 } \gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = -72.4^\circ$$

增益裕量:

$$\text{令 } \varphi(\omega_j) = -180^\circ, \varphi(\omega_j) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 2\omega_j - \arctan 8\omega_j = -180^\circ, \text{ 解得 } \omega_j = 0.25$$

$$\text{则增益裕量 } GM = 20 \lg \frac{1}{A(\omega_j)} = 20 \lg \frac{5}{16} = -10 \text{ dB}.$$

稳定性判断: 由于 $\gamma(\omega_c) < 0^\circ$, $GM < 0 \text{ dB}$ 。所以闭环系统不稳定。

5-10 解: 频率特性 $W_K(j\omega) = \frac{aj\omega + 1}{-\omega^2}$

$$\therefore \varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan a\omega$$

$$\text{相位裕量: } \gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = \arctan a\omega_c = 45^\circ$$

$$\text{得 } a\omega_c = 1$$

$$\text{令 } A(\omega_c) = 1, A(\omega_c) = \frac{\sqrt{(a\omega_c)^2 + 1}}{\omega_c^2} = 1, \text{ 将上式代入得 } \omega_c = 1.19$$

$$a = \frac{1}{\omega_c} = 0.84。$$

5-11 解：绘制开环幅相频率特性曲线如图

$$W_K(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j3\omega+1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{(3\omega)^2+1}}, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 3\omega$$

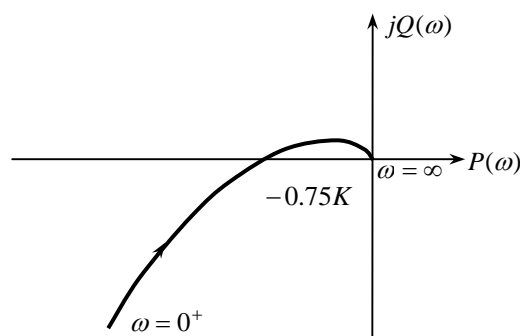
$$P(\omega) = \frac{-4K}{(1+\omega^2)(1+9\omega^2)}, \quad Q(\omega) = \frac{K(1-3\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+9\omega^2)}$$

$\omega \rightarrow 0$ 时, $A(0) = \infty$, $\varphi(0) = -90^\circ$ 。

$\omega \rightarrow \infty$ 时, $A(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -(n-m) \times 90^\circ = -270^\circ$ 。

则开环幅相频率特性曲线将穿越负实轴以 -270° 终止于原点。曲线与负实轴交点为

$$\text{令 } Q(\omega) = 0 \text{ 得 } \omega = 0.58, \quad P(\omega)|_{\omega=0.58} = -0.75K$$



题 5-11 系统幅相频率特性曲线

当 $-0.75K > -1$, 即 $K < 1.33$ 时, 开环幅相频率特性曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 即闭环系统稳定。

5-13 已知系统开环传递函数为 $W_K(s) = \frac{7}{s(0.087s+1)}$, 试用频率指标与时域指标的关系确定系统超调量和调节时间。

$$\text{解：频率特性： } W_K(j\omega) = \frac{7}{j\omega(0.087j\omega+1)}$$

$$\text{令 } A(\omega_c) = 1, \quad A(\omega_c) = \frac{7}{\omega_c \sqrt{(0.087\omega_c)^2 + 1}} = 1, \quad \text{得 } \omega_c = 6.2$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.087\omega$$

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan 0.087\omega_c = 61.8^\circ$$

根据频率指标与时域指标的关系

$$\gamma(\omega_c) = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}, \text{ 得 } \zeta = 0.76$$

$$\delta\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 2.5\%$$

$$t_s\omega_c = \frac{6}{\tan \gamma(\omega_c)}, \text{ 得 } t_s = 0.52 \text{ s}$$

5-14 解: 由图 P5-4, 可得系统 $M_p = 1.6$, $\omega_p = 3$ 。

根据题意, 设系统为典型二阶系统, $W_B(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\therefore M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.6 \quad \text{得 } \zeta_1 = 0.94, \zeta_2 = 0.33$$

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 3 \quad \text{为保证 } \sqrt{1-2\zeta^2} \text{ 为实数, 取 } \zeta_2 = 0.33, \text{ 且解得}$$

$$\omega_n = 3.39。$$

$$\text{有 } W_B(s) = \frac{K}{s^2 + 2.24s + 11.49}, \quad W_K(s) = \frac{W_B(s)}{1 - W_B(s)} = \frac{K}{s^2 + 2.24s + 11.49 - K}$$

由图知, 开环幅频特性 $A(0) = 4$, $A(0) = \frac{K}{11.48 - K} = 4$, 得 $K = 9.18$ 。

第 6 章 习题答案

6-1 设一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

若使系统的稳态误差系数 $k_v = 20 \text{ s}^{-1}$ ，相位裕量不小于 50° ，增益裕量不小于 10dB ，试确定系统的串联校正装置。

解：（1）开环传递函数化标准形式为 $W_K(s) = \frac{2K}{s(\frac{1}{2}s+1)}$ ，根据稳态误差要求，

$K_k = 2K = K_v = 20$ ，所以 $K = 10$ ， $W_K(s) = \frac{20}{s(\frac{1}{2}s+1)}$ ，绘制满足稳态误差要求的原系统

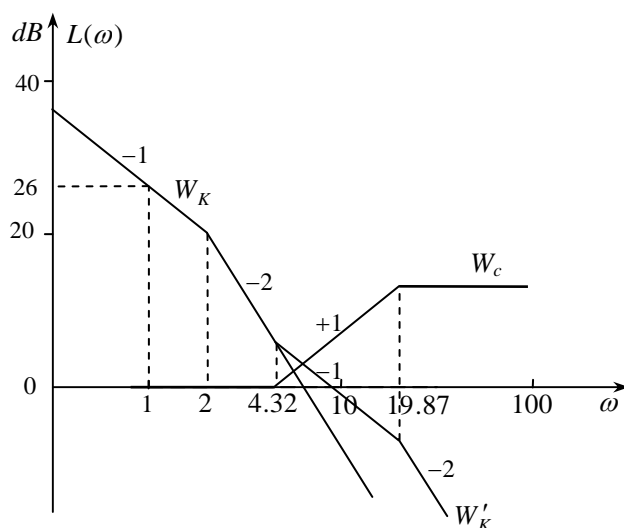


图 6-1 习题 6-1 的对数幅频特性

对数幅频特性如图 6-1 所示。

根据 $A(\omega_c) = \frac{20}{\omega_c \sqrt{(\frac{\omega_c}{2})^2 + 1}} \approx \frac{20}{\omega_c \frac{\omega_c}{2}} = 1$ ，得 $\omega_c = 6.32$ ，相位裕量为

$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2})_{\omega_c=6.32} = 17.56^\circ$ 。可采用串联超前校

正，其校正装置传递函数为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_1} + 1}{\frac{s}{\omega_2} + 1}$ 。校正后 $W'_K(s) = \frac{20}{s} \frac{\frac{s}{\omega_1} + 1}{\frac{s}{\omega_2} + 1}$ 。

(2) 所需引前校正装置的最大引前角: $\varphi_{\max} \geq 50^\circ - 17.56^\circ = 32.44^\circ$, 增加一定裕量, 取 $\varphi_{\max} = 40^\circ$ 。

(3) 计算两个交接频率的比 β 。根据 $\varphi_{\max} = \arcsin \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = 40^\circ$, 得 $\beta = 4.60$

(4) 使校正后的穿越频率与校正装置产生最大相角位移的频率重合在一点, 即满足

$$\omega'_c = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_1 \sqrt{4.6} \quad (*)$$

又校正后系统应在 ω'_c 过 0 分贝线, 即满足

$$A(\omega'_c) \approx \frac{20 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{2}} = 1 \quad (**)$$

解得: $\omega_1 = 4.32$, $\omega'_c = 9.26$, $\omega_2 = \beta \omega_1 = 19.87$ 。

(5) 验证指标。校正后 $W'_K(s) = \frac{20}{s(\frac{s}{2} + 1)} \frac{\frac{s}{4.32} + 1}{\frac{s}{19.87} + 1}$, 相位裕量为

$$\begin{aligned} \gamma(\omega'_c) &= 180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega'_c}{2} + \arctan \frac{\omega'_c}{4.32} - \arctan \frac{\omega'_c}{19.87}) \Big|_{\omega'_c=9.26} \\ &= 52.19^\circ \end{aligned}$$

因为当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(\infty) \rightarrow -180^\circ$, 所以增益裕量 $GM \rightarrow \infty$ dB。所以, 满足要求。

(6) 最后得校正装置传递函数为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{4.32} + 1}{\frac{s}{19.87} + 1}$ 。

6-2 设一单位反馈系统, 其开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K}{s^2(0.2s+1)}$$

求系统的稳态加速度误差系数 $K_a = 10 \text{ s}^{-2}$ 和相位裕量不小于 35° 时的串联校正装置。

解: (1) $K = K_a = 10$, 所以校正前, $W_K(s) = \frac{10}{s^2(0.2s+1)}$, 画对数幅频特性如图 6-2

所示。 $\omega_c = \sqrt{10} = 3.16$, $\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-180^\circ - \arctan \frac{3.16}{5}) = -32.31^\circ$, 原系统不稳定。现采

用引前校正。考虑原系统在交接频率 5 处斜率更负, 所以要采用两级引前校正装置, 其传递

函数为 $W_c(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_1} + 1)(\frac{s}{\omega_2} + 1)}{(\frac{s}{\omega_3} + 1)^2}$ ，其中， $\omega_2 = 5$ ，另外 ω_1 和 ω_3 需要确定。

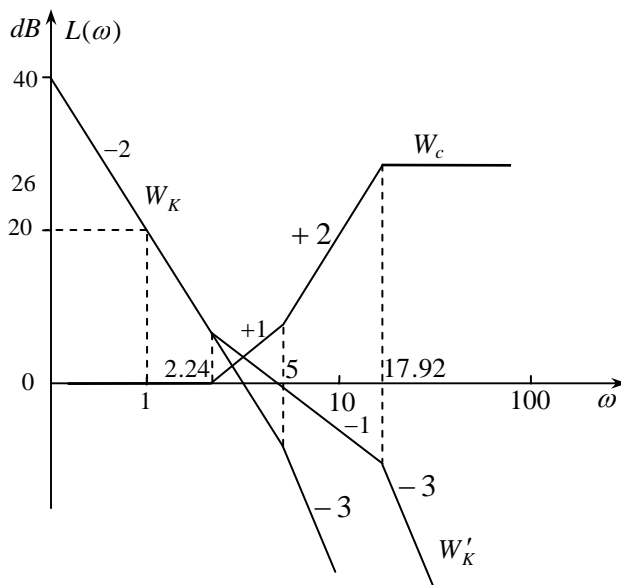


图 6-2 习题 6-2 的对数幅频特性

(2) 校正后为 -2/-1/-3 特性，按相位裕量最大选取参数，且根据要求相位裕量不小于 35° ，查教材图 5-54，选 $n = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 8$ ，列关系式如下

$$\omega'_c = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_1 \omega_3} = 2\omega_1 \quad (*)$$

$$\text{校正后: } A(\omega'_c) \approx \frac{10 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'^2_c} = 1 \quad (**)$$

联立解得： $\omega_1 = 2.24$ ， $\omega'_c = 4.48$ ， $\omega_3 = 8\omega_1 = 17.92$

$$\text{校正后 } W'_K(s) = W_K(s)W_c(s) = \frac{10(\frac{s}{2.24} + 1)}{s^2(\frac{s}{17.92} + 1)^2}$$

(3) 验证相位裕量。

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-180^\circ + \arctan \frac{4.48}{2.24} - 2 \arctan \frac{4.48}{17.92}) = 35.4^\circ, \text{ 满足要求。}$$

(4) 校正装置传递函数为

$$W_c(s) = \frac{(\frac{s}{2.24} + 1)(\frac{s}{5} + 1)}{(\frac{s}{17.92} + 1)^2}$$

6-3 设一单位反馈系统，其开环传递函数为

$$W_k(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

要求具有相位裕量等于 45° 及增益裕量不小于 6dB 的性能指标，试分别采用串联超前校正和串联滞后校正两种方法，确定校正装置。

解：1、采用引前校正

原系统， $K_k = 10$ ， $\omega_1 = 2$ ， $\omega_2 = 5$ ，画对数幅频特性如图 6-3 所示。

$$A(\omega_c) \approx \frac{10}{\omega_c \frac{\omega_c}{2}} = 1, \text{ 得 } \omega'_c = 4.47, \text{ 相位裕量为}$$

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{4.47}{2} - \arctan \frac{4.47}{5}) = -17.7^\circ, \text{ 原系统不稳定。}$$

$$\text{采取两级引前校正: } W_c(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_1} + 1)(\frac{s}{\omega_2} + 1)}{(\frac{s}{\omega_3} + 1)^2}, \text{ 其中, 取 } \omega_2 = 5.$$

$$\text{校正后为: } W'_k(s) = W_k(s)W_c(s) = \frac{10(\frac{s}{\omega_1} + 1)}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{\omega_3} + 1)^2}, \text{ 为 } -1/-2/-1/-3 \text{ 特性。中高频可近}$$

