《离散数学》练习题一

一、单项选择题

1．设集合 $E=\{0,1,2,3\}$，则下面集合与 E 相等的是________。

A．$\{x\in R \mid x-3=0\}$　　B．$\{x\in R \mid x^2=-9\}$

C．$\{x\in R \mid x^2+5x+6=0\}$　　D．$\{x\in N \mid 0\le x\le 3\}$

2．设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，R 是集合 A 上的整除关系，下列叙述中错误的是________。

A．4，5，6 全是 A 的极大元　　B．A 没有最大元　　C．6 是 A 的上界　　D．1 是 A 的最大下界

3．设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，则下列关系中为从 X 到 Y 的映射是________。

A．$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$　　B．$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle,\langle 4,b\rangle\}$

C．$\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$　　D．$\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

4．设 G 是 4 阶群，则其子群的阶不能是下面的________。

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5．设 $S=\{1,2,3,4,5\}$，则下列集合中等于 S 的是________。

A．$\{1,2,3,4\}$　　B．$\{x \mid x\text{是有理数}, x^2\le 25\}$

C．$\{x \mid x\text{是正整数}, x\le 5\}$　　D．$\{x \mid x\text{是有理数}, x\le 5\}$

6．下面有关集合之间的包含和属于关系的说法，正确的是________。

Ⅰ．$\Phi\subseteq\Phi$　　Ⅱ．$\{\Phi\}\in\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$

Ⅲ．$\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$　　Ⅳ．$\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b,c\}\}$

A．Ⅰ和Ⅱ　　B．Ⅰ和Ⅲ　　C．Ⅰ和Ⅳ　　D．Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ

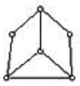
7．设 A 为 n 个元素的集合，则 A 上有________个二元关系。

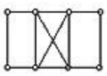
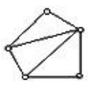
A．2^n　　B．$2^{n\times n}$　　C．$2n$　　D．n

8．数的加法在下列集合中________ 上是封闭的。

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,1\}$　　C．$\{a+b \mid a,b\in Z\}$　　D．$\{x \mid x\text{是奇数}\}$

9．下列图形中为欧拉图的是________。

A、　　B、

C、　　D、

10．设 $\langle L,\le\rangle$ 是格，$a,b,c\in L$，且 $c\le a, b\le a$，则 $a\otimes(b\oplus c)$________$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$。

A. = 　　B. ≤ 　　C. ≥ 　　D. 没关系

11. 设$A-B=\Phi$，则有＿＿＿＿＿＿ 。

A. $B=\Phi$ 　　B. $B\neq\Phi$ 　　C. $A\subseteq B$ 　　D. $B\subseteq A$

12. $P\leftrightarrow\neg Q=$＿＿＿＿＿。

A. $\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$ 　　B. $(\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P)$

C. $(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$ 　　D. $(\neg P\vee\neg Q)\wedge(Q\vee P)$

13. 对于一个只有 4 个不同元素的集合A来说，A上的不同的二元关系的总数为＿＿＿＿＿＿。

A. 4 　　B. 16 　　C. 2^{16} 　　D. 2^4

14. 下列代数系统$\langle G,*\rangle$中，＿＿＿＿＿＿不构成群。

A. $G=\{1,10\}$，∗是模 11 乘法 　　B. $G=\{1,3,4,5,9\}$，∗是模 11 乘法

C. G为有理数集，∗是普通加法 　　D. G为有理数集，∗是普通乘法

15. 设G为有n个顶点的简单图，则有＿＿＿＿＿。

A. $\Delta(G)\prec n$ 　　B. $\Delta(G)\leq n$ 　　C. $\Delta(G)\succ n$ 　　D. $\Delta(G)\geq n$

16. 设$S=\{1,2,3,4,5\}$，则下列集合中等于S的是（　　）。

A. $\{1,2,3,4\}$ 　　B. $\{x|x是有理数,x^2\leq 25\}$

C. $\{x|x是正整数,x\leq 5\}$ 　　D. $\{x|x是有理数,x\leq 5\}$

17. 设$A=\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$，下列选项正确的是（　　）。

A. $1\in A$ 　　B. $\{1,2,3\}\subseteq A$ 　　C. $\{\{4,5\}\}\subset A$ 　　D. $\Phi\in A$

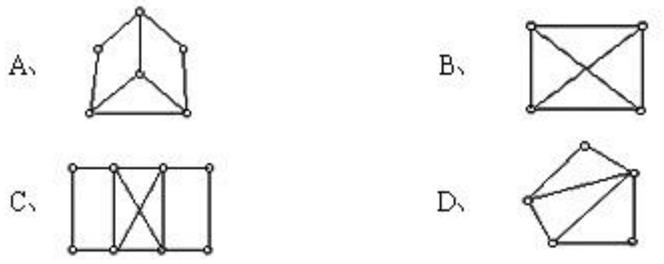
18. 设A为n个元素的集合，则A上有（　　）个二元关系。

A. 2^n 　　B. $2^{n\times n}$ 　　C. $2n$ 　　D. n

19. 数的加法在下列集合中（　　）上是封闭的。

A. $\{0,1\}$ 　　B. $\{-1,1\}$ 　　C. $\{a+b\mid a,b\in Z\}$ 　　D. $\{x\mid x是奇数\}$

20. 下列图形中为欧拉图的是（　　）。



21．设 $S=\{1,2,3,4,5\}$，则下列集合中等于 S 的是（　　）。

A．$\{1,2,3,4\}$　　　　B．$\{x|x是有理数, x^2\leq 25\}$

C．$\{x|x是正整数, x\leq 5\}$　　　　D．$\{x|x是有理数, x\leq 5\}$

22．设 $A=\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$，下列选项正确的是（　　）。

A．$1\in A$　　B．$\{1,2,3\}\subseteq A$　　C．$\{\{4,5\}\}\subset A$　　D．$\Phi\in A$

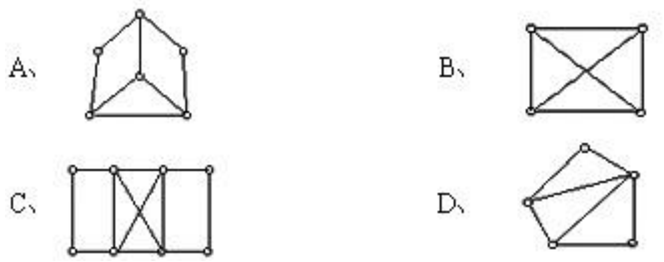
23．设 A 为 n 个元素的集合，则 A 上有（　　）个二元关系。

A．2^n　　B．$2^{n\times n}$　　C．$2n$　　D．n

24．数的加法在下列集合中（　　）上是封闭的。

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,1\}$　　C．$\{a+b\mid a,b\in Z\}$　　D．$\{x\mid x是奇数\}$

25．下列图形中为欧拉图的是（　　）。



26．下列命题中，____________是错误的。

A．$x\in\{x\}\cup\{\{x\}\}$　　　　B．$\{x\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$

C．若 $A=x\cup\{x\}$，则 $x\in A$ 且 $x\subseteq A$　　　　D．若 $A-B=\Phi$，则 $A=B$

27．幂集 $P(P(P(\Phi)))$ 是_____________。

A．$\{\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$　　　　B．$\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi\}\}$

C． $\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi\}\}$　　　　D． $\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$

28. 下列命题公式中________为重言式。

Ⅰ． $(p\to(p\vee q))\vee r$

Ⅱ． $(p\to(q\vee r))\to((p\to q)\wedge(p\to r))$

Ⅲ． $(p\to q)\wedge(p\to r)\to(p\to r)$

Ⅳ． $\neg(p\to q)\wedge q\wedge r$

A. Ⅲ　　B. Ⅰ和Ⅲ　　C. Ⅰ和Ⅱ　　D. Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和Ⅳ

29．任意一个具有多个等幂元的半群（若元素 a 满足 $a*a=a$，则称 a 为等幂元），该半群 ________。

A．不能构成群　　B．不一定能构成群

C．必能构成群　　D．能构成交换群

30．设 I 是整数集合，下列集合中________关于数的加法和乘法构成整环。

A．$\{2n\mid n\in I\}$　　B．$\{2n+1\mid n\in I\}$　　C．$\{n\mid n\geq 0,n\in I\}$　　D．I

31．设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{2,4,8,16\}$，$D=\{1,2,3,4\}$，又规定偏序关系“|”是集合上的“整除”关系，则下列偏序集中________能构成格。

A．$\langle A,|\rangle$　　B．$\langle B,|\rangle$　　C．$\langle C,|\rangle$　　D．

二、填空题

1．设 A 为非空集合，且 $|A|=n$，则 A 上不同的二元关系的个数为________，A 上不同的映射的个数为________。

2．设 P、Q 为两个命题，当且仅当________时，$P\wedge Q$ 的真值为 1。

3. 在运算表中的空白处填入适当符号，使 $\langle\{a,b,c\},*\rangle$ 成为群。

$*$	a	b	c
a		a	
b	a	b	c
c		c	

4. 当 n 为______数时，$K_n(n\geq 3)$ 必为欧拉图。

5. 某校有足球队员 38 人，篮球队员 15 人，排球队员 20 人，三队队员总数为 58 人，且其中只有 3 人同

时参加 3 种球队，那么仅仅参加两种球队的队员人数是__________。

6. 命题公式$\neg(P \to Q)$的主析取范式为____________________。

7. 一棵无向树有两个 2 度顶点，一个 3 度顶点，三个 4 度顶点，则它的树叶数为________。

8．设P：我生病，Q：我去学校，命题“如果我生病，那么我不去学校”符号化为___________。

9．P ，Q为两个命题，当且仅当________________________时，$P \vee Q$的值为 0。

10. 设A, B, C, D是四个非空集合，则$A \times B \subseteq C \times D$的充分必要条件是________________。

11. 在有理数集合Q上定义二元运算*：$a * b = a + b - ab$，则$\langle Q, * \rangle$的幺元是____________。

12. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是分配格，若对任意的 $a, b, c \in L$，都有 $a \oplus b = a \oplus c, a \otimes b = a \otimes c$，则___________________。

13. 某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是________。

14. 将布尔表达式$((a \cdot c) + c) + ((b + \bar{b}) \cdot c)$化简得______________ 。

15. 设P：我有钱，Q：我去看电影，命题“当且仅当我有钱时，我才去看电影”符号化为___________________ 。

16. 设$\langle \{a, b\}, * \rangle$是群，且$a * a = b$，则$b * b =$_____________。

17. 命题公式$(p \vee \neg p) \to ((q \wedge \neg q) \wedge r)$是永（ ）式。

18. $P \leftrightarrow Q$的主析取范式中，含有（ ）个极小项。

19. 设集合$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$A$上有一个划分$\pi = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}\}$，那么$\pi$所对应的等价关系$R$应有（ ）个序偶。

20. 在有理数集合Q上定义二元运算*：$a * b = a + b - ab$，则$\langle Q, * \rangle$的幺元是（ ）。

21. 一个（ ）称为布尔代数。

22. 命题公式$(p \vee \neg p) \to ((q \wedge \neg q) \wedge r)$是永（ ）式。

23. $P \leftrightarrow Q$的主析取范式中，含有（ ）个极小项。

24. 设集合$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，$A$上有一个划分$\pi = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}\}$，那么$\pi$所对应的等价关系$R$应有（ ）个序偶。