似认为 $-2/-1/-3$ 特性，按取最大相位裕量确定参数，且根据要求相位裕量等于不小于 45° ，查

教材图 5-54，选 $n = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 8$ ，列关系式如下

$$\omega'_c = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_1\omega_3} = 2\omega_1 \quad (*)$$

校正后在 ω'_c 过 0dB 线，有

$$A(\omega'_c) \approx \frac{10 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{2}} = 1 \quad (**)$$

联立解得： $\omega_1 = 3.16$ ， $\omega'_c = 6.32$ ， $\omega_3 = 8\omega_1 = 17.92$ 。

验证指标：校正后相位裕量为

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ + \arctan \frac{6.32}{3.16} - \arctan \frac{6.32}{2} - 2\arctan \frac{6.32}{25.3}) = 53^\circ$$

裕量偏大，可取 $n = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 6$ ，重新计算得： $\omega_1 = 3.4$ ， $\omega'_c = 5.9$ ， $\omega_3 = 6\omega_1 = 20.4$ ，此时，

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ + \arctan \frac{6.32}{3.4} - \arctan \frac{6.32}{2} - 2\arctan \frac{6.32}{20.4}) = 46.5^\circ$$

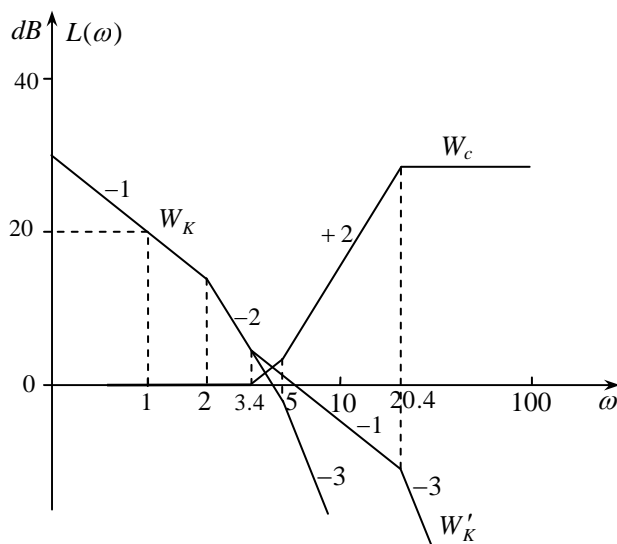


图 6-3 引前校正的对数幅频特性

计算相位穿越频率 ω_j ： $\varphi(\omega_j) = -90^\circ + \arctan \frac{\omega_j}{3.4} - \arctan \frac{\omega_j}{2} - 2\arctan \frac{\omega_j}{20.4} = -180^\circ$ ，

试探解得： $\omega_j \approx 19$ ，则增益裕量为

$$GM = -L(\omega_j) \approx -20 \log \frac{10 \times \frac{19}{3.4}}{19 \times \frac{19}{2}} = 10.2 \text{ dB} > 6 \text{ dB}$$

所以，满足指标要求。校正装置为

$$W_c(s) = \frac{(\frac{s}{3.4} + 1)(\frac{s}{5} + 1)}{(\frac{s}{20.4} + 1)^2}$$

校正前、后及校正装置的对数幅频特性如图 6-3 所示。

2、采用迟后校正：

$$\text{校正装置为 } W_c(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_2} + 1)}{(\frac{s}{\omega_1} + 1)}$$

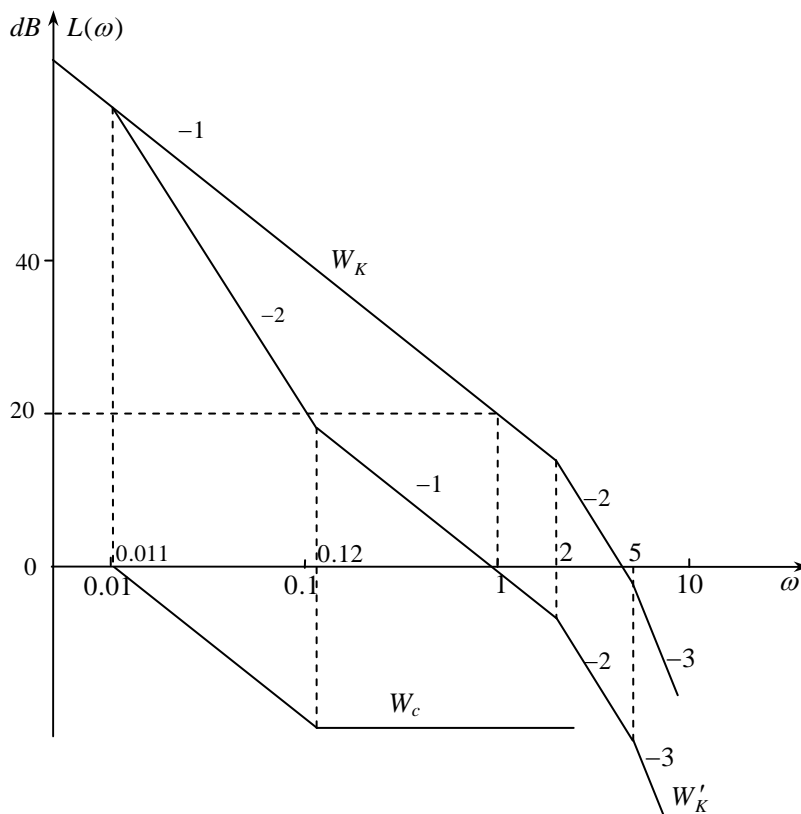


图 6-4 滞后校正的对数幅频特性

考虑增加 10° 裕量，在原系统上找到 $\gamma(\omega_c) = 55^\circ$ 时的频率为校正后的穿越频率 ω'_c ，令

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega'_c}{2} - \arctan \frac{\omega'_c}{5}) = 55^\circ, \text{ 解得: } \omega'_c \approx 0.9$$

在 $\omega'_c \approx 0.9$ 上，原系统幅值为 $20 \log \frac{10}{0.9 \times \sqrt{(\frac{0.9}{2})^2 + 1} \times \sqrt{(\frac{0.9}{5})^2 + 1}} \approx 20.9 \text{ dB}$ ，令

$$20 \log \gamma = 20.9, \text{ 所以, } \gamma = 11.1, \text{ 取 } \omega_2 = \frac{\omega'_c}{7.5} = 0.12, \text{ 则 } \omega_1 = \frac{\omega_2}{\gamma} = 0.011。$$

验证指标:

校正后相位裕量为

$$\begin{aligned} \gamma(\omega'_c) &= 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{0.9}{0.011} + \arctan \frac{0.9}{0.12} - \arctan \frac{0.9}{2} - \arctan \frac{0.9}{5}) \\ &= 48.7^\circ > 45^\circ \end{aligned}$$

校正后相位穿越频率 ω_j :

$$\varphi(\omega_j) = -90^\circ + \arctan \frac{\omega_j}{0.12} - \arctan \frac{\omega_j}{0.011} - \arctan \frac{\omega_j}{2} - \arctan \frac{\omega_j}{5} = -180^\circ$$

得 $\omega_j \approx 3.05$ ，则增益裕量为

$$GM = -L(\omega_j) \approx -20 \log \frac{10 \times \frac{3.05}{0.12}}{3.05 \times \frac{3.05}{0.011} \times \frac{3.05}{2}} = 14.1 \text{dB} > 6 \text{dB}$$

指标满足要求，所以，迟后校正装置为

$$W_c(s) = \frac{(\frac{s}{0.12} + 1)}{(\frac{s}{0.011} + 1)}$$

校正前、后及校正装置的对数幅频特性如图 6-4 所示。

6-4 设单位反馈系统开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{200}{s(0.1s + 1)}$$

试设计一无源校正网络，使校正后系统的相位裕量不小于 45° ，穿越频率不低于 50。

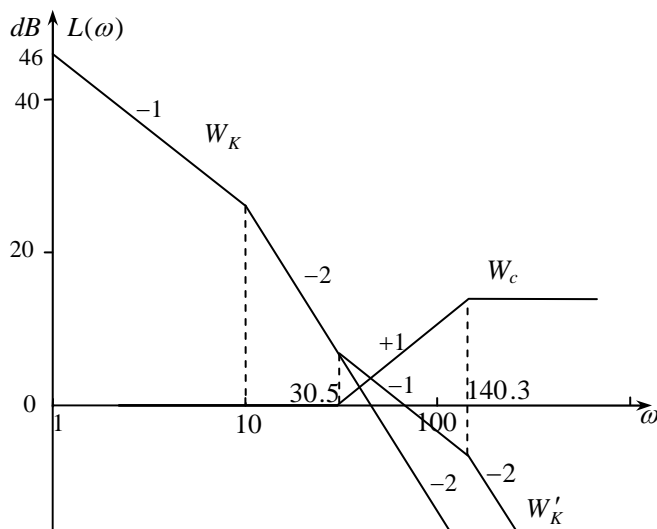


图 6-5 习题 6-4 的对数幅频特性

解：(1) 绘制原系统的对数幅频特性如图 6-5 所示。-2 特性过十分贝线，相位裕量小于 45° 。

根据 $A(\omega_c) \approx \frac{200}{\omega_c \frac{\omega_c}{10}} = 1$ ，解得 $\omega_c = 44.7$ 。相位裕量为

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{44.7}{10}) = 12.6^\circ$$

要求穿越频率不低于 50，所以校正后穿越频率不能再减小，故采用串联引前校正。校正装

置的传递函数形式为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_1} + 1}{\frac{s}{\omega_2} + 1}$ 。校正后 $W'_K(s) = \frac{200}{s(\frac{s}{10} + 1)} \frac{\frac{s}{\omega_1} + 1}{\frac{s}{\omega_2} + 1}$ 。

(2) 所需的最大引前角: $\varphi_{\max} \geq 45^\circ - 12.6^\circ = 32.4^\circ$, 取 $\varphi_{\max} = 40^\circ$ 。计算两个交接频率的比 β 。根据 $\varphi_{\max} = \arcsin \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = 40^\circ$, 得 $\beta = 4.60$ 。

(3) 使校正后的穿越频率与校正装置产生最大相角位移的频率重合在一点, 即满足

$$\omega'_c = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_1 \sqrt{4.6} \quad (*)$$

又校正后系统应在 ω'_c 过 0 分贝线, 即满足

$$A(\omega'_c) \approx \frac{200 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{10}} = 1 \quad (**)$$

解得: $\omega_1 = 30.5$, $\omega'_c = 65.4$, $\omega_2 = \beta \omega_1 = 140.3$ 。

(4) 验证指标。校正后 $W'_K(s) = \frac{200}{s} \frac{\frac{s}{30.5} + 1}{s(\frac{s}{10} + 1) \frac{s}{140.3} + 1}$, 相位裕量为

$$\begin{aligned} \gamma(\omega'_c) &= 180^\circ + \varphi(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega'_c}{10} + \arctan \frac{\omega'_c}{30.5} - \arctan \frac{\omega'_c}{140.3})|_{\omega'_c=65.4} \\ &= 48.7^\circ > 45^\circ \end{aligned}$$

满足要求。

(5) 最后得校正装置传递函数为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{30.5} + 1}{\frac{s}{140.3} + 1}$ 。可用一个 RC 无源网络再串联一个放大器实现。放大器放大系数为 $\beta = 4.60$, RC 无源网络如图 6-6 所示。

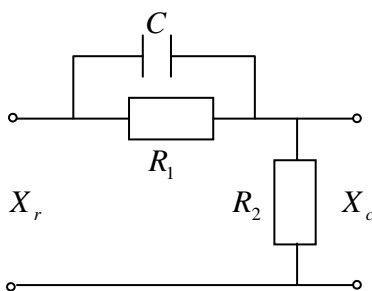


图 6-6 校正装置的实现电路

其传递函数为 $\frac{X_c}{X_r} = \frac{1}{\beta} \frac{Ts + 1}{\frac{T}{\beta}s + 1}$, $T = R_1 C$, $\beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$

先取 $R_2 = 10K\Omega$ ，则 $R_1 = 3.6R_2 = 36K\Omega$ ， $C = \frac{1}{30.5 \times R_1} = 0.91\mu F \approx 1\mu F$ 。

6-5 设系统开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)}$$

现串联比例微分校正装置，使系统速度误差系数 $K_v \geq 200 s^{-1}$ ，相位裕量 $\gamma(\omega'_c) \geq 50^\circ$ ，试确定校正装置的参数。

解：校正前， $K = K_v = 200$ ，绘制校正前对数幅频特性如图 6-7 所示。

根据 $A(\omega_c) \approx \frac{200}{\omega_c \frac{\omega_c}{10}} = 1$ ，解得 $\omega_c = 44.7$ 。相位裕量为

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{44.7}{10}) = 12.6^\circ$$

校正装置传递函数为 $W_c(s) = K_c(1+T_d s)$ ，校正后

$$W_K'(s) = \frac{200K_c(1+T_d s)}{s(0.1s+1)}$$

取 $K_c = 1$ ，设 $\omega_1 = \frac{1}{T_d}$ ，令校正后相位裕量为 52° ，

$$\text{即： } \gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega'_c}{10} + \arctan \frac{\omega'_c}{\omega_1}) = 52^\circ \quad (*)$$