25. 在有理数集合Q上定义二元运算*：$a * b = a + b - ab$，则$\langle Q, * \rangle$的幺元是（ ）。

26. 一个（ ）称为布尔代数。

27. $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的主析取范式是______________________________________。(写出一般

表示形式即可)

28．设集合$A=\{a,b,c,d\}$，R是A上的二元关系，且$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$，则$R$的传递闭包$t(R)=$____________________________。

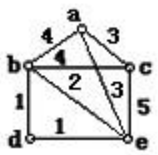
29．设集合$A=\{2,3,4,6,8,12\}$，R是A上的整除关系，则R的关系矩阵$M_R=$____________________,哈斯图为________________________。

30. 一个连通平面图有 9 个顶点，它们的度数分别为：2，2，2，3，3，3，4，4，5，则该图共有_______个面。

31. 集合$A=\{a,b,c\}$上可以定义的二元运算的个数是_______________。

三、解答题

1. 求带权值为 1, 3, 5, 5, 8, 12, 14, 19 的最优二叉树。(只要最终结果，不要求中间过程)(8 分)

2．求 

的最小生成树。(只要最终结果，不要求中间过程。) (8 分)

3. 设G是平面图，有n个顶点，m条边，f个面，k个连通分支，证明：$n-m+f=k+1$ (10 分)

4. 化简下列布尔表达式。 （1） $(a\cdot b)+(\bar{a}\cdot b\cdot \bar{c})+(b\cdot c)$ （2） $((a\cdot \bar{b})+c)\cdot(a+\bar{b})\cdot c$ （8 分）

5. 证明在格 $\langle L,\oplus,\otimes\rangle$ 中，$\le$ 是格 L 中的偏序关系，$a,b,c\in L$，若 $a\le b\le c$，则有 $(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$。（8 分）

6. 设 $A=\{a,b,c\}$，$P(A)$ 是 A 的幂集，$\oplus$ 是集合的对称差运算，已知 $\langle P(A),\oplus\rangle$ 是群，在群 $\langle P(A),\oplus\rangle$ 中，求：（1）关于运算 $\oplus$ 的幺元；（2） $P(A)$ 中每个元素的逆元；（3）求元素 x，使得 $\{a\}\oplus x=\{b\}$。（9 分）

7. 设 $\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$ 是半群，其运算表如下 （8 分）

证明：$\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$ 是循环群。

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

8. 设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和传递的，则$R \circ R = R$。 （8 分）

9. 设$\langle S_{75}, D \rangle$是格，其中$S_{75}$是 75 的的所有正因数的集合，$D$是$S_{75}$上的整除关系，求$S_{75}$中每个元素的余元素。 （8 分）

10. 证明等价式：$(P \to Q) \wedge (R \to Q) = (P \vee R) \to Q$。 （6 分）

11. 用推理规则证明：$C \vee D, (C \vee D) \to \neg P, \neg P \to (A \wedge \neg B), (A \wedge \neg B) \to (R \vee S) \Rightarrow R \vee S$。

12．设R是非空集合A上的二元关系，令$\alpha = I_A \cup R \cup R^{-1}$，证明：$\alpha$具有自反性，对称性。

13. 设$\langle G, * \rangle$是独异点，并且对于G中的每一个元素x，都有$x * x = e$，其中e是幺元，证明：$\langle G, * \rangle$是一个阿贝尔群。

14. 证明：循环群$G=(a)$是交换群。

15. 设$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$是一个格，$a,b\in L$，且$a\le b$，令 $S=\{x\in L \mid a\le x\le b\}$
其中$\le$是格L中的偏序关系，证明：$\langle S,\oplus,\otimes\rangle$是$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$的子格。

16. 证明在格$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$中，$\le$是格$L$中的偏序关系，$a,b,c\in L$，若$b\le a$，$c\le a$，则有$a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$。

17. 给定树叶的权为1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，试构造一棵最优二叉树。

18. 证明：若无向图G是不连通的，则其补图$\overline{G}$是连通的。

19．(10 分)求带权 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 的最优二叉树。

20. （10 分）设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，试求：(1) $P(A)$；　(2) R 的关系图与关系矩阵 M_R；　(3) $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$。

21．证明等价式：$(P\wedge Q\wedge A\rightarrow C)\wedge(A\rightarrow P\vee Q\vee C)=(A\wedge(P\leftrightarrow Q))\rightarrow C$。

22. 证明：树是一个偶图。

23. 设$\langle G, * \rangle$是群，对任意的$a \in G$，令$H = \{x \in G \mid x * a = a * x\}$，证明：$H$是$G$的子群。

24. 设R为实数集，$f : R \times R \to R \times R$，对任意的$\langle x, y \rangle \in R \times R$，定义：$f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$
证明：f是双射。

25. 设$\langle B, \oplus, * \rangle$是含幺环, 且*满足等幂律, 在$B$上定义运算+, •, $^{-}$如下:

$$a + b = a \oplus b \oplus (a * b),\quad a \cdot b = a * b,\quad \bar{a} = a \oplus 1$$

证明:$\langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$是一个布尔代数，其中 0 和 1 分别是关于运算$\oplus$和*的幺元。

26. 用推理规则证明： $A \to (B \vee C)$, $D \vee E \to A$, $D \vee E \Rightarrow B \vee C$ (10 分)

27. 设R是非空集合A上自反的二元关系，证明：R^{-1}也是自反的。(10 分)

28. 设G是整数加群，在G上定义：$a * b = a + b - 2$，证明：$\langle G, * \rangle$是交换群。(20 分)

29．设$\langle L, \oplus, \otimes \rangle$是一个格，$a, b \in L$，且$a \le b$，令$S = \{x \in L \mid a \le x \le b\}$

其中$\le$是格L中的偏序关系，证明：$\langle S, \oplus, \otimes \rangle$是$\langle L, \oplus, \otimes \rangle$的子格。(15 分)

30．给定树叶的权为 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，试构造一棵最优二叉树。(10 分)

31．假设一家化工厂要将多种化学产品利用铁路从精炼厂运到炼油厂，但是根据 EPA(美国环保署)的规定，这些化学产品不能全部都装在同一节车厢里运输，因为如果它们混和起来，就会产生剧烈反应，从而引发事故，为了使费用最低，厂长希望使用尽可能少的车厢，问最少使用多少车厢？其中共有六种化学产品，P_1不能与P_2、P_3或P_4在同节车厢里运输，P_2不能与P_3或P_5一起运输，P_3不能与P_4一起运输，P_5不能与P_6一起运输。(15 分)

32．用推理规则证明： $A \to (B \vee C)$, $D \vee E \to A$, $D \vee E \Rightarrow B \vee C$ (10 分)

33．设 R 是非空集合 A 上自反的二元关系，证明： R^{-1} 也是自反的。(10 分)

34．设 G 是整数加群，在 G 上定义： $a * b = a + b - 2$ ，证明： $\langle G, * \rangle$ 是交换群。(20 分)

35．设 $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ 是一个格， $a, b \in L$ ，且 $a \le b$ ，令 $S = \{x \in L \mid a \le x \le b\}$

其中 $\le$ 是格 L 中的偏序关系，证明： $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ 的子格。(15 分)

36．给定树叶的权为 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，试构造一棵最优二叉树。(10 分)

37．假设一家化工厂要将多种化学产品利用铁路从精炼厂运到炼油厂，但是根据 EPA(美国环保署)的规定，这些化学产品不能全部都装在同一节车厢里运输，因为如果它们混和起来，就会产生剧烈反应，从而引发

事故，为了使费用最低，厂长希望使用尽可能少的车厢，问最少使用多少车厢？其中共有六种化学产品，P_1不能与P_2、P_3或P_4在同节车厢里运输，P_2不能与P_3或P_5一起运输，P_3不能与P_4一起运输，P_5不能与P_6一起运输。(15 分)

38．(10 分)设σ是从群$\langle G_1, *\rangle$到群$\langle G_2, \Delta\rangle$的同态映射，$e_1$，$e_2$分别是群$\langle G_1, *\rangle$与$\langle G_2, \Delta\rangle$的幺元，令

$$H = \{x \in G_1 \mid \sigma(x) = e_2\}$$

证明：$\langle H, *\rangle$是群$\langle G_1, *\rangle$的子群。

39. (14 分)设$\langle G, *\rangle$是群，H是G的子群，在G上定义二元关系R如下：

对任意的$a, b \in G$，$\langle a, b\rangle \in R$当且仅当$a^{-1} * b \in H$

证明：(1) R是G上的等价关系；

(2) 对任意的$a \in G$，$[a]_R = aH$。

40．(10 分)用推理规则证明：$P, P \to (Q \to (R \wedge S)) \Rightarrow Q \to S$。

41. (10 分)设$G = \langle V, E\rangle$是n阶简单无向图，n是大于 2 的奇数，如果G中有k个奇数度的顶点，那么G的补图$\overline{G}$中奇数度的顶点也是k个。

42. (12 分)设f是从格$\langle L_1, \le_1\rangle$到格$\langle L_2, \le_2\rangle$的满同态映射，证明：若$\langle L_1, \le_1\rangle$是有界格，则格$\langle L_2, \le_2\rangle$也是有界格。

43．设在一次国际会议上有 7 个人，各懂的语言如下：

a：英语　　b：英语和西班牙语　　c：英语、汉语和俄语

d：日语和西班牙语　　e：德语和汉语　　f：法语、日语和俄语

g：法语和德语

（1）用无向简单图描述以上事实；

（2）他们中间是否任何两个人可对话(必要时通过别人作翻译)。

44．设$\langle S_{30}, D\rangle$是格，其中S_{30}是 30 的所有正因数的集合，D是S_{30}上的整除关系，则

（1）求每个元素的余元素；

（2）$\langle S_{30}, D\rangle$是否为有余格，是否为分配格？并说明理由。

《离散数学》练习题二

一、填空题

1．幂集$P(P(P(\Phi)))$是____________________________________ 。

2．集合$A=\{a, b\}$上可以定义的二元运算的个数是____________。

3．集合$A=\{a, b, c\}$上的关系$R=\{\langle a, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$的传递闭包$t(R)=$______________。

4．一个连通平面图有 8 个顶点，它们的度数分别为：2，2，3，3，3，4，4，5，则该图共有________个面。

5．设集合$A=\{3, 4, 6, 8, 12, 36\}$，R是A上的整除关系，则R的关系矩阵$M_R=$____________，

哈斯图为____________________________________。

6．设 p：我们勤奋，q：我们好学，r：我们取得好成绩。命题“只要勤奋好学，我们就能取得好成绩”符号化为______________。

7．某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是___________。

8. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$，则 R 的对称闭包 $s(R)$=________________。

9. 设 A、B 是集合，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则 A 到 B 的单射函数有__________个。

10. 整数加法群的幺元是_________。

11. 设 $\langle L,\leq\rangle$ 是分配格，若对任意的 $a,b,c\in L$，都有 $a\oplus b=a\oplus c,a\otimes b=a\otimes c$，则___________。