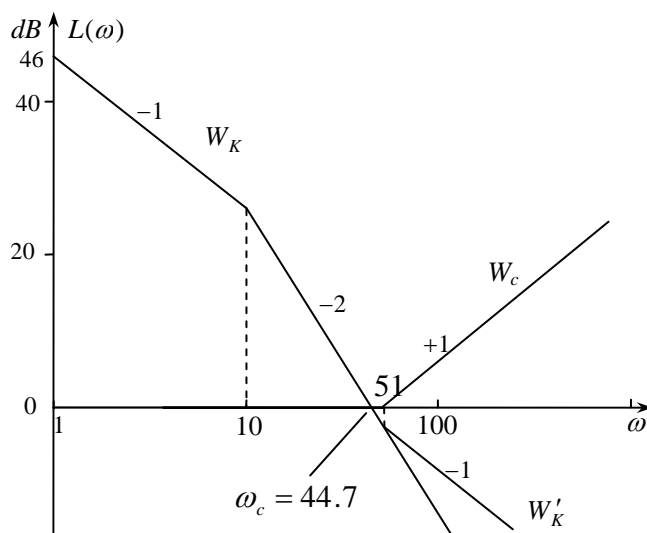


图 6-7 习题 6-5 的对数幅频特性

验证相位裕量为：校正后 $\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{44.7}{10} + \arctan \frac{44.7}{51}) = 53.8^\circ$ ，

满足要求。所以，比例微分校正装置传递函数为 $W_c(s) = 1 + \frac{1}{51}s$ 。

又校正后在 ω'_c 过 0 分贝线，即

$$A(\omega'_c) \approx \frac{200 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{10}} = 1, \quad (\text{假设 } \omega_1 < \omega'_c), \quad \text{得 } \omega'_c = \frac{2000}{\omega_1} \text{ 代入 (*) 式得}$$

$$90^\circ - \arctan \frac{200}{\omega_1} + \arctan \frac{2000}{\omega_1^2} = 52^\circ, \quad \text{试探解得 } \omega_1 = 51, \quad \text{可见, 校正后穿越频率没}$$

有改变, 即 $\omega'_c = \omega_c = 44.7$ 。

6-6 设单位反馈系统开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{7}{s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{6}s+1)}$$

试设计一串联滞后校正装置, 使校正后系统相位裕量为 $40^\circ \pm 2^\circ$, 增益裕量不低于 10dB, 开环放大系数不变, 穿越频率不低于 1。

解: (1) 绘制校正前的对数幅频特性如图 6-8 所示。

根据 $A(\omega_c) \approx \frac{7}{\omega_c \frac{\omega_c}{2}} = 1$, 解得 $\omega_c = 3.74$ 。相位裕量为

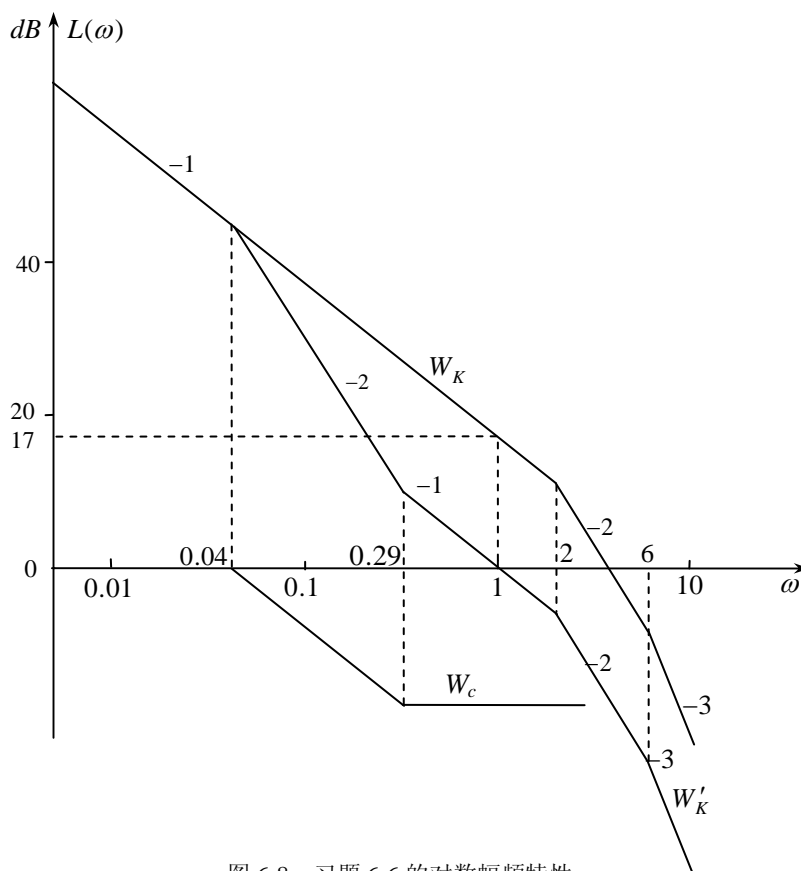


图 6-8 习题 6-6 的对数幅频特性

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{3.74}{2} - \arctan \frac{3.74}{6}) = -3.8^\circ, \quad \text{原系统不稳定。现加入滞后校}$$

正装置，其传递函数为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{\omega_2} + 1}{\frac{s}{\omega_1} + 1}$ 。

(2) 根据要求，穿越频率不低于1，所以就选校正后穿越频率 $\omega'_c = 1$ ，此时原系统的

增益为 $L(\omega = 1) = 20 \log \frac{7}{1 \times \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1} \times \sqrt{(\frac{1}{6})^2 + 1}} \approx 17 \text{ dB}$ ，令

$$20 \log \gamma = 17 \text{ dB}$$

解得： $\gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 7.08$ ，试探取 $\omega_2 = \frac{\omega'_c}{3.5} = \frac{1}{3.5} \approx 0.29$ ，则 $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\gamma} = 0.04$ 。

校正后， $W'_K(s) = \frac{7}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)} \frac{(\frac{s}{0.14} + 1)}{(\frac{s}{0.02} + 1)}$ ，见图 6-8。

(3) 验证指标。校正后相位裕量为

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{6} + \arctan \frac{1}{0.29} - \arctan \frac{1}{0.04}) = 40.09^\circ$$

计算相位穿越频率：

$$\varphi(\omega_j) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega_j}{2} - \arctan \frac{\omega_j}{6} + \arctan \frac{\omega_j}{0.29} - \arctan \frac{\omega_j}{0.04} = -180^\circ$$

解得： $\omega_j = 3.16$ ，则

$$GM = -L(\omega_j) = -20 \log \frac{7 \times \sqrt{(\frac{3.16}{0.29})^2 + 1}}{3.16 \times \sqrt{(\frac{3.16}{2})^2 + 1} \times \sqrt{(\frac{3.16}{6})^2 + 1} \times \sqrt{(\frac{3.16}{0.04})^2 + 1}} = 54.82 \text{ dB}$$

指标满足要求。

(4) 校正装置传递函数为 $W_c(s) = \frac{\frac{s}{0.29} + 1}{\frac{s}{0.04} + 1}$ 。见图 6-8。

6-7 设单位反馈系统开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{126}{s(\frac{1}{10}s + 1)(\frac{1}{60}s + 1)}$$

要求设计一串联校正装置，使系统满足：

- (1) 输入为单位斜坡函数时, 稳态速度误差不大于 $1/126 s^{-1}$;
 (2) 相位裕量不小于 30° , 穿越频率大于 20。

解: (1) 输入为单位斜坡函数时, 稳态速度误差为 $\frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_k} = \frac{1}{126}$, 刚好满足要求。

绘制校正前的对数幅频特性如图 6-9 所示。

根据 $A(\omega_c) \approx \frac{126}{\omega_c \frac{\omega_c}{10}} = 1$, 解得 $\omega_c = 35.5$ 。相位裕量为

$$\gamma(\omega_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{35.5}{10} - \arctan \frac{35.5}{60}) = -14.9^\circ$$

原系统不稳定。

- (2) 根据穿越频率大于 20 的要求, 采用引前校正, 并用两级引前, 其传递函数为

$$W_c(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_1} + 1)(\frac{s}{\omega_2} + 1)}{(\frac{s}{\omega_3} + 1)^2}。其中, 取 \omega_2 = 60。校正后:$$

$$W'_k(s) = \frac{126(\frac{s}{\omega_1} + 1)}{s(\frac{1}{10}s + 1)(\frac{s}{\omega_3} + 1)^2}$$

确定参数如下:

中频段近似认为 -2/-1/-3 特性, 按最大相位裕量选择参数, 根据相位裕量大于 30° 要求,

查教材图 5-54, 得 $n = \frac{\omega_3}{\omega_1} = 5$,

$$\omega'_c = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_1\omega_2} = \omega_1\sqrt{2.5} \quad (*)$$

$$\text{校正后, } A(\omega'_c) \approx \frac{126 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{10}} = 1 \quad (**)$$

联立上二式得: $\omega_1 = 28.2$, $\omega'_c = 44.6$, $\omega_3 = n\omega_1 = 141$

校正后, $W'_k(s) = \frac{126(\frac{s}{28.2} + 1)}{s(\frac{1}{10}s + 1)(\frac{s}{141} + 1)^2}$, 见图 6-9。

- (3) 验证指标。

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{44.6}{10} - 2\arctan \frac{44.6}{141} + \arctan \frac{44.6}{28.2}) = 35.2^\circ > 30^\circ$$

$$\omega'_c = 44.6 > 20$$

满足要求。

$$(4) W_c(s) = \frac{(\frac{s}{28.2} + 1)(\frac{s}{60} + 1)}{(\frac{s}{141} + 1)^2}, \text{ 见图 6-9.}$$

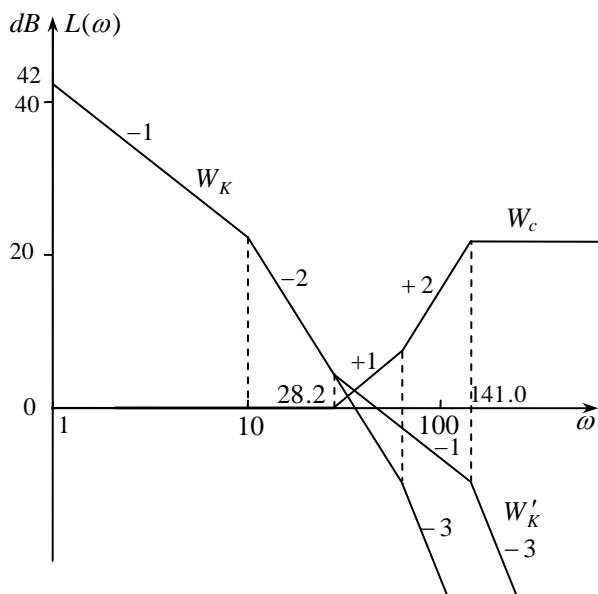


图 6-9 习题 6-7 的对数幅频特性

6-8 解：（1）原系统开环传递函数为

$$W_K(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{s(T_0 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{0.03 K_1}{s(\frac{s}{71.4} + 1)(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)}$$

根据速度误差要求， $K_1 = 5000$ ，所以

$$W_K(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s) = \frac{150}{s(\frac{s}{71.4} + 1)(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)}$$

$20\log 150 = 43.5 \text{ dB}$ ，绘制其对数幅频特性如图 6-10 所示。

$$A(\omega_c) \approx \frac{150}{\omega_c \frac{\omega_c}{10}} = 1, \quad \omega_c = 38.7$$

（2）确定校正后的期望特性。

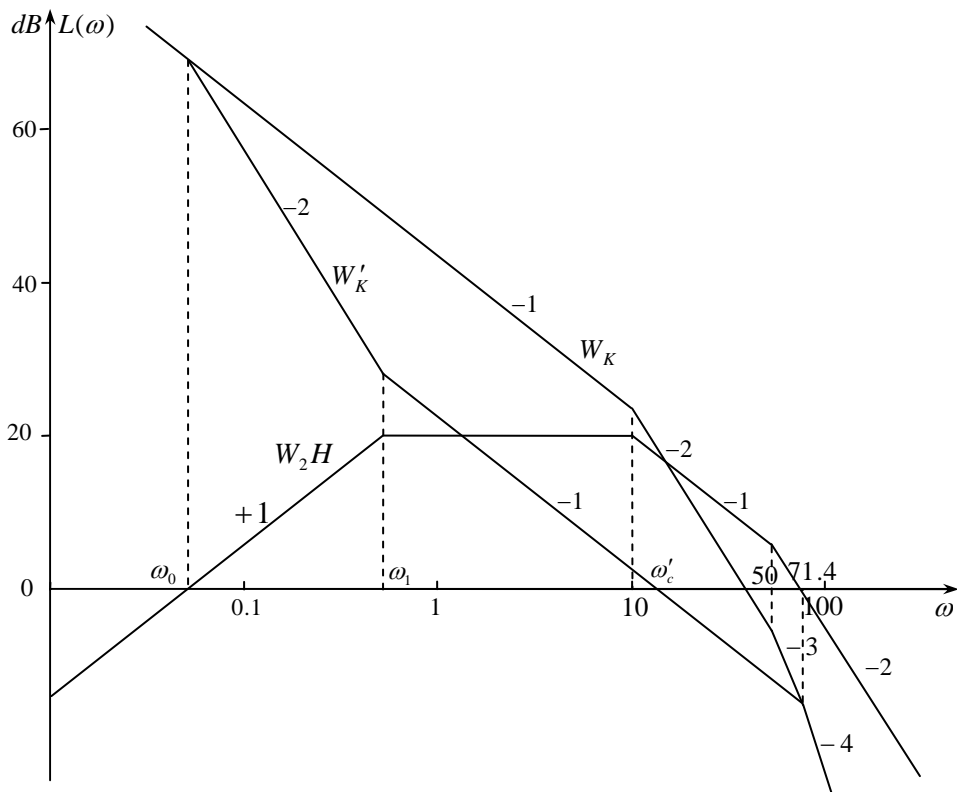


图 6-10 习题 6-8 的对数幅频特性

校正后应以-1 特性 0 分贝线，且终止于原系统的交接频率 71.4。校正后开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{150\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{\omega_0} + 1\right)\left(\frac{s}{71.4} + 1\right)^3}$$

其对数幅频特性如图 6-10 所示。

(3) 确定校正后的参数 $\omega_0, \omega_1, \omega'_c$ 。

先确定 ω'_c ：在高频段，校正前后特性应在交接频率 71.4 处相交，即幅值相等。

$$\text{校正前: } L(\omega) \approx 20 \log \frac{150}{\omega \frac{\omega}{10} \frac{\omega}{50}} \Big|_{\omega=71.4} = -13.7 \text{ dB}$$

根据校正后-1 特性斜率可写出： $-20(\log 71.4 - \log \omega'_c) = -13.7 \text{ dB}$ ，所以， $\omega'_c \approx 15$ 。

校正后，有

$$A(\omega'_c) \approx \frac{150 \frac{\omega'_c}{\omega_1}}{\omega'_c \frac{\omega'_c}{\omega_0}} = 1$$

得： $\omega_1 = 10\omega_0$ (*)

根据相位裕量大于 50° 要求, 考虑一定裕量, 校正后

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{\omega'_c}{\omega_0} + \arctan \frac{\omega'_c}{\omega_1} - 3 \arctan \frac{\omega'_c}{71.4}) = 52^\circ, \text{ 即}$$

$$15(\omega_0 - \omega_1) = -0.04(\omega_1 \omega_0 + 225) \quad (**)$$

联立上二式解得: $\omega_0 = 0.05$, $\omega_1 = 0.5$

校正后开环传递函数为

$$W'_K(s) = \frac{150(\frac{s}{0.5} + 1)}{s(\frac{s}{0.05} + 1)(\frac{s}{71.4} + 1)^3}$$

(4) 验证指标。穿越频率 $\omega'_c = 15 > 12$, 相位裕量为

$$\gamma(\omega'_c) = 180^\circ + (-90^\circ - \arctan \frac{15}{0.05} + \arctan \frac{15}{0.5} - 3 \arctan \frac{15}{71.4}) = 52.7^\circ$$

满足要求。

(5) 求 W_2H 特性。

在 $\omega_0 < \omega < 71.4$ 时, 校正前后特性不同, 反馈在起作用, $20 \log |W_2H| > 0 \text{dB}$, 采用

近似分析法, 有关系式: $W'_K(s) \approx \frac{W_K(s)}{W_2(s)H(s)}$, 从图上, 由校正前的特性减去校正后的特

性即得 W_2H 特性, 如图 6-10 所示。

在 $\omega < \omega_0$ 时, $20 \log |W_2H| < 0 \text{dB}$, 故 +1 特性延伸即可。

在 $\omega > 71.4$ 时, $20 \log |W_2H| < 0 \text{dB}$, 为简单起见, -2 特性延伸即可。

则 $W_2(s)H(s) = \frac{Ks}{(\frac{s}{0.5} + 1)(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)}$, 低频段, $\omega = \omega_0 = 0.05$ 时, 过 0 分贝线,

即: $A(\omega) \approx K\omega_{\omega=0.05} = 1$, 所以, $K = 20$ 。

所以, $W_2(s)H(s) = \frac{20s}{(\frac{s}{0.5} + 1)(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)}$

当 $\omega'_c = 15$ 时, $20 \log |W_2H| \approx 20 \log \frac{20 \times 15}{\frac{15}{0.5} \frac{15}{10}} = 16.5 \text{dB}$, 近似分析误差允许。

(6) 检验小闭环的稳定性。

$$\gamma(\omega_c = 71.4) = 180^\circ + (90^\circ - \arctan \frac{71.4}{0.5} - \arctan \frac{71.4}{10} - \arctan \frac{71.4}{50}) = 106.4^\circ$$

小闭环稳定。

(7) 确定 $H(s)$ 。

$$\text{由 } W_2(s) = \frac{12}{(0.1s+1)(0.02+1)}, \text{ 得}$$

$$H(s) = \frac{1.67s}{\frac{s}{0.5} + 1}$$

6-9 解：(1) 画原系统对数幅频特性如图 6-11 所示。交接频率为 333.33， $20\log K = 20\log 40 = 32\text{dB}$ 。

(2) 校正后为三阶工程最佳系统，其开环传递函数为

$$W_K(s) = W_c(s)W_o(s) = \frac{K(\frac{s}{\omega_1} + 1)}{s^2(\frac{s}{\omega_2} + 1)}$$

且需满足： $\omega_c = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ ， $n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 4$ 。为使校正装置简单， ω_2 取原系统的交接频率，即

$$\omega_2 = \frac{1}{0.003} \approx 333.33, \text{ 则 } \omega_1 = \frac{\omega_2}{4} = 83.33, \text{ 则 } \omega_c = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 166.66, K \text{ 计算如下:}$$

$$A(\omega_c) \approx \frac{K \frac{\omega_c}{\omega_1}}{\omega_c^2} = 1, \text{ 得 } K = 13887.78, \text{ 所以校正后开环传递函数为}$$

$$W_K(s) = \frac{13887.78(\frac{s}{83.33} + 1)}{s^2(\frac{s}{333.33} + 1)}$$

如图 6-11 所示。

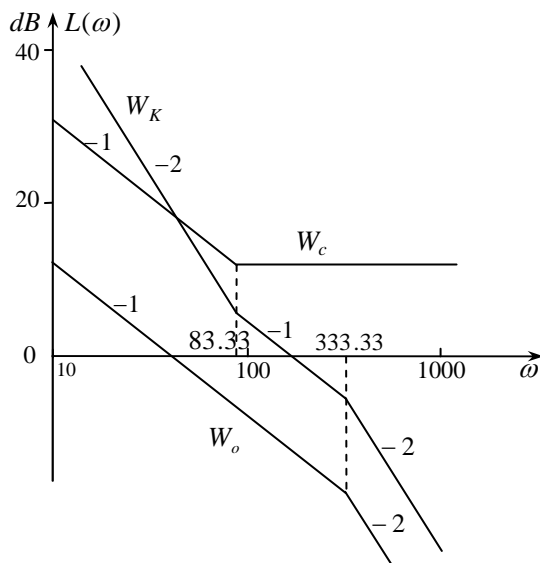


图 6-11 习题 6-9 的对数幅频特性

(3) 对比校正前后, 如需串联比例积分校正装置, 其传递函数为

$$W_c(s) = \frac{W_K(s)}{W_o(s)} = \frac{347.19(1 + \frac{s}{83.33})}{s}$$

如图 6-11 所示。

6-10 解: (1) 由结构图可写出输出对扰动量的传递函数为

$$\frac{X_c(s)}{N(s)} = \frac{1 + W_1(s)W_2(s)W_c(s) + W_n(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_c(s) + W_1(s)W_2(s)},$$

要使系统输出量完全不受扰动 $n(t)$ 影响, 必须: $1 + W_1(s)W_2(s)W_c(s) + W_n(s)W_2(s) = 0$,

$$\text{所以, } W_n(s) = -\frac{1 + W_1(s)W_2(s)W_c(s)}{W_2(s)} = -s(s + K_1K_t)$$

(2) 输出对输入的的开环传递函数为

$$W_K(s) = -\frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_c(s)} = \frac{K_1}{s(s + K_1K_t)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

得: $\omega_n^2 = K_1$; $2\zeta\omega_n = K_1K_t$ 。

(3) 根据指标要求, 确定参数。

$$\delta\% = 25\%, \text{ 解得 } \zeta = 0.404; t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 2, \text{ 得 } \omega_n = 1.717$$

$$\text{所以, } K_1 = \omega_n^2 = 2.948, K_t = \frac{2\zeta\omega_n}{K_1} = 0.471。$$

$$W_c(s) = 0.471s, W_n(s) = -s(s + 1.387)$$

第 7 章 习题答案

7-1 求下列函数的 z 变换

(1) $f(t) = t$

(2) $f(t) = 1 - e^{-at}$

解：(1) 解法一 用级数求和法。由 z 变换定义

因为
$$z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z - 1}$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots] = -[z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \dots]$$

所以
$$F(t) = -Tz \frac{d}{dz} \frac{1}{z - 1} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

解法二 查表法。

$$F(t) = Z[t] = Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

(2)
$$F(t) = Z[1 - e^{-at}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-at} z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-at}} = \frac{z(1 - e^{-at})}{(z - 1)(z - e^{-at})}$$

7-2 求下列函数的 z 变换。

(1) $F(s) = \frac{(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}$

(2) $F(s) = \frac{e^{-nTs}}{(s + a)}$ (T 是采样周期)

解：(1) 因为
$$F(s) = \frac{(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

所以
$$F(z) = \frac{2z}{z - e^{-T}} - \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

(2) 因为
$$L^{-1}[F(s)] = e^{-at - nt}$$

根据延迟定理，有

$$F(z) = Z[e^{-at - nt}] = Z^{-n}[e^{-at}] = z^{-n} \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

7-3 求下列函数的 z 的反变换。

$$(1) F(z) = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (T \text{ 是采样周期})$$

$$(2) F(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$$

解: (1) 将 $\frac{F(z)}{z}$ 展开, 有

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-T}}$$

即

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}$$

所以

$$f(kT) = 1 - e^{-kT} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(2) 解法一 用幂级数法求 z 反变换。用综合除法将 $F(z)$ 展开

$$\begin{array}{r} \overline{) 1 + 0.9z^{-1} + 0.73z^{-2} + 0.585z^{-3} \dots} \\ z^2 - 0.9z + 0.08 \\ \hline -) z^2 + 0.08 \\ 0.9z \\ \hline -) 0.9z + 0.072z^{-1} \\ 0.73 \phantom{- 0.072z^{-1}} \\ \hline -) 0.73 \phantom{- 0.657z^{-1}} + 0.0584z^{-2} \\ 0.0585z^{-1} \phantom{- 0.0584z^{-2}} \\ \vdots \end{array}$$

因为

$$F(z) = 1 + 0.9z^{-1} + 0.73z^{-2} + 0.585z^{-3} + \dots$$

所以

$$f(kT) = \delta(t) + 0.9\delta(t-T) + 0.73\delta(t-2T) + 0.585\delta(t-3T) + \dots \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

解法二 用部分分式展开法求 z 反变换。为了能在 z 变换表中找到相应 $F(z)$ 形式, 须将 $F(z)$

表达为如下的形式

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.8)(z-0.1)} = \frac{8/7}{z-0.8} - \frac{1/7}{z-0.1}$$

得

$$F(z) = \frac{8}{7} \times \frac{z}{z-0.8} - \frac{1}{7} \times \frac{z}{z-0.1}$$

查表得

$$f(t) = \frac{8}{7} \times 0.8^{\frac{t}{T}} - \frac{1}{7} \times 0.1^{\frac{t}{T}}$$

$$f(kT) = \frac{8}{7} (0.8)^k - \frac{1}{7} (0.1)^k$$

所以
$$f(kT) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{8}{7} (0.8)^k - \frac{1}{7} (0.1)^k \right] \delta(t - kT)$$

解法三 用留数法求 z 反变换。因为

$$f(kT) = \sum \operatorname{Res} [E(z) z^{k-1}] = \sum \operatorname{Res} \left[\frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)} z^{k-1} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0.8} (z-0.8) \frac{z^{k+1}}{(z-0.8)(z-0.1)} + \lim_{z \rightarrow 0.1} (z-0.1) \frac{z^{k+1}}{(z-0.8)(z-0.1)} =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0.8} \frac{z^{k+1}}{(z-0.1)} + \lim_{z \rightarrow 0.8} \frac{z^{k+1}}{(z-0.8)} = \frac{1}{0.7} (0.8^{k+1} - 0.1^{k+1})$$

所以
$$f(kT) = \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{8}{7} (0.8)^k - \frac{1}{7} (0.1)^k \right] \delta(t - kT)$$