12. 任何简单图中顶点的度数之和等于边数的_______倍。

13. 当 n 为______数时，K_n 必为欧拉图 $(n\geq 2)$。

14．设 P：我有钱，Q：我去看电影，命题“如果我有钱，那么我就去看电影”符号化为________________。

15．某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是____________。

16. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，R 是 A 上的二元关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$，则 R 的传递闭包 $t(R)$=________________________________。

17. 设 A、B 是集合，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则 A 到 B 的单射函数有______________个。

18. 整数加法群的幺元是___________。

19. 设 $\langle L,\leq\rangle$ 是分配格，若对任意的 $a,b,c\in L$，都有 $a\oplus b=a\oplus c,a\otimes b=a\otimes c$，则______________。

20. 无向图 G 中具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，并且所有顶点的度数都是____________。

21. 若连通简单平面图 G 有 4 个顶点，3 个面，则 G 有________条边。

22. 设 A、B 是集合，其中 $A=\{1,4\}$，$B=\{2,4\}$，则 $P(A)-P(B)=$__________________________。

23．集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$ 的传递闭包 $t(R)=$______________。

24. 设A是非空集合，则$\langle P(A),\cap\rangle$中的幺元是________，零元是__________。

25. 若连通简单平面图G有 6 个顶点，3 个面，则G有__________条边。

26. 设$\langle L,\le\rangle$是格，其中$L=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，$\le$是整除关系，则 3 的补元是______，6 的补元是________。

27. 设A、B是集合，若$|A|=2$，$|B|=3$，则A到B的单射函数有________个。

28．设集合$A=\{a\}$，则$P(P(A))=$______________________。

29．设集合$A=\{a,b,c,d\}$，R是A上的二元关系，且$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$，则$R$的传递闭包$t(R)$=______________________________。

30. 若连通平面简单图G有 4 个顶点，3 个面，则G有________条边。

31. 设A是非空集合，则$\langle P(A),\cup\rangle$中的幺元是________，零元是__________。

32. 设$\langle L,\le\rangle$是格，其中$L=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，$\le$是整除关系，则 8 的补元是______，4 的补元是________。

33. 已知集合A和B，且$|A|=n$，$B=|m|$，则从A到B有________个二元关系，从A到B有个映射。

二、单项选择题

1．下列集合运算中________是正确的。

A. $\Phi\cup\{\Phi\}=\Phi$

B. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\{\{\Phi\}\}=\{\Phi\}$

C. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\{\{\Phi\}\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$

D. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\Phi=\{\{\Phi\}\}$

2．下面__________是重言式。

A. $P\to(Q\vee R)$

B. $(P\vee R)\wedge(P\to Q)$

C. $(P\vee Q)\leftrightarrow(Q\vee R)$

D. $(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

3. $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的主析取范式是____A____。

A. $(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$　　B. $(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

C. $(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$　　D. $(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge Q)$

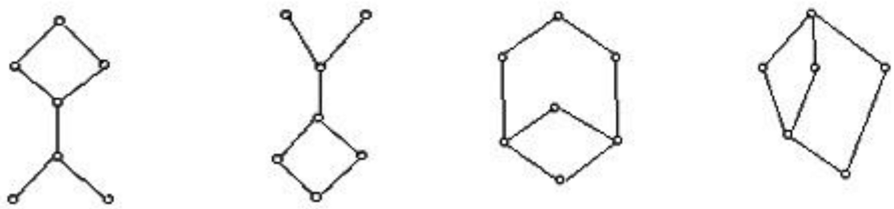
4. 若$\langle G,*\rangle$是一个群，则运算“*”一定满足________。

A. 交换律　B. 消去律　C. 幂等律　D. 分配律

5．设I是整数集合，下列集合中________关于数的加法和乘法构成整环。

A．$\{2n \mid n\in I\}$　B．$\{2n+1 \mid n\in I\}$　C．$\{n \mid n\geq 0, n\in I\}$　D．I

6．如下的哈斯图所示偏序集为格的是________。



A　B　C　D

7．设$S=\{1,2,3,4,5\}$，则下列集合中等于S的是________。

A．$\{1,2,3,4\}$　　B．$\{x|x\text{是有理数}, x^2\leq 25\}$

C．$\{x|x\text{是正整数}, x\leq 5\}$　　D．$\{x|x\text{是有理数}, x\leq 5\}$

8．下列公式中，________是析取范式。

A. $\neg(p\wedge q)$　　B. $\neg(p\vee q)$

C. $(p\vee q)\wedge\neg p$　　D. $p\wedge q$

9. 下列语句中为命题的是________。

A. 今天是阴天；　　B. 你身体好吗？

C. 我真快乐；　　D. 请不要走。

10. 设G是连通简单平面图，G中有 6 个顶点 8 条边，则 G 的面的数目是________。

A．2 个面　B．3 个面　C．4 个面　D．5 个面

11. 设R，S是集合A上的二元关系，称关系$S=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\}$为$R$的________关系。

A. 交　B. 并　C. 补　D.逆

12. 下面集合中，____________关于数的减法是封闭的。

A. $N=\{全体自然数\}$　　B. $\{2x \mid x\in Z\}$

C. $\{2x+1 \mid x\in Z\}$　　D. $\{x \mid x是质数\}$

13. 设 A 是有界格，若它也是有余格，只要____________。

A. 每一个元素有一个余元　　B. 每一个元素至少有两个余元

C. 每一个元素无余元　　D. 每一个元素仅有一个余元

14. 设集合 $E=\{0,1,2,3\}$，则下面集合与 E 相等的是______________ 。

A. $\{x\in R \mid x-3=0\}$　　B. $\{x\in R \mid x^2=-9\}$

C. $\{x\in R \mid x^2+5x+6=0\}$　　D. $\{x\in N \mid 0\le x\le 3\}$

15. 下列公式中，_____________是关于两个命题变元 p，q 的极小项。

A. $p\wedge\neg p\wedge q$　　B. $\neg p\vee q$

C. $\neg p\wedge q$　　D. $\neg p\vee p\vee q$

16. 下列语句中不是命题的是______________。

A. 3 是奇数　　B. 请勿吸烟　　C. 我是中学生　　D. 4+3>5

17. 数的加法在下列______________集合上是封闭的。

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{a+b \mid a,b\in Z\}$　　D. $\{x \mid x是奇数\}$

18. 给定下列序列，可构成无向简单图的顶点度数序列的是_____________。

A. $(1,1,2,2,3)$　　B. $(1,1,2,2,2)$

C. $(0,1,3,3,3)$　　D. $(1,3,4,4,5)$

19. 若 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，则运算“$*$”一定满足____________。

A. 交换律　　B. 消去律　　C. 幂等律　　D. 分配律

20. 设 R 是非空集合 A 上的关系，则 R 的对称闭包 $s(R)$=______________。

A. $R\cup R^{-1}$　　B. $I_A\cup R$　　C. $R-I_A$　　D. $R\cap R^{-1}$

21. 下列集合运算中______________是正确的。

A. $\Phi\cup\{\Phi\}=\Phi$　　B. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\{\{\Phi\}\}=\{\Phi\}$

C. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\{\{\Phi\}\}=\{\Phi,\{\Phi\}\}$　　D. $\{\Phi,\{\Phi\}\}-\Phi=\{\{\Phi\}\}$

22．下面的二元关系中，______________具有传递性。

A. 父子关系　　B. 朋友关系

C. 集合的包含关系　　D. 实数的不相等关系

23. 设Z是整数集，且设$f:Z\times Z\to Z$，对每一个$\langle a,b\rangle\in Z\times Z$，有$f(\langle a,b\rangle)=a^2b$， 元素 0 的原象的集合为________。

A．$(\{0\}\times Z)\cup(Z\times\{0\})$　　B．$Z\times\{0\}$

C．$\{0\}\times Z$　　D．$(\{0\}\times Z)\cap(Z\times\{0\})$

24. 数的加法在下列集合中______________上是封闭的。

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,1\}$

C．$\{a+b \mid a,b\in Z\}$　　D．$\{x \mid x\text{是奇数}\}$

25. 设无向树T由 3 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点。其余顶点都是树叶，则T有______________片树叶。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

26. 设命题P，Q的真值是 0，命题R，S的真值是 1，则下列公式中真值为 1 的是______________。

A. $R\to P$　　B. $Q\wedge S$　　C. $P\leftrightarrow S$　　D. $Q\vee R$

27．设$M=\{x \mid f_1(x)=0\}$，$N=\{x \mid f_2(x)=0\}$，则方程$f_1(x)\cdot f_2(x)=0$的解集是____________。

A．$M\cap N$　　B．$M\cup N$　　C．$M\oplus N$　　D．$M-N$

28．设R是非空集合A上的关系，则R的对称闭包$s(R)$=______________。

A. $I_A\cup R$　　B. $R-I_A$　　C. $R\cap R^{-1}$　　D. $R\cup R^{-1}$

29. 数的加法在下列集合中______________上是封闭的。

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{a+b \mid a,b\in Z\}$　　D. $\{x \mid x\text{是奇数}\}$

30. 给定下列序列，可构成无向简单图的顶点度数序列的是____________。

A. $(1,1,2,2,3)$　　B. $(1,1,2,2,2)$

C. $(0,1,3,3,3)$　　D. $(1,3,4,4,5)$

31. 设Z是整数集，且设$f:Z\times Z\to Z$，对每一个$\langle a,b\rangle\in Z\times Z$，有$f(\langle a,b\rangle)=a^2b$，元素 0 的原象的集合为__________。

A. $(\{0\}\times Z)\cup(Z\times\{0\})$　　B. $Z\times\{0\}$

C. $\{0\}\times Z$　　D. $(\{0\}\times Z)\cap(Z\times\{0\})$

32. 命题公式$P\to(Q\to P)$为________________。

A.重言式　　B.可满足式　　C.矛盾式　　D.等价式

三、判断题

1．若$A\subseteq B$，则必有$A\cup B=B$。(　　　　)

2．一个不是自反的关系，一定是反自反的。(　　　　)

3. 凡陈述句都是命题。(　　　　)

4．有限半群必存在等幂元。(　　　　)

5. 任何非平凡无向图中的奇数度顶点的个数是偶数。(　　　　)

6．设A，B，C，D均为非空的集合，已知$A\subseteq B$且$C\subseteq D$，则一定有$A\cup C\subseteq B\cup D$。(　　　　)

7．一个不是自反的关系，一定是反自反的。(　　　　)

8．“王兰和王英是姐妹”是复合命题。(　　　　)

9．设$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$是代数格，它所诱导的偏序格为$\langle L,\leq\rangle$，则对任意的$a,b\in L$，$a\oplus b=b$当且仅当$a\otimes b=a$。(　　　　)

10．任何非平凡树T都至少有两片树叶。(　　　　)

11．设$\langle A,\leq\rangle$是偏序集，B是A的非空子集，若B有上界，则B必有最小上界。(　　　　)

12．在有界分配格中，一个元素若有补元，则补元一定是唯一的。(　　　　)

13. “王兰和王英是姐妹”是复合命题。(   )

14．若半群存在左幺元，则左幺元是唯一的。(   )

15. 具有两个或多个元素的格中不存在以自身为补元的元素。(   )