7-4 试用 z 变换方法求解下列差分方程。

(1)
$$f(k+2) + 3f(k+1) + 2f(k) = 0$$

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

(2)
$$f(k+2) + 2f(k+1) + f(k) = u(k)$$

$$f(0) = 0, f(1) = 0, u(k) = k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

解：(1) 用 z 变换方法解差分方程。对差分方程逐项进行 z 变换得

$$[z^2 f(z) - z^2 f(0) - z f(1)] + 3[zF(z) - z f(0)] + 2F(z) = 0$$

代人初条件进行整理得

$$(z^2 + 3z + 2)F(z) = z$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

进行 z 反变换有

$$f(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k - (-2)^k] \delta(t - kT)$$

(2) 设
$$Z[f(k)] = F(z)$$

由超前定理，有

$$Z[f(k+1)] = zF(z) - zF(0) = zF(z)$$

$$Z[f(k+2)] = z^2F(z) - z^2F(0) - zF(1) = z^2F(z)$$

代入初始条件，得

$$z^2F(z) + 2zF(z) + F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

所以

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z+1)^2} + \frac{z}{z+1} \right]$$

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{4} [k-1 - k \cos k\pi + \cos k\pi] = \frac{1}{4} (k-1)(1 - \cos k\pi) \quad (k=0,1,2,\dots)$$

7-5 两离散系统结构图分别如图 P7-1 (a)、(b) 所示。采样周期为 T，求其脉冲传递函数，并比较其特点。

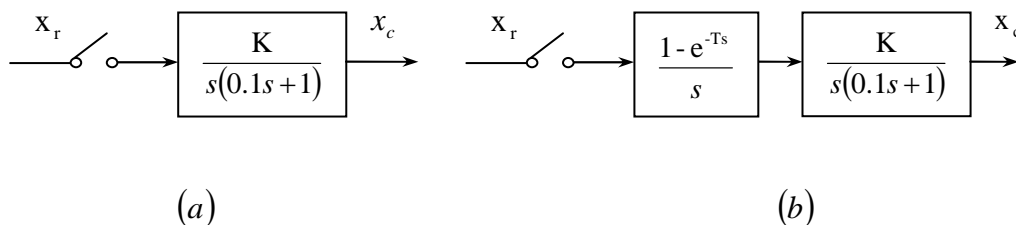


图 P7-1 系统结构图

解：对于图 P7-1 (a) 系统有

$$W(z) = Z \left[\frac{10K}{s(s+10)} \right] = KZ \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \right] = K \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-10T}} \right] = \frac{(1-e^{-10T})Kz}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

对于图 P7-1 (b) 系统，则有

$$W(z) = Z \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{10K}{s(s+10)} \right] = K(1-z^{-1})Z \left[\frac{10}{s^2(s+10)} \right] =$$

$$K \frac{(z-1)}{z} Z \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(s+10)} \right] = K \frac{z-1}{z} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-10T})z}{10(z-1)(z-e^{-10T})z} \right] =$$

$$K \left[\frac{T}{z-1} - \frac{(1-e^{-10T})(z-1)}{10(z-e^{-10T})} \right] = \frac{K}{10} \frac{(10T-1+e^{-10T})z + (1-e^{-10T}-10e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

图 (b) 系统只是在图 (a) 系统基础上加了零阶保持器。比较两系统脉冲传递函数可以看出：引入零阶保持器并不增加系统的阶次，不改变系统极点，只影响系统的零点。

7-6 采样系统结构图如图 P7-2 所示。分别推导闭环脉冲传递函数。

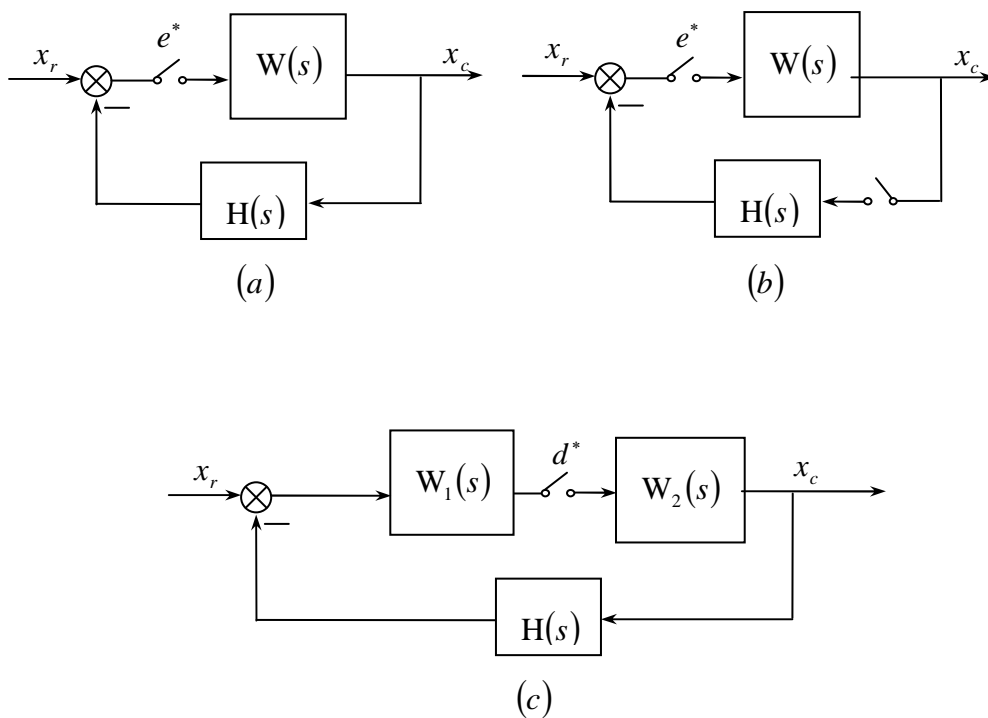


图 P7-2 采样系统结构图

解：图 P7-2 (a) 系统

$$\begin{aligned} X_c(z) &= W_e(z)E(z) \\ E(z) &= X_r(z) - W_e H(z)E(z) \end{aligned}$$

即
$$E(z) = \frac{X_r(z)}{1 + W_e H(z)} = \frac{W_e(z)}{1 + W_e H(z)} X_r(z)$$

所以
$$\phi(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = \frac{W_e(z)}{1 + W_e H(z)}$$

图 P7-2 (b) 系统

$$\begin{aligned} X_c(z) &= W_e(z)E(z) \\ E(z) &= X_r(z) - H(z)X_r(z) \\ &= X_r(z) - H(z)W_e(z)E(z) \end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{1 + W_e(z)H(z)} X_r(z) \\ &= \frac{W_e(z)}{1 + W_e(z)H(z)} X_r(z) \end{aligned}$$

所以
$$\phi(z) = \frac{X_c(z)}{X_r(z)} = \frac{W_e(z)}{1 + W_e(z)H(z)}$$

图 P7-2 (c) 系统

$$\begin{aligned} X_c(z) &= W_2(z)D(z) \\ D(z) &= W_1X_r(z) - W_1HW_2(z)D(z) \end{aligned}$$

即
$$D(z) = \frac{W_1X_r(z)}{1 + W_1W_2H(z)}$$

$$X_c(z) = \frac{W_2(z)W_1X_r(z)}{1 + W_1W_2H(z)}$$

此系统 $\phi(z)$ 表达式写不出来。但有了 $X_c(z)$ 仍可以由 z 反变换求输出采样信号 $x_c^*(t)$ 。

7-7 已知一采样系统如图 P7-3 所示，其中采样周期 $T = 1s$ ，试求 $k = 8$ 时系统稳定性，并求使系统稳定的 k 值范围。

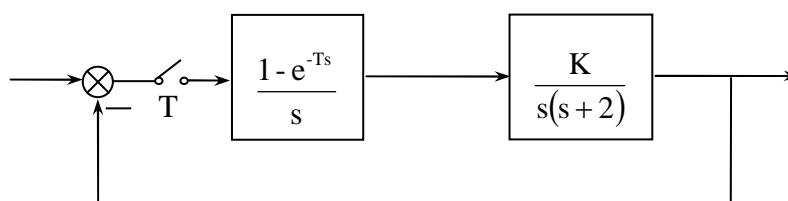


图 P7-3 采样系统结构图

解：由图 P7-3 所示结构图可知，系统的开环传递函数为

$$W_k(s) = \frac{k(1 - e^{-Ts})}{s^2(s+2)} = \frac{k(1 - e^{-s})}{4} \left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \right]$$

从而可得

$$W_k(z) = \frac{k}{4} (1 - z^{-1}) \left[\frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-2}} \right]$$

其特征方程为 $1 + W_k(z) = 0$ ，即

$$z^2 + (0.28k - 1.14)z + 0.14 + 0.15k = 0$$

(1) 当 $k = 8$ 时，特征方程为 $z^2 + 1.1z - 1.06 = 0$

求得 $z_1 = 0.67, z_2 = -1.7$

因为 $|z_2| > 1$, 所以系统不稳定。

(2) 令 $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$, 进行 ω 变换可得

$$\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2 + (0.28k - 1.14)\frac{1+\omega}{1-\omega} + (0.14 + 0.15k) = 0$$

整理得

$$0.43k\omega^2 + (1.72 - 0.3k)\omega + (2.28 - 0.13k) = 0$$

若要系统稳定, 应有 ω 的各项系数均大于零, 即

$$\begin{cases} 0.43k > 0 \\ 1.72 - 0.3k > 0 \\ 2.28 - 0.13k > 0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} k > 0 \\ k < 5.73 \\ k < 17.5 \end{cases}$$

所以, 使系统稳定的 k 值范围为 $0 < k < 5.73$ 。

7-8 已知系统闭环特征方程 $D(z) = 45z^3 - 117z^2 + 119z - 39 = 0$, 试判断系统的稳定性。

解 解法一 用朱利稳定判据

$$D(1) = 8 > 0, D(-1) = -320 < 0, (n = 3)$$

列朱利阵列

行数	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-39	119	-117	45
2	45	-117	119	-39
3	-504	624	-792	
4	-792	624	-504	

表中第三行元素

$$b_0 = -504, b_1 = 624, b_2 = -792$$

$|b_0| = -504 < |b_2| = 792$ 不满足稳定的条件, 所以系统不稳定。

解法二 用 ω 域的劳斯判据。将 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ 代人特征方程得

$$45\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^3 - 117\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^2 + 119\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right) - 39 = 0$$

整理后得出

$$D(\omega) = \omega^3 + 2\omega^2 + 2\omega + 40 = 0$$

列劳斯表

ω^3	1	2
ω^2	2	40
ω^1	$\frac{2 \times 2 - 40}{2} = -18$	
ω^0	40	

表中第 1 列元素变号 2 次，有 2 个根在右半 W 平面，也即有两个根在 Z 平面单位圆外。

7-9 已知系统结构图如图 P7-4 所示，采样周期 $T=1s$ 。试求 $r(t)=t$ 时最小拍系统控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

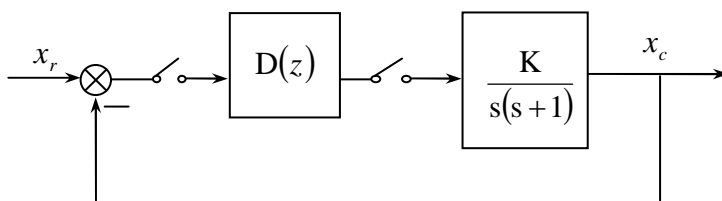


图 P7-4 采样系统结构图

解：系统被控对象的脉冲传递函数为

$$W(z) = Z \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

查表有

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 W(z)} = \frac{z^{-1}(2-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2 \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}} = \\ &= \frac{3.165(z-0.5)(z-0.368)}{z(z-1)} \end{aligned}$$

系统响应只需两拍即可进入稳态。

7-10 数字控制系统结构图如图 P7-5 所示，采样周期 $T = 1s$ 。

- (1) 试求未校正系统的闭环极点，并判断其稳定性。
- (2) $x_r(t) = t$ 时，按最少拍设计，求 $D(z)$ 表达式，并求 $X_c(z)$ 的级数展开式。

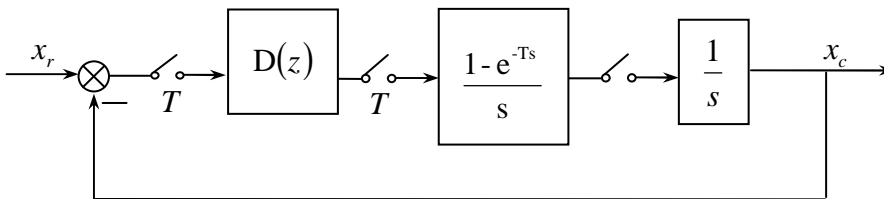


图 P7-5 数字控制系统结构图

解：(1) 由图 P7-5 所示结构图可知，系统的开环传递函数为 $W_k(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s^2}$

所以，当 $T = 1s$ 时的脉冲传递函数 $W_k(z)$ 为

$$W_k(z) = \frac{z}{(z-1)^2}(1-z^{-1}) = \frac{1}{z(1-z^{-1})} = \frac{1}{z-1}$$

其特征方程为 $1 + W_k(z) = 0$

因此有 $1 + \frac{1}{z-1} = 0$ ，可以求得 $z = 0$

所以，系统是稳定的。

(2) 由数字控制器的设计可知，能在两个采样周期消除偏差的脉冲传递函数是

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{X_r(z)} = (1-z^{-1})^2$$

将 $W_k(z)$ ， $W_e(z)$ 代入 $D(z)$ 的表达式中得

$$D(z) = \frac{1-W_e(z)}{W_e(z)W_k(z)} = \frac{1-(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 \frac{1}{z-1}} = \frac{2z-1}{z-1}$$

分析这个数字控制器的控制效果，系统闭环传递函数为

$$W_B(z) = 1 - W_e(z) = 1 - (1-z^{-1})^2 = 2z^{-1} - z^{-2}$$

当输入为单位斜坡时，系统输出的 Z 变换是

$$X_c(z) = W_B(z)X_r(z) = \frac{z^{-1}(2z^{-1} - z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} = 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

进行 Z 反变换，有

$$X_c^*(t) = 2\delta(t-2T) + 3\delta(t-3T) + 4\delta(t-4T) + \dots$$

由上式可知，在两个采样周期内，输出量的采样值和输出量完全一致。

第 8 章 习题答案

8-1 解：(1) 结构图等效为下图 1。等效线性部分的传递函数为 $W(s) = W_1(s)[1 + H(s)]$ 。

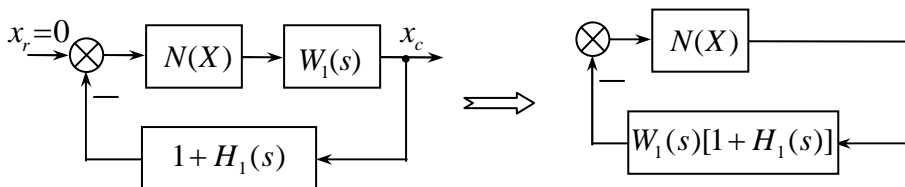


图 1

(2) 结构图等效为下图 2。等效线性部分的传递函数为 $W(s) = \frac{W_1(s)H_1(s)}{1 + W_1(s)}$ 。

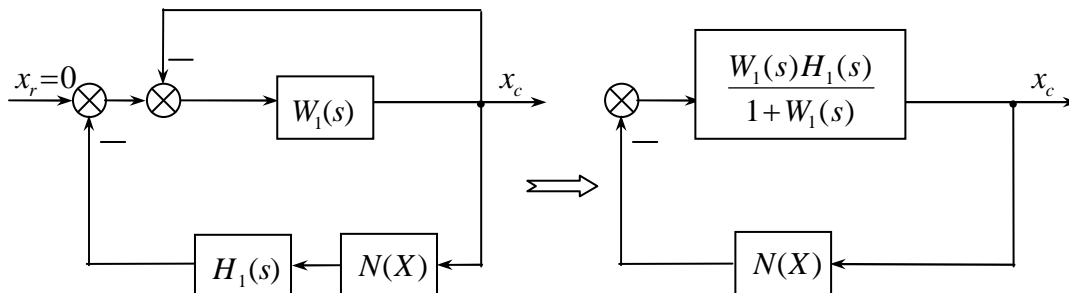


图 2

(3) 结构图等效为下图 3。等效线性部分的传递函数为 $W(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$ 。

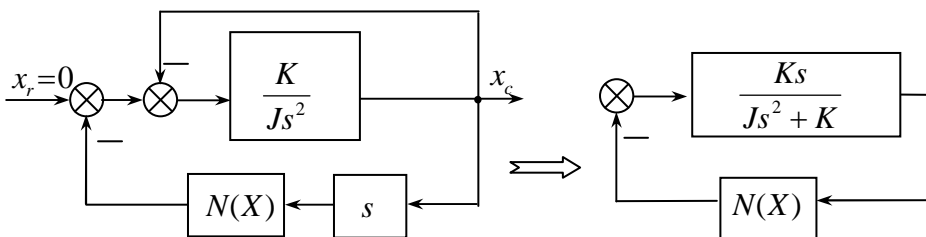


图 3

8-2 解：当输入为正弦函数 $x(t) = X \sin \omega t$ 时，对应输出波形如图 4 所示。写出其输出表达式为：

$$y(t) = \begin{cases} K_1 X \sin \omega t & 0 \leq \omega t < \theta_1 \\ K_2 X \sin \omega t & \theta_1 \leq \omega t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

其中, $\theta_1 = \arcsin \frac{a}{X}$

则:
$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_1} K_1 X \sin^2 \omega t d\omega t + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} K_2 X \sin^2 \omega t d\omega t \right]$$

$$= K_2 X + \frac{2}{\pi X} (K_1 - K_2) \left[\arcsin \frac{a}{X} - \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2} \right]$$

所以, $N(X) = \frac{B_1}{X} = K_2 + \frac{2}{\pi} (K_1 - K_2) \left[\arcsin \frac{a}{X} - \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2} \right] \quad X \geq a$

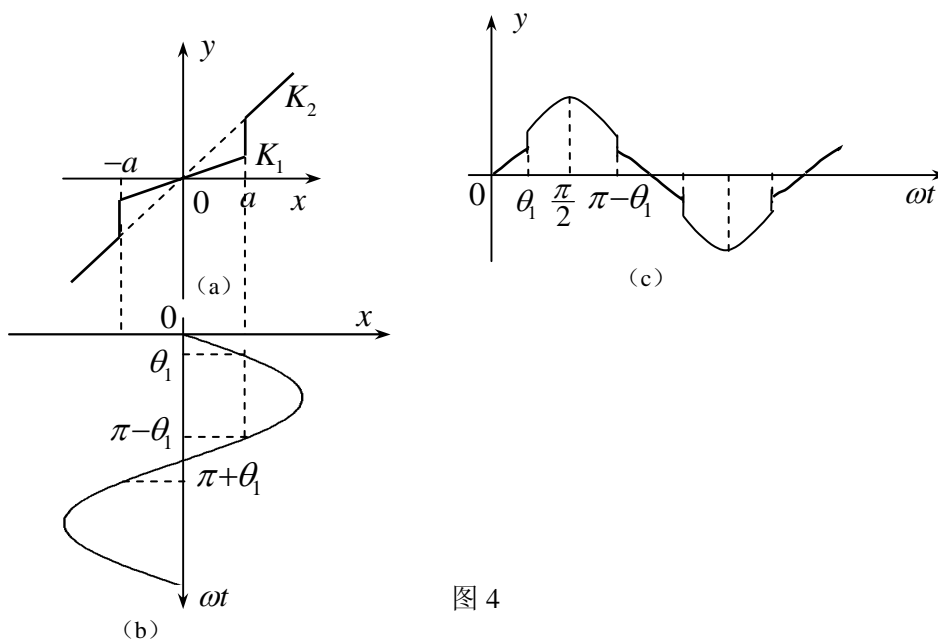


图 4

8-3 解: 当输入为正弦函数 $x(t) = X \sin \omega t$ 时, 对应输出波形如图 5 所示。写出其输出表达式为:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t < \theta_1 \\ K(X \sin \omega t - a_1) & \theta_1 \leq \omega t < \theta_2 \\ K(a_2 - a_1) & \theta_2 \leq \omega t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

其中, $\theta_1 = \arcsin \frac{a_1}{X}$, $\theta_2 = \arcsin \frac{a_2}{X}$, 则:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} K(X \sin \omega t - a_1) \sin \omega t d\omega t + \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} K(a_2 - a_1) \sin \omega t d\omega t \right]$$

$$= \frac{2KX}{\pi} \left[\arcsin \frac{a_2}{X} + \frac{a_2}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{X}\right)^2} - \arcsin \frac{a_1}{X} - \frac{a_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{X}\right)^2} \right]$$

所以,

$$N(X) = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{a_2}{X} + \frac{a_2}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{X}\right)^2} - \arcsin \frac{a_1}{X} - \frac{a_1}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{X}\right)^2} \right] \quad X \geq a_2$$

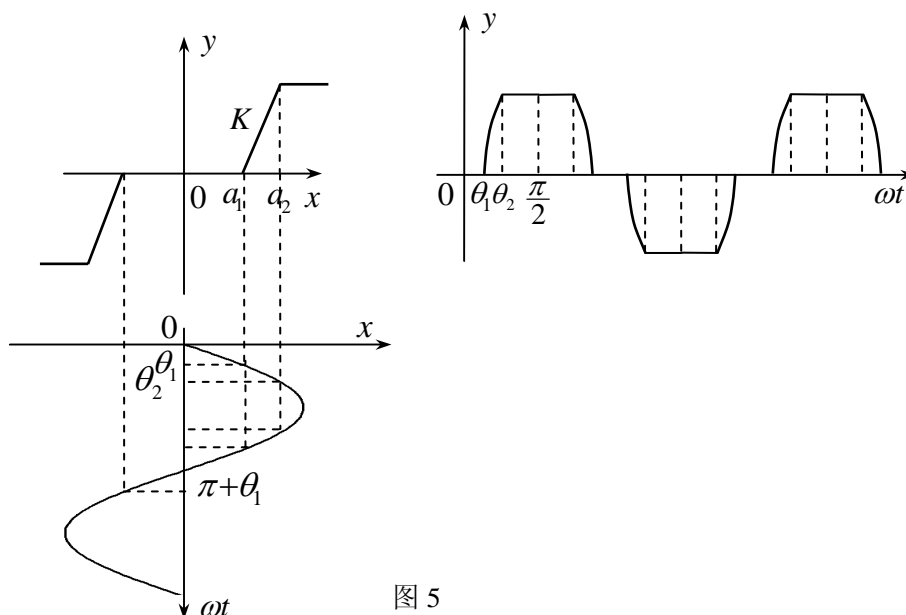


图 5

8-4 解: (1) 两线有交点, 但具有发散特性, 不可能产生自振。设交点处振幅为 X_1 , 则当初始振幅 $X_0 < X_1$ 时, 系统稳定; 当初振幅 $X_0 > X_1$ 时, 系统不稳定。

(2) 两线不存在交点, 且 $W(j\omega)$ 线不包围 $-1/N(X)$ 线, 所以, 系统稳定。

(3) 两线有交点, 且具有收敛特性, 所以, 交点为稳定的工作点, 不论初值如何都在交点处做自振荡。

(4) $W(j\omega)$ 线包围了 $-1/N(X)$ 线, 所以, 系统不稳定。

(5) 两线有一个交点且收敛特性, 故产生稳定的自振荡。

(6) $W(j\omega)$ 线包围了 $-1/N(X)$ 线, 所以, 系统不稳定。

(7) 交点 a 收敛, 交点 b 发散, 设交点 b 振幅为 X_b , 则当初振幅 $X_0 < X_b$ 时, 系统稳定; 当初振幅 $X_0 > X_b$ 时, 在 a 点做等幅振荡。

(8) $W(j\omega)$ 线包围了 $-1/N(X)$ 线, 所以, 系统不稳定。

8-5 解:

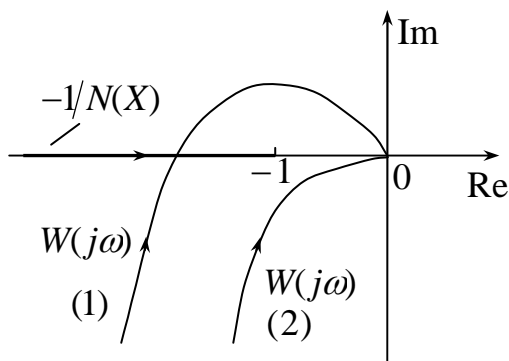


图 6

(1) 非线性的描述函数为

$$N(X) = \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{X} - \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X}\right)^2} \right]$$

将 $K=1, a=1$ 代入上式, 画 $-1/N(X)$ 线如图 6 所示, 再画线性部分的奈氏曲线如图 6 所

示。 $W(j\omega)$ 线与实轴相交时, $\omega = \frac{1}{10\sqrt{2}}$, 幅值 $A(\omega) = 266.67$ 。可看出两线有交点且具

有发散特性, 所以系统不会产生自振。可求出交点上的振幅设为 X_1 (可计算出来的), 则当初始振幅 $X_0 < X_1$ 时, 系统稳定; 当初振幅 $X_0 > X_1$ 时, 系统不稳定。

(2) 画线性部分的奈氏曲线如图 6 所示。 $W(j\omega)$ 线不包围 $-1/N(X)$ 线, 所以, 系统稳定。

8-6 解: (1) 非线性为理想继电器特性, 其描述函数为 $N(X) = \frac{4E}{\pi X}$, 这里, $E=1$, 画

$-1/N(X)$ 线如图 7 所示, 为随着 X 的增大, 从原点开始, 沿着负实轴向左移动的直线。线

性部分传递函数为 $W(s) = \frac{10}{s(s+2)^2}$, 在同一图上画奈氏曲线如图 7 所示, 与负实轴的交点

计算如下:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{2}, \quad A(\omega) = \frac{10}{4} \frac{1}{\omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}} = \frac{2.5}{\omega \left(1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)}$$