16. 两个无向图同构的充分必要条件是它们的顶点个数与边的个数分别相等。(   )

四、解答题

1．(10 分) 设 $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$，$G$ 上的二元运算为矩阵的乘法运算，求

(1) $\langle G,*\rangle$ 的运算表；

(2) $\langle G,*\rangle$ 的所有子群；

2. (14 分) 设 $\langle G,*\rangle$ 是一个群，定义集合G上的一个关系 R 如下：

$$R=\left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, x,y\in G,\ \exists a\in G,\ \ni y=a*x*a^{-1}\right\}$$

证明：R 是集合G上的一个等价关系。

3. (12 分) 设 f 是从格 $\langle L_1,\leq_1\rangle$ 到格 $\langle L_2,\leq_2\rangle$ 的满同态映射，证明：若 $\langle L_1,\leq_1\rangle$ 是有界格，则格 $\langle L_2,\leq_2\rangle$ 也是有界格。

4. (10 分) 试用推理规则证明：$\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S),(Q\to P)\vee\neg R$，$R\Rightarrow P\leftrightarrow Q$

5. (10 分) 设 G 是连通简单图，其中每个顶点的度数都是偶数，则对于任一顶点 v，图 $G-\{v\}$ 的连通分支数小于等于 v 的度数的一半。

6．设 $\langle S_{45},D\rangle$ 是格，其中 S_{45} 是 45 的所有正因数的集合，D 是 S_{45} 上的整除关系，则

(1) 求每个元素的余元素；

(2) $\langle S_{45},D\rangle$ 是否为有余格，是否为分配格？并说明理由。

7. 洛杉矶地区有 7 家汽车旅游公司，在一天中每家公司最多参观下列景点中的三个不同景点，这些景点是好莱坞、贝弗利山、迪斯尼乐园和通用电影制片厂，同一天中，参观一个景点的旅游公司不能超过一个，第一家旅游公司只参观好莱坞，第二家公司只参观好莱坞和迪斯尼乐园，第三家公司只参观通用电影制片厂，第四家只参观迪斯尼乐园和通用电影制片厂，第五家只参观好莱坞和贝弗利山，第六家只参观贝弗利山和通用电影制片厂，第七家只参观迪斯尼乐园和贝弗利山。请问这些游览可以只安排在星期一、星期三和星期五吗？

8．设 A、B 是命题公式，试用两种方法分别证明等价式：$\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$。

9．设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是自反的，证明：$t(R)$ 是自反的。

10. 设 R 为实数集，σ：$R \times R \to R$，对任意的 $\langle x, y\rangle \in R \times R$，令 $\sigma(\langle x, y\rangle) = x + y$，证明：$\sigma$ 是满射，并说明 σ 不是单射。

11. 证明：任一序集都是格。

12. 求带权 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的最优二叉树。

13. 设 $\langle H, *\rangle$ 和 $\langle K, *\rangle$ 都是群 $\langle G, *\rangle$ 的子群，令

$$HK = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}，\quad KH = \{k * h \mid k \in K, h \in H\}$$

证明 $\langle HK, *\rangle$ 是 $\langle G, *\rangle$ 的子群的充要条件是 $HK = KH$。

14. 设 R 为实数集，σ：$R \times R \to R$，对任意的 $\langle x, y\rangle \in R \times R$，令 $\sigma(\langle x, y\rangle) = x \cdot y$，证明 σ 是满射，并说明 σ 不是单射。

15．设A、B是命题公式，试用两种方法分别证明等价式：$\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$。

16．证明：三个元素以上的链不是有余格。

17．求带权 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的最优二叉树。

18．设R是非空集合A上的二元关系，若R是自反的，证明：$s(R)$是自反的。

19．设$A = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in I\}$，其中$I$是整数集合，证明：$\langle A, +, \cdot \rangle$是整环，其中运算“+”和“•”是关于数的普通加法和乘法。

20．(10 分)用推理规则证明：$A \vee B \to C \wedge D$，$D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$。

21．(20 分) 设$\langle B, \oplus, * \rangle$是含幺环，且$*$满足等幂律，在$B$上定义运算+，•，$^-$如下：

$$a + b = a \oplus b \oplus (a * b),\quad a \cdot b = a * b,\quad \bar{a} = a \oplus 1$$

证明:$\langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$是一个布尔代数，其中 0 和 1 分别是关于运算$\oplus$和$*$的幺元。

22．(15 分)证明：在$K_n (n \succ 5)$中任意删去$n-3$条边后所得到的图是哈密尔顿图。

	1	2	3	4	5	6	7
1	−	4	−	6	2	−	3
2		−	5	2	−	3	1
3			−	7	−	2	2
4				−	4	1	−

5					−	1	−
6						−	2
7							−

23. (5 分) Gladbrook 饲料公司有 7 个谷物箱，要通过谷物管道将它们连接起来，以使谷物能从任意一个箱子转移到其它箱子，为了使建造费用最少，希望建造尽可能少的管道，在两个箱子之间建造管道的费用(以 10 万美元计)由下表给出，其中“-”表示不能建造管道，应该怎样建造管道才能使费用最少。

24. (15 分) 给定群 $\langle I_6, +_6 \rangle$，其中 $I_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$，$+_6$ 是 I_6 上的模 6 加法运算，试求：

(1) I_6 的所有生成元；

(2) I_6 的所有子群；

(3) 每个子群的所有右陪集。

25. (5 分) 设集合 $A = \{a, b, c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$，试求 R 的关系图与关系矩阵 M_R。

26. (5 分) 设集合 $A = \{a, b, c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$，试求 R 的关系图与关系矩阵 M_R。

27. (15 分) 给定群 $\langle I_{15}, +_{15} \rangle$，其中 $I_{15} = \{0,1,2,\cdots,14\}$，$+_{15}$ 是 I_{15} 上的模 15 加法运算，试求：

(1) I_{15} 的所有生成元；

(2) I_{15} 的所有子群；

(3) 每个子群的所有右陪集。

28. (5 分) 试用克鲁斯卡尔算法求下列表格所确定的权图的最小支撑树。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	/	479	1463	2007	695	283
v_2	479	/	966	1567	666	301
v_3	1463	966	/	837	998	1267

v_4	2007	1567	837	/	1213	1724
v_5	695	666	998	1213	/	412
v_6	283	301	1267	1724	412	/

29．（15 分）证明：如果G是一个具有奇数个顶点的偶图，则G不是哈密尔顿图。

30．（10 分）用推理规则证明：$\neg A \vee B$，$C \to \neg B \Rightarrow A \to \neg C$

31．（20 分）设$\langle B,+,\cdot,{}^{-},0,1\rangle$是一个布尔代数，在$B$上定义运算$*$，$\times$如下：

$$a*b = a\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot b，\quad a\times b = a\cdot b$$

证明:$\langle B,*,\times\rangle$ 是含幺交换环。

《离散数学》练习题一答案

一、单项选择题（每小题 2 分，共 8 分）

1—5 . D C B C C　　6—10 . A B D C A

11—15 C B C D A　　16—20 **C C B D C**

21—25 C C B D C　　**26—30.** D C B A D

31. C

二、填空题（每空 1 分，共 11 分）

1. $\underline{\quad n^n \quad}$　　2. P、Q 的真值同时为 1

3.

$*$	a	b	c
a	c	a	b

b	a	b	c
c	b	c	a

4. 奇　　5. 12　　6. $P \wedge \neg Q$　　7. 9

8. $P \to \neg Q$　　9. P ，Q 的真值都为 0

10. $A \subseteq C$, $B \subseteq D$　　11. 0　　12. $b = c$

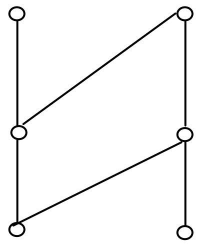
13. 14　　14. c　　15. $Q \leftrightarrow P$ 或 $P \leftrightarrow Q$　　16. b　17. 假　　18. 2

19. 17　　20. 0　　21. 有余(补)分配格　　22. 假　　23. 2　　24. 17　　25. 0

26. 有余(补)分配格　　27. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

28. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$

29. $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



30. 7

31. $3^9 = 19683$

三、解答题（共 81 分）

3. (10 分) 设 G 是平面图，有 n 个顶点，m 条边，f 个面，k 个连通分支，证明：$n - m + f = k + 1$。

证明：对于图 G 的每个连通分支都是连通平面图，因此由欧拉公式，有

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2$$

$$n_2 - m_2 + f_2 = 2$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$n_k - m_k + f_k = 2$$

其中 n_i , m_i , f_i 分别是第 i 个连通分支中的顶点数、边数和面数，则

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n \text{ ，} m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m \text{ ，} f_1 + f_2 + \cdots + f_k = f + k - 1$$

将上述k个等式相加，有$n-m+f+k-1=2k$，即

$$n-m+f=k+1$$

4.（8 分）化简下列布尔表达式。

（1）$(a\cdot b)+(\bar{a}\cdot b\cdot \bar{c})+(b\cdot c)$　　　　（2）$((a\cdot \bar{b})+c)\cdot(a+\bar{b})\cdot c$

解：（1）$(a\cdot b)+(\bar{a}\cdot b\cdot \bar{c})+(b\cdot c)=b\cdot(a+\bar{a}\cdot\bar{c}+c)=b\cdot(a+c+\overline{a+c})=b\cdot 1=b$

（2）$((a\cdot \bar{b})+c)\cdot(a+\bar{b})\cdot c=((a\cdot \bar{b})+c)\cdot c\cdot(a+\bar{b})=c\cdot(a+\bar{b})$

5.（8 分）证明在格中，若$a\le b\le c$，则有$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$。

证明：因为$a\le b\le c$，所以$a\otimes b=a$，$b\otimes c=b$，$a\oplus b=b$，$a\oplus c=c$，

因此$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=a\oplus b=b$，$(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)=b\otimes c=b$

故$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$

6.（9 分）设$A=\{a,b,c\}$，$P(A)$是A的幂集，$\oplus$是集合的对称差运算，已知$\langle P(A),\oplus\rangle$是群，在群$\langle P(A),\oplus\rangle$中，求：

（1）关于运算$\oplus$的幺元；　（2）$P(A)$中每个元素的逆元；　（3）求元素x，使得$\{a\}\oplus x=\{b\}$。

解：（1）$\exists\Phi\in P(A)$，对于任意的$x\in P(A)$，有$x\oplus\Phi=x$，所以关于运算$\oplus$的幺元是Φ。

（2）对于任意的$x\in P(A)$，有$x\oplus x=\Phi$，所以x的逆元是其自身。

（3）$x=\{a,b\}$，使得$\{a\}\oplus x=\{b\}$。

7.（8 分）设$\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$是半群，其运算表如下

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

证明：$\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$是循环群。

证明：从运算表可知，a是幺元，b与d互为逆元，c以自身为逆元，所以

$\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$是群。

因为$b^2=c$，$b^3=d$，$b^4=a$，所以b是生成元，则$\langle\{a,b,c,d\},*\rangle$是循环群。

8.（8 分）设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和传递的，则$R\circ R=R$。

证明：由于R是传递的，必有$R\circ R\subseteq R$。

对任意的$\langle x,y\rangle \in R$，因为R是自反的，有$\langle x,x\rangle \in R$，从而$\langle x,y\rangle \in R\circ R$，所以$R\subseteq R\circ R$。

综上知，$R\circ R=R$。

9. (8 分) 设$\langle S_{75},D\rangle$是格，其中S_{75}是 75 的的所有正因数的集合，D是S_{75}上的整除关系，求S_{75}中每个元素的余元素。

解：由格$\langle S_{75},D\rangle$的哈斯图可知：1 与 75 互为余元素，3 与 25 互为余元素，而 5 和 15 没有余元素。

10. (6 分) 证明等价式：$(P\to Q)\wedge(R\to Q)=(P\vee R)\to Q$。

证明：$(P\to Q)\wedge(R\to Q)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)$

$$=(\neg P\wedge\neg R)\vee Q=\neg(P\vee R)\vee Q$$

$$=(P\vee R)\to Q$$

11．用推理规则证明：$C\vee D,(C\vee D)\to\neg P,\neg P\to(A\wedge\neg B),(A\wedge\neg B)\to(R\vee S)\Rightarrow R\vee S$。

证明：(1) $C\vee D$ P

(2) $(C\vee D)\to\neg P$ P

(3) $\neg P$ T (1) (2) I

(4) $\neg P\to(A\wedge\neg B)$ P

(5) $A\wedge\neg B$ T (3) (4) I

(6) $(A\wedge\neg B)\to(R\vee S)$ P

(7) $R\vee S$ T (5) (6) I

12．设R是非空集合A上的二元关系，令$\alpha=I_A\cup R\cup R^{-1}$，证明：$\alpha$具有自反性，对称性。

证明：显然$I_A\subseteq\alpha$，所以α是自反性的。

又

$$\alpha^{-1}=\left(I_A\cup R\cup R^{-1}\right)^{-1}=I_A{}^{-1}\cup R^{-1}\cup\left(R^{-1}\right)^{-1}=I_A\cup R^{-1}\cup R=\alpha$$

所以α是对称的。

13. 设$\langle G,*\rangle$是独异点，并且对于G中的每一个元素x，都有$x*x=e$，其中e是幺元，证明：$\langle G,*\rangle$是一个阿贝尔群。

证明：由$x*x=e$可知，G中的每一个元素都以自身为逆元，所以$\langle G,*\rangle$是群。

对任意的$x,y\in G$，有

$$x*y=(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}=y*x$$

所以运算∗是可交换的，因此，$\langle G, *\rangle$是一个阿贝尔群。

14. 证明：循环群$G=(a)$是交换群。

证明：对任意的$x, y \in G$，不妨令$x=a^k$，$y=a^l$，其中$k, l \in I$，则

$$x * y=a^k * a^l=a^{k+l}=a^{l+k}=a^l * a^k=y * x$$

因此循环群$G=(a)$是交换群。

15. 设$\langle L, \oplus, \otimes\rangle$是一个格，$a, b \in L$，且$a \leq b$，令

$$S=\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$

其中$\leq$是格L中的偏序关系，证明：$\langle S, \oplus, \otimes\rangle$是$\langle L, \oplus, \otimes\rangle$的子格。

证明：对任意的$x, y \in S$，则有$a \leq x \leq b$，$a \leq y \leq b$，从而有

$$a \oplus a \leq x \oplus y \leq b \oplus b \text{ , } a \otimes a \leq x \otimes y \leq b \otimes b$$

即

$$a \leq x \oplus y \leq b \text{ , } a \leq x \otimes y \leq b$$

因此$x \oplus y, x \otimes y \in L$，故运算$\oplus, \otimes$在$S$上是封闭的，所以$\langle S, \oplus, \otimes\rangle$是$\langle L, \oplus, \otimes\rangle$的子格。

16. 证明在格$\langle L, \oplus, \otimes\rangle$中，$\leq$是格$L$中的偏序关系，$a, b, c \in L$，若$b \leq a$，$c \leq a$，则有$a \otimes(b \oplus c)=(a \otimes b) \oplus(a \otimes c)$。

证明：因为$b \leq a$，$c \leq a$,，所以

$$a \otimes b=b \text{，} a \otimes c=c \text{，} b \oplus c \leq a$$

因此$a \otimes(b \oplus c)=b \oplus c=$右边，故$(a \otimes b) \oplus(b \otimes c)=(a \oplus b) \otimes(a \oplus c)$。

18. 证明：若无向图G是不连通的，则其补图$\overline{G}$是连通的。

证明：因为G是不连通的，则G至少有两个连通分支，对于其中任意两个顶点u，v

（1）u，v在同一个连通分支中，则在另一个连通分支中任取一点w，u与w以及v与w在G中皆是不相邻的，因而u与w以及v与w在$\overline{G}$中都是相邻的，那么在$\overline{G}$中找到一条从u到v的路。

（2）u，v不在同一个连通分支中，u与v在G中是不相邻的，因而u与v在$\overline{G}$中是相邻的，从而在$\overline{G}$中找到一条从u到v的路。

综上，图$\overline{G}$中任意两点之间都存在路，所以$\overline{G}$是连通的。

20.（10 分）设集合 $A=\{a,b,c\}$， R 是 A 上的二元关系， $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，试求：

(1) $P(A)$；

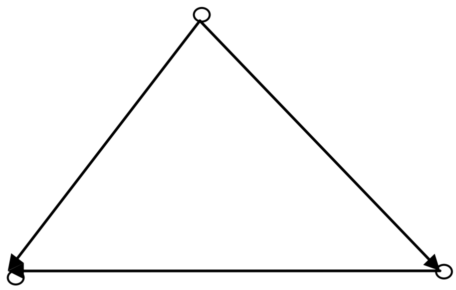
(2) R 的关系图与关系矩阵 M_R；

(3) $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$。

解：(1) $P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(2) $M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

关系图为：



(3) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}=R$

21．（10 分）证明等价式：

$$(P\wedge Q\wedge A\rightarrow C)\wedge(A\rightarrow P\vee Q\vee C)=(A\wedge(P\leftrightarrow Q))\rightarrow C$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q \wedge A \to C) \wedge (A \to P \vee Q \vee C) \\
&= (\neg(P \wedge Q \wedge A) \vee C) \wedge (\neg A \vee P \vee Q \vee C) \\
&= (\neg A \vee \neg P \vee \neg Q \vee C) \wedge (\neg A \vee P \vee Q \vee C) \\
&= ((\neg A \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg A \vee P \vee Q)) \vee C \\
&= (\neg A \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))) \vee C \\
&= \neg(\neg A \vee ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))) \to C \\
&= (A \wedge \neg((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))) \to C \\
&= (A \wedge ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))) \to C \\
&= (A \wedge (P \leftrightarrow Q)) \to C
\end{aligned}
$$

22. （10 分）证明：树是一个偶图。

证明：设$T = \langle V, E \rangle$是一棵树，对任意的$u \in V$，令

$$V_1 = \{v \in V | v\text{与}u\text{之间的基本通路的长度为奇数}\}$$
$$V_2 = \{v \in V | v\text{与}u\text{之间的基本通路的长度为偶数}\}$$

（1）因为T是连通的，所以对任意的$v \in V$，必有$v \in V_1$或$v \in V_2$，因此$V_1 \cup V_2 = V$，（2）因为T是树，v与u之间的基本通路有且只有一条，所以$V_1 \cap V_2 = \Phi$，

（3）因为T是树，T中无回路，所以V_1或V_2中的任意的两个顶点不可能是相邻的。

综上，T是一个偶图。

23.（10 分）设$\langle G, * \rangle$是群，对任意的$a \in G$，令$H = \{x \in G \mid x * a = a * x\}$，证明：$H$是$G$的子群。

证明：对任意的$x, y \in H$，有

$$x * a = a * x \quad , \quad y * a = a * y$$

所以

$$y^{-1} * y * a * y^{-1} = y^{-1} * a * y * y^{-1}$$

经整理，得

$$a * y^{-1} = y^{-1} * a *$$

所以

$$(x * y^{-1}) * a = x * (y^{-1} * a) = x * (a * y^{-1}) = (x * a) * y^{-1} = (a * x) * y^{-1} = a * (x * y^{-1})$$

因此$x*y^{-1}\in H$，由子群判定定理，H是G的子群。

24.（10 分）设R为实数集，$f:R\times R\to R\times R$，对任意的$\langle x,y\rangle\in R\times R$，定义：

$$f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$$

证明：f是双射。

证明：(1) 对任意的$\langle x,y\rangle\in R\times R$，存在$\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle\in R\times R$，使得

$$f\left(\left\langle\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right\rangle\right)=\langle x,y\rangle$$

所以f是满射。

(2) 对任意的$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in R\times R$，若$f(\langle x,y\rangle)=f(\langle u,v\rangle)$，即

$$\langle x+y,x-y\rangle=\langle u+v,u-v\rangle$$

所以，有

$$\begin{cases}x+y=u+v\\x-y=u-v\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}x=u\\y=v\end{cases}$$

即

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$$

因此f是单射。

综上，f是双射。

25.（10 分）设$\langle B,\oplus,*\rangle$是含幺环, 且*满足等幂律, 在$B$上定义运算+, •, $^-$ 如下:

$$a+b=a\oplus b\oplus(a*b),\quad a\cdot b=a*b,\quad \bar{a}=a\oplus 1$$

证明:$\langle B,+,\cdot,^-,0,1\rangle$是一个布尔代数，其中 0 和 1 分别是关于运算$\oplus$和*的幺元。

证明：(1) 由题设条件可知，运算+和 • 在B上是封闭的。

(2) 对任意的$a,b\in B$，由书上习题结论，有

$$a\oplus a=0$$

$$a*b=b*a$$

从而有

$$a+b=b+a$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

即，运算+和・在 B 上是可交换的。

(3) 对任意的 $a,b,c\in B$，有

$$a\cdot(b+c)=a*(b\oplus c\oplus b*c)=a*b\oplus a*c\oplus a*b*c$$

$$(a\cdot b)+(a\cdot c)=a*b\oplus a*c\oplus a*b*a*c=a*b\oplus a*c\oplus a*b*c$$

即

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

所以运算・对+是可分配的。

另外

$$a+(b\cdot c)=a\oplus b*c\oplus a*b*c$$

$(a+b)\cdot(a+c)$

$=(a\oplus b\oplus a*b)*(a\oplus c\oplus a*c)$

$$=a*a\oplus a*c\oplus a*a*c\oplus b*a\oplus b*c\oplus b*a*c\oplus a*b*a\oplus a*b*c\oplus a*b*a*c$$

$=a\oplus a*c\oplus a*c\oplus a*b\oplus b*c\oplus a*b*c\oplus a*b\oplus a*b*c\oplus a*b*c$