令: $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{2} = -\pi$, 解得 $\omega = 2$, 代入 $A(\omega)$, 得幅值 $A(\omega) = 0.625$ 。

可看出, 两线具有交点且具有收敛特性, 所以, 必存在自振。

(2) 自振的角频率即为交点处的角频率 $\omega = 2$ 。先求非线性元件输入量的自振振幅, 设为 X_1 , 则输出量 x_c 的自振振幅即为 $X_c = \frac{X_1}{2}$ 。

$$\text{令: } \left| -\frac{1}{N(X)} \right| = \frac{\pi X}{4} = 0.625, \text{ 得 } X_1 = 0.80, \text{ 所以 } X_c = \frac{X_1}{2} = 0.40$$

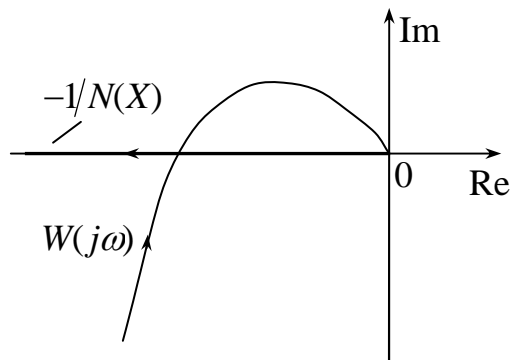


图 7

8-7 解: 非线性: $N(X) = \frac{4E}{\pi X} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi X}$, $-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi X}{4\sqrt{2}}$

线性部分: $W(s) = \frac{10K}{s(0.1s+1)(Ts+1)}$ 其频率特性的相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega - \arctan T\omega$$

其幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{10K}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

两线必有交点且收敛, 故必产生自振。

当要求输出量 x_c 的自振振幅 $X=0.1$ 时, 即要求非线性环节的输入量的振幅为

$X = 0.1 \times 10 = 1$, 此时, $\left| -\frac{1}{N(X)} \right| = \left| -\frac{\pi X}{4\sqrt{2}} \right|_{X=1} = 0.56$ 。已知自振角频率 $\omega=10$, 令:

$$A(\omega) = \frac{10K}{\omega\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+(T\omega)^2}} \Big|_{\omega=10} = \frac{10K}{14.14\sqrt{1+(10T)^2}} = 0.56 \quad (*)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega - \arctan T\omega = -\frac{\pi}{2} - \arctan 1 - \arctan 10T = -\pi \quad (**)$$

联立上二式, 解得: $T = 0.1$, $K = 1.12$ 。

8-8 解: (1) 计算非线性元件的描述函数。当输入 $x(t) = X \sin \omega t$ 时, 输出 $y(t) = X^3 \sin^3 \omega t$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X^3 \sin^3 \omega t \sin \omega t d\omega t = \frac{X^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \omega t d\omega t = \frac{3}{4} X^3$$

所以, $N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{3}{4} X^2$

则 $-\frac{1}{N(X)} = -\frac{4}{3X^2}$, 画曲线如图 8 所示。

(2) 线性部分的频率特性。

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{-\frac{3}{4}\omega}{\omega(1+\omega^2)(1+\frac{\omega^2}{4})} + j \frac{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+\frac{\omega^2}{4})}$$

求 $W(j\omega)$ 与实轴的交点:

令 $\text{Im}[W(j\omega)] = 0$, 得 $\omega = \sqrt{2}$, 代入实部得 $\text{Re}[W(j\omega)] = -\frac{1}{6} \approx -0.17$ 。奈氏曲线如图

8 所示。

(3) 可看出, 两线有一个交点, 但具有发散特性, 所以不产生自振。交点上对应的振

幅计算如下：

$$\text{令： } -\frac{1}{N(X)} = -\frac{4}{3X^2} = -0.17, \text{ 得： } X = 2.80。$$

所以，当初始振幅 $X_0 < 2.80$ 时，系统稳定；当初始振幅 $X_0 > 2.80$ 时，系统不稳定。

8-9 解：（1）确定奇点位置。令

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = (1-x^2)\dot{x} - x = 0 \end{cases}, \text{ 解得： } \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}, \text{ 为坐标原点。将原微分方程在原点附近线性化}$$

得： $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$ ，其特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

求其特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，为一对正实部的共轭复根，所以奇点 $(0, 0)$ 为不稳定焦点。

（2）确定奇点位置。令

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} = (0.5 - 3x^2)\dot{x} - x - x^2 = 0 \end{cases}, \text{ 解得两个奇点： } (0, 0) \text{ 和 } (-1, 0)。$$

对于奇点 $(0, 0)$ ：为坐标原点。将原微分方程在原点附近线性化得： $\ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$ ，其特征方程为

$$\lambda^2 - 0.5\lambda + 1 = 0$$

求其特征根为 $\lambda_{1,2} = 0.25 \pm j\frac{\sqrt{3.75}}{2}$ ，为一对正实部的共轭复根，所以奇点 $(0, 0)$ 为不稳定焦点。

对于奇点 $(-1, 0)$ ：先进行变量代换，将其移动到坐标原点，再线性化。

令： $y = x + 1$ ，则 $\dot{y} = \dot{x}$ ， $\ddot{y} = \ddot{x}$ ，原微分方程变为

$$\ddot{y} - (-2.5 - 3y^2 + 6y)\dot{y} - y + y^2 = 0$$

将其在 (y, \dot{y}) 坐标中的原点附近线性化得

$$\ddot{y} + 2.5\dot{y} - y = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + 2.5\lambda - 1 = 0$$

求其特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 + 4}}{2}$ ，为两个异号实根，所以奇点 $(-1, 0)$ 为鞍点。

8-10 利用等斜线法绘制下列方程的相平面图。

$$(1) \ddot{x} + |\dot{x}| + x = 0$$

$$(2) \ddot{x} + \dot{x} + |x| = 0$$

解：(1) 分区域来画。

① $\dot{x} \geq 0$ 的区域，即相平面的上半平面。此区域系统微分方程为

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

可写出相轨迹斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\dot{x} + x}{\dot{x}}$$

令其等于常数 c ，得等斜线方程为

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+c}x$$

这是一个过原点的直线方程。 c 取不同值可画出右半平面等斜线见图 8。

② $\dot{x} < 0$ 的区域，即相平面的下半平面。此区域系统微分方程为

$$\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$$

可写出相轨迹斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\dot{x} - x}{\dot{x}} = c$$

得等斜线方程为

$$\dot{x} = \frac{1}{1-c}x$$

这也是一个过原点的直线方程。 c 取不同值可画出左半平面等斜线见图 8。

③ 绘制相轨迹。取初始位置为 $(-1, 0)$ ，按等斜线法绘制相轨迹，即可得到该系统的相轨迹，如图 8 所示。取不同的初始位置，按同样的方法绘制相轨迹，即可得到该系统的相平面图。

(2) 分区域来画。

① $x \geq 0$ 的区域，即相平面的右半平面。此区域系统微分方程为

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

可写出相轨迹斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\dot{x} + x}{\dot{x}}$$

令其等于常数 c ，得等斜线方程为

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+c}x$$

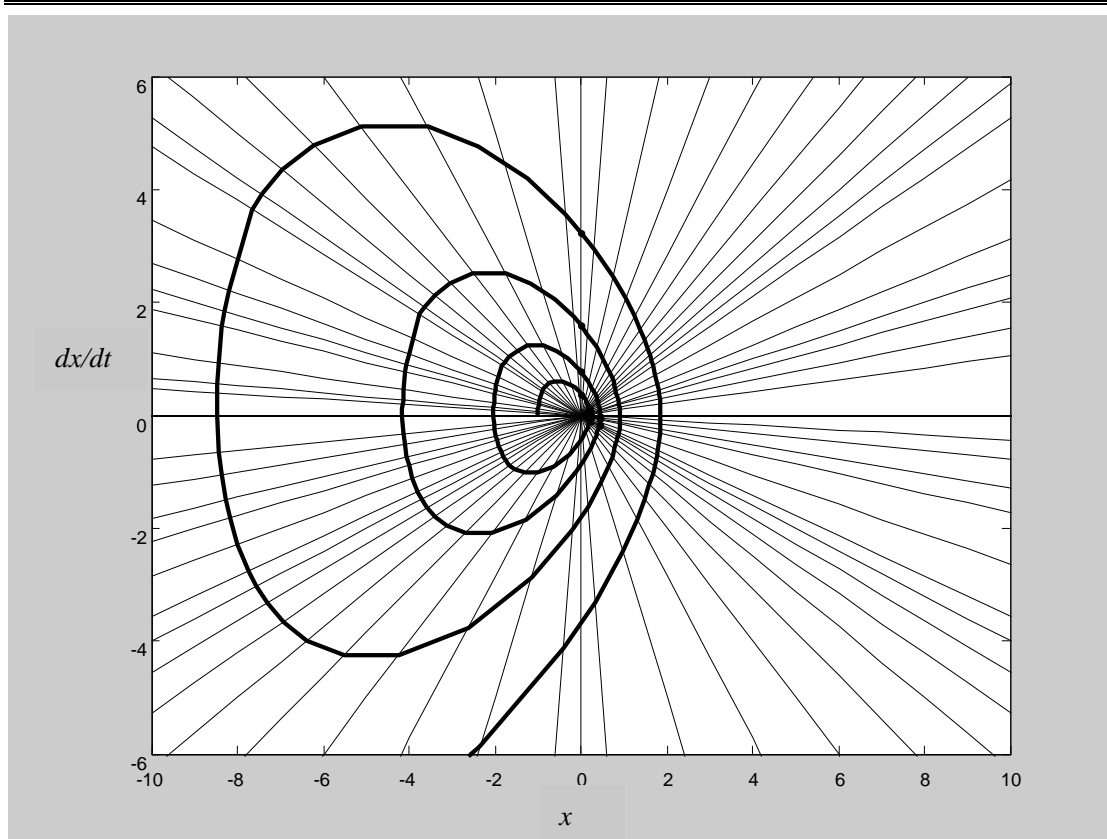


图 8

这是一个过原点的直线方程。 c 取不同值可画出右半平面等斜线见图 9。

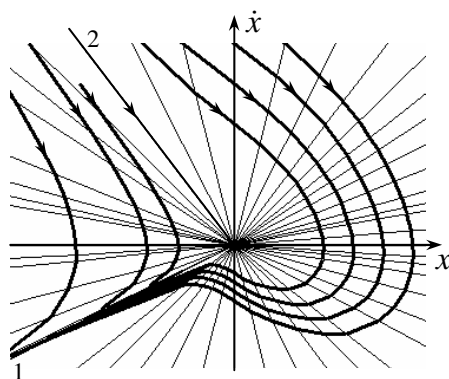


图 9

② $x < 0$ 的区域，即相平面的左半平面。此区域系统微分方程为

$$\ddot{x} + \dot{x} - x = 0$$

可写出相轨迹斜率方程为

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\dot{x} - x}{\dot{x}}$$

令其等于常数 c ，得等斜线方程为

$$\dot{x} = \frac{1}{1+c}x$$

这也是一个过原点的直线方程。 c 取不同值可画出左半平面等斜线见图 9。

③绘制相轨迹。取不同的初始位置为相轨迹起点，按等斜线法绘制相轨迹，即可得到该系统的相平面图，如图9所示。

该系统相轨迹存在两条渐近线，讨论如下。

相轨迹的渐近线为一条特殊的等斜线，即当等斜线的斜率与相轨迹的斜率相等的那条等斜线即为相轨迹的渐近线。如左半平面的等斜线方程为

$$\dot{x} = \frac{1}{1+c}x$$

令其斜率等于相轨迹的斜率 c ，即

$$\frac{1}{1+c} = c$$

可解得 $c_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ 和 $c_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ 两个根，再代入等斜线方程，得

$$\dot{x} = \frac{1}{1+c_1}x = 0.62x$$

$$\dot{x} = \frac{1}{1+c_2}x = -1.62x$$

即为相轨迹渐近线的方程。见图9直线1和2。

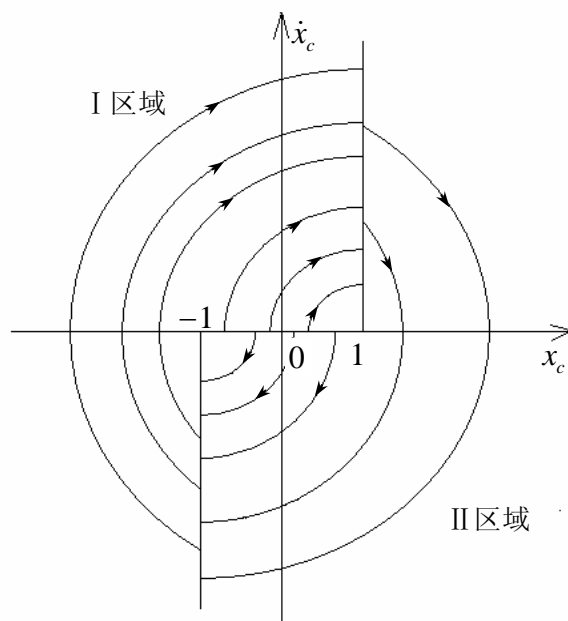


图 10

8-11 解：(1) 由结构图写微分方程： $\ddot{x}_c + x_c = y$ 。由非线性特性可写出：

$$y = \begin{cases} 1 & e > 1; e > -1 \text{ 且 } \dot{e} < 0 \\ -1 & e < -1; e < 1 \text{ 且 } \dot{e} > 0 \end{cases}$$