$=a\oplus b*c\oplus a*b*c$

即

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot a+c$$

所以运算+对・是可分配的。

(4) 对任意的 $a\in B$，有

$$a\cdot 1=a*1=a$$

$$a+0=a\oplus 0\oplus a*0=a\oplus 0=a$$

(5) 对任意的 $a\in B$，有

$$a+\overline{a}=a\oplus a\oplus 1\oplus(a*(a\oplus 1))=0\oplus 1\oplus a*a\oplus a*1=1\oplus a\oplus a=1\oplus 0=1$$

$$a\cdot\overline{a}=a*(a\oplus 1)=a*a\oplus a*1=a\oplus a=0$$

综上，由亨廷顿公理，$\langle B,+,\cdot,\bar{},0,1\rangle$ 是布尔代数。

26．（10 分）用推理规则证明：$A \to (B \vee C)$，$D \vee E \to A$，$D \vee E \Rightarrow B \vee C$

证明：（1） $A \to (B \vee C)$ P

（2） $D \vee E \to A$ P

（3） $D \vee E \to B \vee C$ T（1）（2）I

（4） $D \vee E$ P

（5） $B \vee C$ T（3）（4）I

27．（10 分）设 R 是非空集合 A 上自反的二元关系，证明：R^{-1} 也是自反的。

证明：因为 R 是自反的，所以 $I_A \subseteq R$，则 ${I_A}^{-1} \subseteq R^{-1}$，故 R^{-1} 也是自反的。

28．（20 分）设 G 是整数加群，在 G 上定义：$a*b = a+b-2$，证明：$\langle G,*\rangle$ 是交换群。

证明：由题设，运算$*$在 G 上是封闭的。

对任意的 $a,b,c \in G$，有

$$(a*b)*c = (a+b-2)*c = a+b-2+c-2 = a+b+c-4$$

$$a*(b*c) = a*(b+c-2) = a+b+c-2-2 = a+b+c-4$$

则 $a*(b*c) = (a*b)*c$，即运算$*$是可结合的。

对任意的 $a,b \in G$，有

$$a*b = a+b-2 = b+a-2 = b*a$$

所以运算$*$是可交换的。

$\exists 2 \in G$，对任意的 $a \in G$，有

$$2*a = a*2 = a+2-2 = a$$

所以 2 是关于运算$*$的幺元。

对任意的 $a \in G$，$\exists 4-a \in G$，有

$$a*(4-a) = (4-a)*a = a+4-a-2 = 2$$

所以关于运算$*$，元素 a 的逆元是 $4-a$。

综上，$\langle G,*\rangle$ 是交换群。

29. （15 分）设$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$是一个格，$a,b\in L$，且$a\le b$，令

$$S=\{x\in L\mid a\le x\le b\}$$

其中$\le$是格L中的偏序关系，证明：$\langle S,\oplus,\otimes\rangle$是$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$的子格。

证明：对任意的$x,y\in S$，则有$a\le x\le b$，$a\le y\le b$，从而有

$$a\oplus a\le x\oplus y\le b\oplus b\ ,\ a\otimes a\le x\otimes y\le b\otimes b$$

即

$$a\le x\oplus y\le b\ ,\ a\le x\otimes y\le b$$

因此$x\oplus y, x\otimes y\in L$，故运算$\oplus,\otimes$在$S$上是封闭的，所以$\langle S,\oplus,\otimes\rangle$是$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$的子格。

30. 证明在格$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$中，$\le$是格$L$中的偏序关系，$a,b,c\in L$，若$a\le b\le c$，则有$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$。

证明：因为$a\le b\le c$，所以

$$a\otimes b=a,\ b\otimes c=b,\ a\oplus b=b,\ a\oplus c=c$$

因此

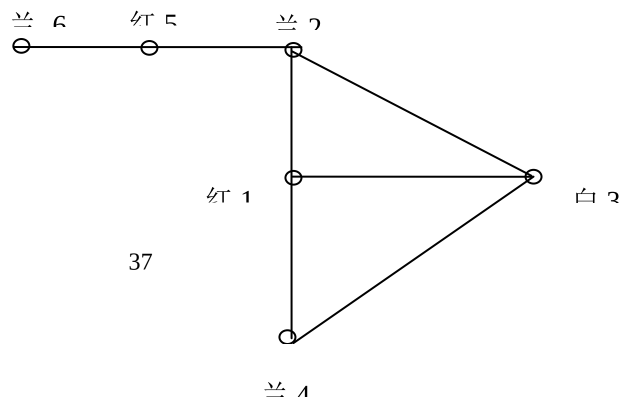
$$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=a\oplus b=b,\ (a\oplus b)\otimes(a\oplus c)=b\otimes c=b$$

故

$$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$$

31. （15 分）假设一家化工厂要将多种化学产品利用铁路从精炼厂运到炼油厂，但是根据EPA(美国环保署)的规定，这些化学产品不能全部都装在同一节车厢里运输，因为如果它们混和起来，就会产生剧烈反应，从而引发事故，为了使费用最低，厂长希望使用尽可能少的车厢，问最少使用多少车厢？其中共有六种化学产品，P_1不能与P_2、P_3或P_4在同节车厢里运输，P_2不能与P_3或P_5一起运输，P_3不能与P_4一起运输，P_5不能与P_6一起运输。

解：在平面上画六个顶点分别表示六种化学产品，如果两种化学产品不能在一节车厢中运输，则在这两种产品所对应的顶点之间连一条边，从而得到一个无向图，现对该图的顶点着色，如图



所示，用了三种颜色，所以最少用三节车厢，第一节车厢装 P_2、P_4 和 P_6，第二节车厢装 P_3，第三节车厢装 P_1 和 P_5。

32．（10 分）用推理规则证明：$A \to (B \vee C)$，$D \vee E \to A$，$D \vee E \Rightarrow B \vee C$

证明：（1） $A \to (B \vee C)$　　　　P

（2） $D \vee E \to A$　　　　P

（3） $D \vee E \to B \vee C$　　　　T (1) (2) I

（4） $D \vee E$　　　　P

（5） $B \vee C$　　　　T (3) (4) I

33．（10 分）设 R 是非空集合 A 上自反的二元关系，证明：R^{-1} 也是自反的。

证明：因为 R 是自反的，所以 $I_A \subseteq R$，则 ${I_A}^{-1} \subseteq R^{-1}$，故 R^{-1} 也是自反的。

34.（20 分）设 G 是整数加群，在 G 上定义：$a*b = a+b-2$，证明：$\langle G,*\rangle$ 是交换群。

证明：由题设，运算∗在 G 上是封闭的。

对任意的 $a,b,c \in G$，有

$$(a*b)*c = (a+b-2)*c = a+b-2+c-2 = a+b+c-4$$

$$a*(b*c) = a*(b+c-2) = a+b+c-2-2 = a+b+c-4$$

则 $a*(b*c) = (a*b)*c$，即运算∗是可结合的。

对任意的 $a,b \in G$，有

$$a*b = a+b-2 = b+a-2 = b*a$$

所以运算∗是可交换的。

$\exists 2 \in G$，对任意的 $a \in G$，有

$$2*a = a*2 = a+2-2 = a$$

所以 2 是关于运算∗的幺元。

对任意的 $a \in G$，$\exists 4-a \in G$，有

$$a*(4-a) = (4-a)*a = a+4-a-2 = 2$$

所以关于运算$*$，元素a的逆元是$4-a$。

综上，$\langle G,*\rangle$是交换群。

35. （15 分）设$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$是一个格，$a,b\in L$，且$a\le b$，令

$$S=\{x\in L\mid a\le x\le b\}$$

其中$\le$是格L中的偏序关系，证明：$\langle S,\oplus,\otimes\rangle$是$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$的子格。

证明：对任意的$x,y\in S$，则有$a\le x\le b$，$a\le y\le b$，从而有

$$a\oplus a\le x\oplus y\le b\oplus b\ ,\ a\otimes a\le x\otimes y\le b\otimes b$$

即

$$a\le x\oplus y\le b\ ,\ a\le x\otimes y\le b$$

因此$x\oplus y, x\otimes y\in L$，故运算$\oplus,\otimes$在$S$上是封闭的，所以$\langle S,\oplus,\otimes\rangle$是$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$的子格。

36. 证明在格$\langle L,\oplus,\otimes\rangle$中，$\le$是格$L$中的偏序关系，$a,b,c\in L$，若$a\le b\le c$，则有$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$。

证明：因为$a\le b\le c$，所以

$$a\otimes b=a,\ \ b\otimes c=b,\ \ a\oplus b=b,\ \ a\oplus c=c$$

因此

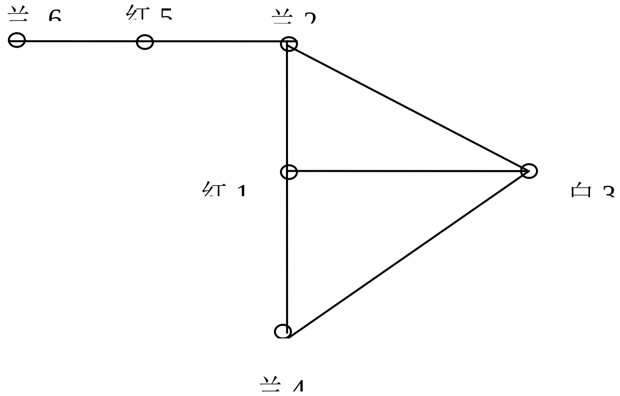
$$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=a\oplus b=b,\ \ (a\oplus b)\otimes(a\oplus c)=b\otimes c=b$$

故

$$(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$$

37. （15 分）假设一家化工厂要将多种化学产品利用铁路从精炼厂运到炼油厂，但是根据EPA(美国环保署)的规定，这些化学产品不能全部都装在同一节车厢里运输，因为如果它们混和起来，就会产生剧烈反应，从而引发事故，为了使费用最低，厂长希望使用尽可能少的车厢，问最少使用多少车厢？其中共有六种化学产品，P_1不能与P_2、P_3或P_4在同节车厢里运输，P_2不能与P_3或P_5一起运输，P_3不能与P_4一起运输，P_5不能与P_6一起运输。

解：在平面上画六个顶点分别表示六种化学产品，如果两种化学产品不能在一节车厢中运输，则在这两种产品所对应的顶点之间连一条边，从而得到一个无向图，现对该图的顶点着色，如图所示，用了三种颜色，所以最少用三节车厢，第一节车厢装P_2、P_4和P_6，第二节车厢装P_3，第三节车厢装P_1和P_5。



38．(10 分)设σ是从群$\langle G_1,*\rangle$到群$\langle G_2,\Delta\rangle$的同态映射，$e_1$，$e_2$分别是群$\langle G_1,*\rangle$与$\langle G_2,\Delta\rangle$的幺元，令

$$H=\{x\in G_1 \mid \sigma(x)=e_2\}$$

证明：$\langle H,*\rangle$是群$\langle G_1,*\rangle$的子群。

证明：显然$H\subseteq G_1$，由于$\sigma(e_1)=e_2$，所以$e_1\in H$，因此$H\neq\Phi$。

对任意的x，$y\in H$，则有

$$\sigma(x)=e_2,\ \ \sigma(y)=e_2$$

故

$$\sigma(x*y^{-1})=\sigma(x)\Delta\sigma(y^{-1})=e_2\Delta(\sigma(y))^{-1}=e_2{}^{-1}=e_2$$

所以$x*y^{-1}\in H$，由子群判定定理，$\langle H,*\rangle$是群$\langle G_1,*\rangle$的子群。

39. (14 分)设$\langle G,*\rangle$是群，H是G的子群，在G上定义二元关系R如下：

$$\text{对任意的}\ a,b\in G，\langle a,b\rangle\in R\ \text{当且仅当}\ a^{-1}*b\in H$$

证明：(1) R是G上的等价关系；

(2) 对任意的$a\in G$，$[a]_R=aH$。

证明：(1) 对任意的$a\in G$，因为H是G的子群，所以$e=a^{-1}*a\in H$，有$\langle a,a\rangle\in R$，所以R是自反的。

对任意的$\langle a,b\rangle\in R$，则有$a^{-1}*b\in H$，因为H是G的子群，所以

$$(a^{-1}*b)^{-1}=b^{-1}*a\in H$$

有$\langle b,a\rangle\in R$，所以R是对称的。

对任意的$\langle a,b\rangle$，$\langle b,c\rangle\in R$，则有$a^{-1}*b\in H$，$b^{-1}*c\in H$，因为H是G的子群，所以

$(a^{-1}*b)*(b^{-1}*c)=a^{-1}*(b*b^{-1})*c=a^{-1}*c\in H$，有$\langle a,c\rangle\in R$，所以$R$是传递的。

综上，R是等价关系。

(2) 对任意的$a\in G$，有

$$[a]_R=\{x\in G\mid\langle a,x\rangle\in R\},\quad aH=\{a*h\mid h\in H\}$$

对任意的$x\in[a]_R$，则$\langle a,x\rangle\in R$，故$a^{-1}*x\in H$，令$a^{-1}*x=h\in H$，则

$$x=a*h\in aH$$

所以$[a]_R\subseteq aH$。

对任意的$x\in aH$，令$x=a*h$，其中$h\in H$，则$a^{-1}*x=h\in H$，所以$\langle a,x\rangle\in R$，故$x\in[a]_R$，因此，$aH\subseteq[a]_R$。

综上，$[a]_R=aH$。

40. (10 分)用推理规则证明：$P,P\to(Q\to(R\land S))\Rightarrow Q\to S$。

证明：

(1)	P	P
(2)	Q	P(附加前提)
(3)	$P\to(Q\to(R\land S))$	P
(4)	$Q\to(R\land S)$	T(1)(3) I
(5)	$R\land S$	T(2)(4) I
(6)	S	T(5) I
(7)	$Q\to S$	CP

41. (10 分)设$G=\langle V,E\rangle$是n阶简单无向图，n是大于 2 的奇数，如果G中有k个奇数度的顶点，那么G的补图$\overline{G}$中奇数度的顶点也是k个。

证明：对任意的$u\in V$，则$d_G(u)+d_{\overline{G}}(u)=n-1$，因为$n$是奇数，所以若$u$在$G$中是奇数度顶点，则$u$在$\overline{G}$中也是奇数度顶点；若$u$在$G$中是偶数度顶点，则$u$在$\overline{G}$中也是偶数度顶点，因此，如果$G$中有$k$个奇数度的顶点，那么$G$的补图$\overline{G}$中奇数度的顶点也是$k$个。

42. (12 分) 设 f 是从格 $\langle L_1, \leq_1 \rangle$ 到格 $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ 的满同态映射，证明：若 $\langle L_1, \leq_1 \rangle$ 是有界格，则格 $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ 也是有界格。

证明： 设 $\langle L_1, \leq_1 \rangle$ 的最大元和最小元分别为 1 与 0，往证 $f(1)$ 和 $f(0)$ 是 $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ 的最大元和最小元。

对任意的 $f(x) \in L_2$，其中 $x \in L_1$，则 $0 \leq_1 x \leq_1 1$，因为 f 是同态映射，所以 f 是保序映射，故有 $f(0) \leq_2 f(x) \leq_2 f(1)$，所以 $f(1)$ 和 $f(0)$ 是 $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ 的最大元和最小元，因此 $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ 是有界格。

43. 设在一次国际会议上有 7 个人，各懂的语言如下：

a：英语　　b：英语和西班牙语　　c：英语、汉语和俄语

d：日语和西班牙语　　e：德语和汉语　　f：法语、日语和俄语

g：法语和德语

(1) 用无向简单图描述以上事实；

(2) 他们中间是否任何两个人可对话(必要时通过别人作翻译)。

解： 在平面上做 7 个点分别表示这 7 个人，如果两个人会同一门语言，则在对应的两个点之间连一条边，则得到一个连通图，因此任何两个人可对话。

44. 设 $\langle S_{30}, D \rangle$ 是格，其中 S_{30} 是 30 的所有正因数的集合，D 是 S_{30} 上的整除关系，则

(1) 求每个元素的余元素；

(2) $\langle S_{30}, D \rangle$ 是否为有余格，是否为分配格？并说明理由。

解： (1) $S_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$，1 与 30、2 与 15、3 与 15、6 与 5 互为余元素。

(2) 因为每个元素都存在余元素，所以 $\langle S_{30}, D \rangle$ 是有余格。

因为 $\langle S_{30}, D \rangle$ 中不存在与五元素格同构的子格，所以 $\langle S_{30}, D \rangle$ 是分配格。

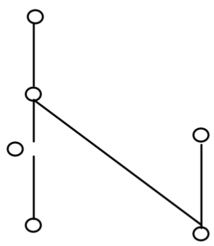
《离散数学》练习题二答案

一、填空题（每空 2 分，共 12 分）

1. $\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi\}\}$　　2. $2^4=16$

3. $\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$　　4. 7

5. $M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$



6. $\underline{p\wedge q\rightarrow r}$　　7. 14

8. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$

9. 6　10. 0　11. $b=c$　12. 2　13. 奇

14. $P\rightarrow Q$　15. 14

16. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$

17. 6　18. 0　19. $b=c$　20. 偶数　21. 5　22. $\{\{1\},\{1,4\}\}$

23. $\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$　24. A、Φ　25. 7　26. 8、不存在

27. 6　28. $\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}$

29. $\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$

30. 5　31. Φ、A　32. 3、不存在　33. 2^{mn}、m^n

二、单项选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1. B　2. D　3. A　4. B　5. D　6. D　7. C　8. D　9. A　10. C

11. D　12. B　13. A　14. D　15. C　16. B　17. C　18. B　19. B　20. A

21. B　22. C　23. A　24. C　25. C　26. D　27. B　28. D　29. C　30. B　31. A　32. C

三、判断题

1. T　2. F　3. F　4. T　5. T　6. T　7. F　8. F　9. T　10. T

11. F　12. T　13. F　14. F　15. T　16. F

三、解答题

1.（10 分）设 $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$，$G$ 上的二元运算为矩阵的乘法运算，求

(1) $\langle G,*\rangle$的运算表；

(2) $\langle G,*\rangle$的所有子群；

解：为方便起见，令 $a=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$c=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$d=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则

(1)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

（2） $H_1=\{a\}$、$H_2=\{a,b\}$，$H_3=\{a,c\}$，$H_4=\{a,d\}$，$H_5=\{a,b,c,d\}$

2. （14 分）设$\langle G,*\rangle$是一个群，定义集合 G 上的一个关系R如下：

$$R=\left\{\langle x,y\rangle \,\middle|\, x,y\in G,\ \exists a\in G,\ \ni y=a*x*a^{-1}\right\}$$

证明：R是集合 G 上的一个等价关系。

证明：对任意的$x\in G$，$\exists x^{-1}\in G$，使得$x=x^{-1}*x*\left(x^{-1}\right)^{-1}$，则$\langle x,x\rangle\in R$，所以$R$是自反的。

对任意的$\langle x,y\rangle\in R$，则$\exists a\in G$，使得$y=a*x*a^{-1}$，有

$$a^{-1}*y*a=a^{-1}*a*x*a^{-1}*a=x=a^{-1}*y*\left(a^{-1}\right)^{-1}$$

则$\langle y,x\rangle\in R$，所以R是对称的。

对任意的$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R$，则$\exists a,b\in G$，使得$y=a*x*a^{-1}$及$z=b*y*b^{-1}$，有

$$z=b*a*x*a^{-1}*b^{-1}=(b*a)*x*(b*a)^{-1}$$

则$\langle x,z\rangle\in R$，所以R是传递的。

综上，R是等价关系。

3. (12 分)设 f 是从格$\langle L_1,\le_1\rangle$到格$\langle L_2,\le_2\rangle$的满同态映射，证明：若$\langle L_1,\le_1\rangle$是有界格，则格$\langle L_2,\le_2\rangle$也是有界格。

证明：设$\langle L_1,\le_1\rangle$的最大元和最小元分别为 1 与 0，往证 $f(1)$和 $f(0)$是$\langle L_2,\le_2\rangle$的最大元和最小元。

对任意的 $f(x)\in L_2$，其中$x\in L_1$，则$0\le_1 x\le_1 1$，因为 f 是同态映射，所以 f 是保序映射，故有 $f(0)\le_2 f(x)\le_2 f(1)$，所以 $f(1)$和 $f(0)$是$\langle L_2,\le_2\rangle$的最大元和最小元，因此$\langle L_2,\le_2\rangle$是有界格。

4. （10 分）试用推理规则证明：

$$\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S),(Q\to P)\vee\neg R，R\Rightarrow P\leftrightarrow Q$$

① $\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$ $\qquad\qquad$ P

② $(R \vee S) \to (P \to Q)$ T ① E

③ R P

④ $R \vee S$ T ③ I

⑤ $P \to Q$ T ②④ I

⑥ $(Q \to P) \vee \neg R$ P

⑦ $R \to (Q \to P)$ T ⑥ I

⑧ $Q \to P$ T ③⑦ I

⑩ $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ T ⑤⑧ I

11. $P \leftrightarrow Q$ T ⑩ E

5.（10 分）设G是连通简单图，其中每个顶点的度数都是偶数，则对于任一顶点v，图$G-\{v\}$的连通分支数小于等于v的度数的一半。

证明：由于G中每个顶点的度数都是偶数，所以$G-\{v\}$中奇顶点的数目等于v的度数，并且在G中与v相邻，其余的顶点的度数仍为偶数。由于G是连通的，所以$G-\{v\}$的每个连通分支中都有原来在G中与v相邻的顶点。然而，$G-\{v\}$的每个连通分支都可以看作是一个完整的图，所以每个分支中原来与v相邻的顶点至少有两个，并且不同的连通分支中没有公共的奇顶点，所以$G-\{v\}$的连通分支数小于等于奇顶点数目的一半，也就是v的度数的一半。

6．设$\langle S_{45}, D\rangle$是格，其中S_{45}是 45 的所有正因数的集合，D是S_{45}上的整除关系，则

（1）求每个元素的余元素；

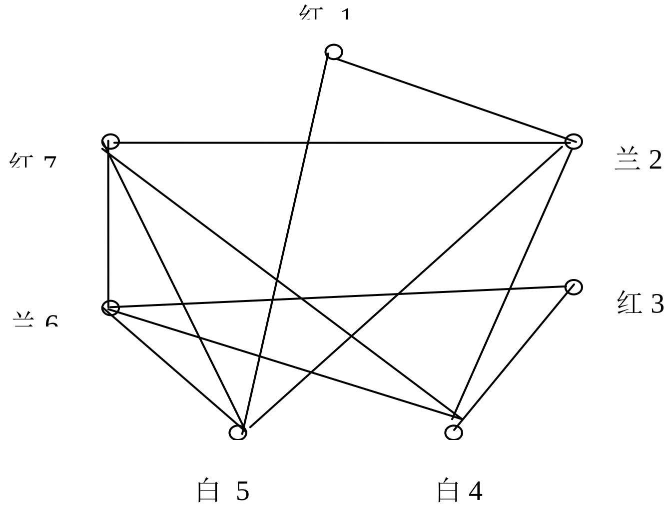
（2）$\langle S_{45}, D\rangle$是否为有余格，是否为分配格？并说明理由。