又 $e = -x_c$ ，所以，有

$$y = \begin{cases} 1 & x_c < -1; x_c < 1 \text{ 且 } \dot{x}_c > 0 \\ -1 & x_c > 1; x_c > -1 \text{ 且 } \dot{x}_c < 0 \end{cases}$$

把 (x_c, \dot{x}_c) 平面划分为 I 区域和 II 区域, 如图 10 所示。

(2) I 区域: 微分方程为 $\ddot{x}_c + x_c = 1$ 。求奇点: $\begin{cases} \dot{x}_c = 0 \\ \ddot{x}_c = 1 - x_c = 0 \end{cases}$, 解得:

奇点为 $(1, 0)$ 。

判断奇点类型: 先进行坐标变换将奇点移动到原点, 令 $x_c = x + 1$ 代入原微分方程得

$$\ddot{x} + x = 0$$

其特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm j1$, 所以奇点为中心点。

由微分方程为 $\ddot{x}_c + x_c = 1$, 用直接积分法可求得相轨迹方程为

$$(x-1)^2 + \dot{x}^2 = A^2$$

A 由初始条件确定。所以相轨迹为一族圆, 圆心为奇点。如图 10 所示。

II 区域: 微分方程为 $\ddot{x}_c + x_c = -1$, 奇点为 $(-1, 0)$ 。同样方法可判得奇点为中心点。

用直接积分法可求得相轨迹方程为

$$(x+1)^2 + \dot{x}^2 = B^2$$

B 由初始条件确定。所以相轨迹也为一族圆, 圆心为奇点。如图 10 所示。

(3) 由相轨迹可以看出, 相轨迹是发散出去的, 所以, 系统是不稳定的, $x_c(t)$ 呈现为发散振荡过程。

8-12 解: (1) 由结构图可写出微分方程为 $\ddot{x}_c = 10y$ 。即 $\ddot{e} = -10y$

由非线性特性可写出:

$$y = \begin{cases} 1 & e > 1; e > -1 \text{ 且 } \dot{e} < 0 \\ -1 & e < -1; e < 1 \text{ 且 } \dot{e} > 0 \end{cases}$$

把 (e, \dot{e}) 平面分成两个区域:

I 区域: 微分方程为 $\ddot{e} = -10$ 。利用直接积分法求相轨迹方程如下:

由微分方程有 $\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -10$, $\dot{e} d\dot{e} = -10de$, 得 $\frac{1}{2} \dot{e}^2 = -10e + A$, 或写成

$$e = -\frac{1}{20} \dot{e}^2 + B$$

其中, A, B 由初始条件而定。可看出, 其相轨迹为一族开口向左的抛物线。如图 11 所示。

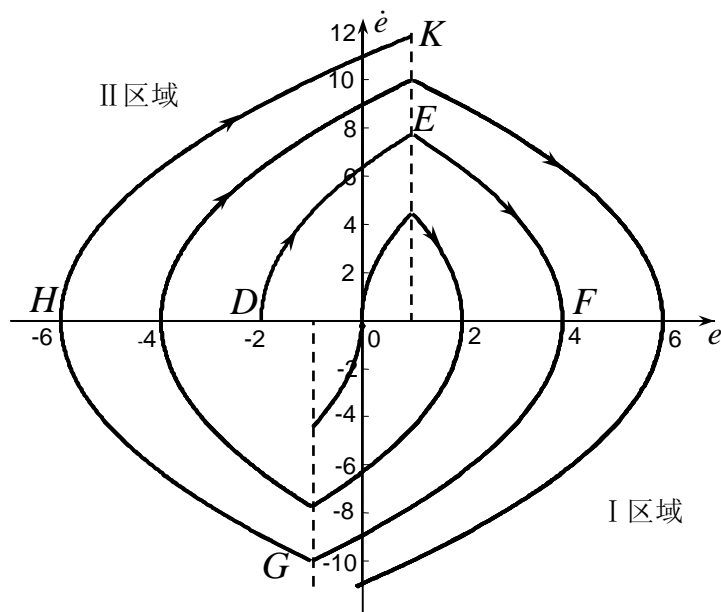


图 11

II 区域：微分方程为 $\ddot{e} = 10$ 。利用直接积分法求相轨迹方程为

$$e = \frac{1}{20} \dot{e}^2 + C$$

其中， C 由初始条件而定。可看出，其相轨迹为一族开口向右的抛物线。如图 11 所示。

(2) 已知初始条件为 $\dot{e}(0) = 0$ ， $e(0) = -2$ ，此点为起始点，设为 D 点。

① 由于起始点位于 II 区域，根据其相轨迹方程可求得积分常数 $C = -2$ ，其相轨迹方程为

$$e = \frac{1}{20} \dot{e}^2 - 2$$

所以沿此相轨迹运行至分界线 ($e=1$)，与分界线的交点为 $E: (1, 2\sqrt{15})$ 。

② 然后进入 I 区域，根据 I 区域的相轨迹方程，此时积分常数 $B=4$ ，其相轨迹方程为

$$e = -\frac{1}{20} \dot{e}^2 + 4$$

沿此相轨迹运行至横轴上时，交点为 $F: (4, 0)$ ，再运行至分界线 ($e=-1$)，与分界线的交点为 $G: (-1, -10)$ 。

③ 然后再进入 II 区域，此时，相轨迹方程为

$$e = \frac{1}{20} \dot{e}^2 - 6$$

运行至横轴上时，交点为 $H: (-6, 0)$ ，再运行至分界线 ($e=1$)，与分界线的交点为 $K: (1, 2\sqrt{35})$ 。如此循环运行下去。

可看出，误差信号 $e(t)$ 呈现一种发散振荡过程，系统是不稳定的。

8-13 解： 由结构图可写出微分方程为

$$\ddot{x}_c + 3\dot{x}_c = y$$

而 $e = x_r - x_c$ ，已知 $x_r = 1(t)$ ，所以， $\dot{e} = -\dot{x}_c$ ， $\ddot{e} = -\ddot{x}_c$ ，所以上微分方程转换为

$$\ddot{e} + 3\dot{e} = -y$$

由非线性特性写出：

$$y = \begin{cases} 0 & |e| < 1 \\ e-1 & e > 1 \\ e+1 & e < -1 \end{cases}$$

选择 (e, \dot{e}) 坐标系，将相平面划分为三个区域。

I 区域 ($|e| < 1$)：微分方程为 $\ddot{e} + 3\dot{e} = 0$ ，即 $\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} + 3\dot{e} = 0$ ，得

$$\begin{cases} \dot{e} = 0 \\ \dot{e} = -3e + A \end{cases}$$

其中 A 为积分常数，由初始条件确定。可看出，此区域存在奇线 $\dot{e} = 0$ ，其它相轨迹为斜率为-3的直线。如图 12 所示。

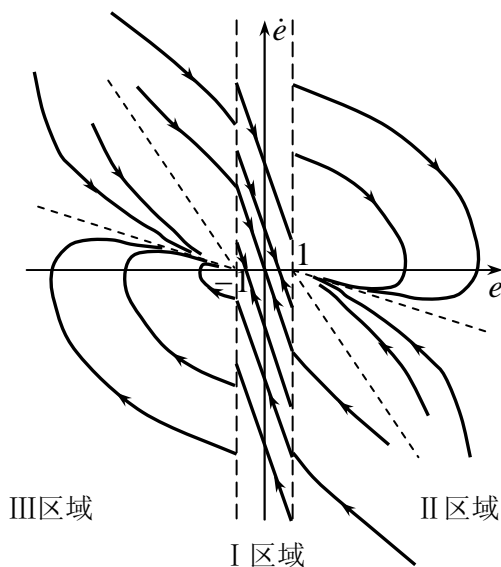


图 12

II 区域 ($e > 1$)：微分方程为 $\ddot{e} + 3\dot{e} + e = 1$ ，可确定奇点为 $(1, 0)$ ，为稳定节点，相轨迹如图 12 所示。

III 区域 ($e < -1$)：微分方程为 $\ddot{e} + 3\dot{e} + e = -1$ ，可确定奇点为 $(-1, 0)$ ，为稳定节点，相轨迹如图 12 所示。

由相平面图可看出，不论初始位置在何处，系统都会稳定运行，最终平衡在奇线的某一点上（这一点由初始位置决定）。横轴上 $[-1, 1]$ 取间均为平衡点。当系统平衡在原点时，系统为无差系统，其它点均存在稳态误差。

8-15 解：速度反馈的继电系统如图 P8-13 所示。图中， $\tau < T$ 。试在 (e, \dot{e}) 平面上绘制相轨迹图。（注意，在开关线上会产生跳跃现象。）

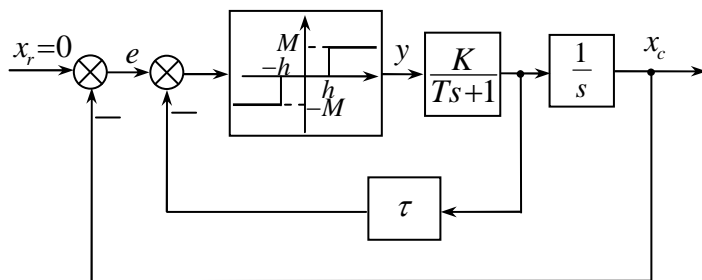


图 P8-13 有速度反馈的继电器系统

(1) 由结构图写微分方程。

$$T\ddot{x}_c + \dot{x}_c = Ky$$

而 $e = -x_c$, $\dot{e} = -\dot{x}_c$, $\ddot{e} = -\ddot{x}_c$, 上式转换为

$$T\ddot{e} + \dot{e} = -Ky$$

$$\text{而 } y = \begin{cases} 0 & (-\frac{1}{\tau}e - \frac{h}{\tau}) < \dot{e} < (-\frac{1}{\tau}e + \frac{h}{\tau}) \\ M & \dot{e} > (-\frac{1}{\tau}e + \frac{h}{\tau}) \\ -M & \dot{e} < (-\frac{1}{\tau}e - \frac{h}{\tau}) \end{cases}$$

可看出有两条分界线: $L_1: \dot{e} = -\frac{1}{\tau}e + \frac{h}{\tau}$, $L_2: \dot{e} = -\frac{1}{\tau}e - \frac{h}{\tau}$, 如图 13 所示。

I 区域 ($y=0$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = 0$

II 区域 ($y=M$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = -KM$

III 区域 ($y=-M$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = KM$

(2) 绘制各区域相轨迹。

I 区域 ($y=0$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = 0$, 即 $T\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} + \dot{e} = 0$, 得 $\dot{e} = 0$ 为奇线, 相轨迹

为斜率是 $-\frac{1}{T}$ 直线。因分界线的斜率是 $-\frac{1}{\tau}$, 而已知 $\tau < T$, 所以 $\frac{1}{T} < \frac{1}{\tau}$ 。见图 13。

II 区域 ($y=M$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = -KM$, 不存在奇点, 但有渐近线, 计算如下:

写出等斜线方程: $\dot{e} = -\frac{KM}{1+cT}$, 其中 c 为相轨迹斜率。可知等斜线为水平线, 斜率为 0,

所以令 $c=0$ 代入等斜线方程即为相轨迹渐近线方程: $\dot{e} = -KM$ 。此区域的相轨迹都将沿渐近线趋于无限远。

III 区域 ($y=-M$): 微分方程为 $T\ddot{e} + \dot{e} = KM$ 。与 II 区域有类似的分析, 得相轨迹渐近线方程: $\dot{e} = KM$ 。

在分界线上把各区域的相轨迹连接起来, 就形成了完整的相轨迹图。见图 13。

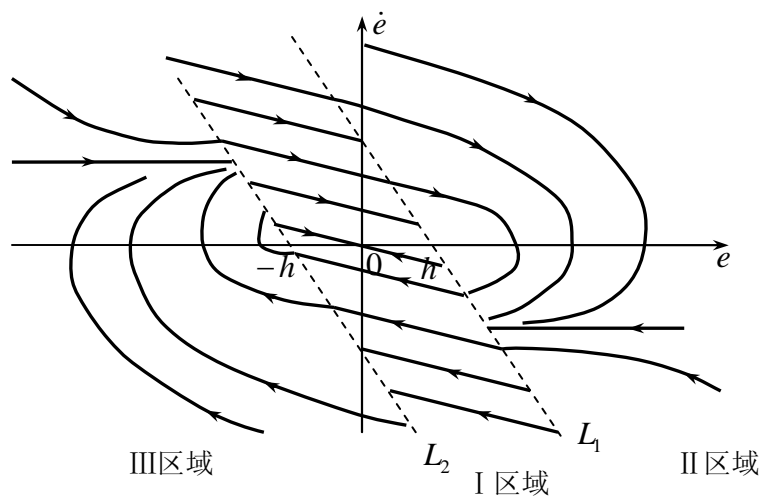


图 13