解：(1) $S_{45}=\{1,3,5,9,15,45\}$，1 与 45、5 与 9 互为余元素；3 与 15 不存在余元素。

(2) 因为 3 与 15 不存在余元素，所以$\langle S_{45}, D\rangle$不是有余格。

因为$\langle S_{45}, D\rangle$中不存在与五元素格同构的子格，所以$\langle S_{45}, D\rangle$是分配格。

7. 洛杉矶地区有 7 家汽车旅游公司，在一天中每家公司最多参观下列景点中的三个不同景点，这些景点是好莱坞、贝弗利山、迪斯尼乐园和通用电影制片厂，同一天中，参观一个景点的旅游公司不能超过一个，第一家旅游公司只参观好莱坞，第二家公司只参观好莱坞和迪斯尼乐园，第三家公司只参观通用电影制片厂,第四家只参观迪斯尼乐园和通用电影制片厂,第五家只参观好莱坞和贝弗利山,第六家只参观贝弗利山和通用电影制片厂,第七家只参观迪斯尼乐园和贝弗利山。请问这些游览可以只安排在星期一、星期三和星期五吗？



解：在平面上画七个点分别表示七家旅游公司,如果两家公司参观同一个景点，则在这两家公司所对应的顶点之间连一条边，从而得到一个无向图,现对该图的顶点着色，如图所示，用了三种颜色，所以这些游览可以只安排在三天里，星期一安排第二家和第六家；星期三安排第一家、第三家和第七家；星期五安排第四家和第五家。

8．设 A、B 是命题公式，试用两种方法分别证明等价式：$\neg(A\to B)=A\wedge\neg B$。

证明：等价演算法：$\neg(A\to B)=\neg(\neg A\vee B)=A\wedge\neg B$

真值表法：

A	B	$\neg B$	$A\to B$	$\neg(A\to B)$	$A\wedge\neg B$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

9．设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是自反的，证明：$t(R)$ 是自反的。

证明：因为 R 是自反的，所以 $I_A\subseteq R$，又 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots$，则 $I_A\subseteq t(R)$，所以 $t(R)$ 是自反的。

10. 设 R 为实数集，σ：$R\times R\to R$，对任意的 $\langle x,y\rangle\in R\times R$，令 $\sigma(\langle x,y\rangle)=x+y$，证明：$\sigma$ 是满射，并说明 σ 不是单射。

证明： 对任意的 $x\in R$，存在 $\langle 0,x\rangle\in R\times R$，使得 $\sigma(\langle 0,x\rangle)=x$，所以 σ 是满射。

由于 $\langle 0,1\rangle\neq\langle 1,0\rangle$，而 $\sigma(\langle 0,1\rangle)=\sigma(\langle 1,0\rangle)=1$，所以 σ 不是单射。

11. 证明：任一序集都是格。

证明： 设 $\langle L,\leq\rangle$ 是序集，对任意的 $a,b\in L$，则 $a\leq b$ 或 $b\leq a$，于是

(1) 若 $a\leq b$，因为 $a\leq a$，$b\leq b$，所以 a 是 a 与 b 的下界，b 是 a 与 b 的上界。

设 c 是 a 与 b 的任一下界，则 $c\leq a$，所以 a 是 a 与 b 的最大下界。

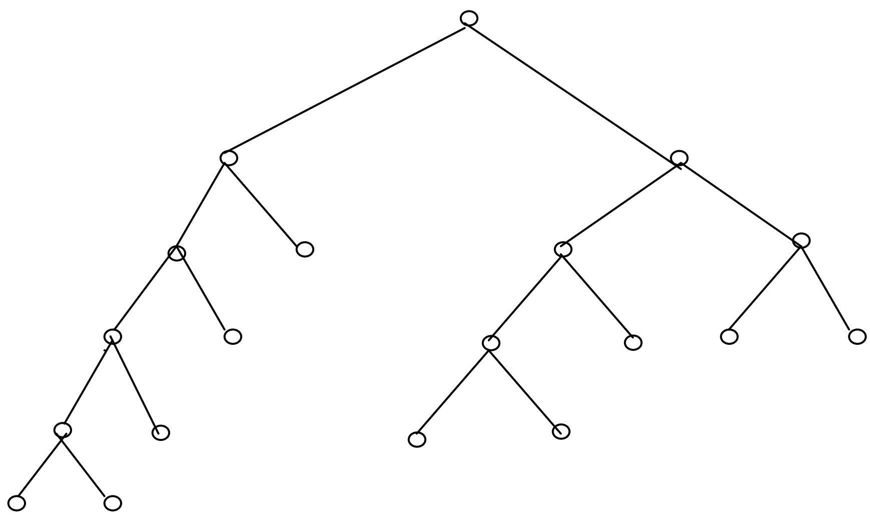
设 d 是 a 与 b 的任一上界，则 $b\leq d$，所以 b 是 a 与 b 的最小上界。

(2) 若 $b\leq a$，同理可证，b 是 a 与 b 的最大下界，a 是 a 与 b 的最小上界。

所以 $\langle L,\leq\rangle$ 是格。

12. 求带权 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的最优二叉树。

解：



13．设$\langle H,*\rangle$和$\langle K,*\rangle$都是群$\langle G,*\rangle$的子群，令

$$HK=\{h*k \mid h\in H, k\in K\}，\quad KH=\{k*h \mid k\in K, h\in H\}$$

证明$\langle HK,*\rangle$是$\langle G,*\rangle$的子群的充要条件是$HK=KH$。

证明：必要性。

对任意的$h*k\in HK$，因为HK是G的子群，所以$(h*k)^{-1}\in HK$，不妨令$(h*k)^{-1}=h_1*k_1$，从而有

$$h*k=\left((h*k)^{-1}\right)^{-1}=(h_1*k_1)^{-1}=k_1^{-1}*h_1^{-1}\in KH$$

所以$HK\subseteq KH$。

对任意的$k*h\in KH$，有

$$k*h=\left(k^{-1}\right)^{-1}*\left(h^{-1}\right)^{-1}=\left(h^{-1}*k^{-1}\right)^{-1}$$

因为H，K和HK都是G的子群，所以

$$h^{-1}\in H，\quad k^{-1}\in K，\quad h^{-1}*k^{-1}\in HK，\quad \left(h^{-1}*k^{-1}\right)^{-1}\in HK$$

所以$KH\subseteq HK$，综上有$HK=KH$。

充分性。对任意的h_1*k_1，$h_2*k_2\in HK$，则有

$$h_1*k_1*(h_2*k_2)^{-1}=h_1*k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1}$$

而$k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1}\in KH$，因为$HK=KH$，故$k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1}\in HK$，不妨令$k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1}=h_3*k_3$，则有

$$h_1*k_1*(h_2*k_2)^{-1}=h_1*k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1}=h_1*h_3*k_3\in HK$$

由子群判定定理，HK是G的子群。

14．设R为实数集，σ：$R\times R\to R$，对任意的$\langle x,y\rangle\in R\times R$，令$\sigma(\langle x,y\rangle)=x\cdot y$，证明：$\sigma$是满射，并说明$\sigma$不是单射。

证明：对任意的$x\in R$，存在$\langle 1,x\rangle\in R\times R$，使得$\sigma(\langle 1,x\rangle)=x$，所以$\sigma$是满射。

由于$\langle 0,1\rangle\neq\langle 1,0\rangle$，而$\sigma(\langle 0,1\rangle)=\sigma(\langle 1,0\rangle)=0$，所以$\sigma$不是单射。

15．设A、B是命题公式，试用两种方法分别证明等价式：$\neg(A\to B)=A\wedge\neg B$。

证明：等价演算法：$\neg(A\to B)=\neg(\neg A\vee B)=A\wedge\neg B$

真值表法：

A	B	$\neg B$	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$A \wedge \neg B$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

16. 证明：三个元素以上的链不是有余格。

证明：设$\langle L, \leq\rangle$是链，则$\langle L, \leq\rangle$是格。

假设$\langle L, \leq\rangle$是有余格，则L中每个元素都存在余元素，因为 0 与 1 互为余元素，而L中至少有三个元素，设$a \in L$，且$a \neq 0$，$a \neq 1$，a的余元素为b，由于$\langle L, \leq\rangle$是链，则$a \leq b$或$b \leq a$，于是

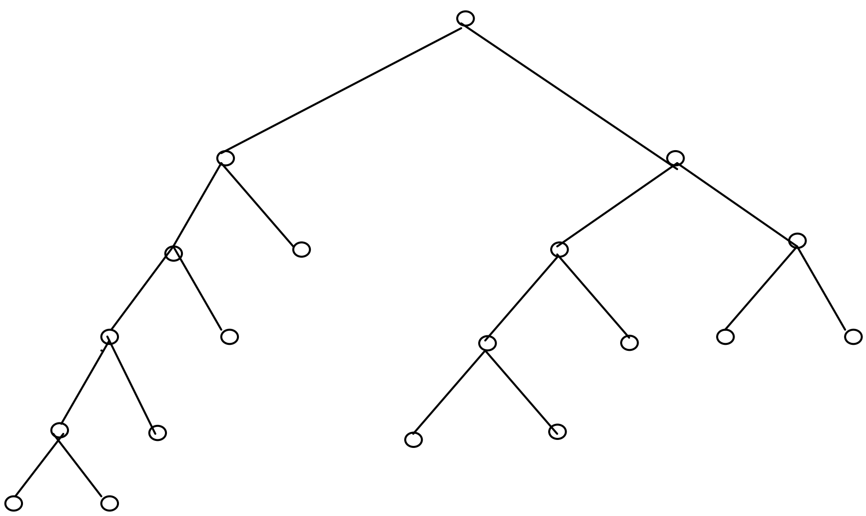
(1) 若$a \leq b$，则有$a \otimes b = a$，又a的余余元素为b，有$a \otimes b = 0$，与$a \neq 0$矛盾。

(2) 若$b \leq a$，则有$a \oplus b = a$，又a的余余元素为b，有$a \oplus b = 1$，与$a \neq 1$矛盾。

所以$\langle L, \leq\rangle$不是有余格。

17. 求带权 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的最优二叉树。

解：



18．设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是自反的，证明：$s(R)$ 是自反的。

证明：因为 R 是自反的，则 $I_A \subseteq R$，而 $s(R) = R \cup R^{-1}$，所以 $I_A \subseteq s(R)$，故 $s(R)$ 是自反的。

19. 设 $A = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in I\}$，其中 I 是整数集合，证明：$\langle A, +, \cdot \rangle$ 是整环，其中运算“+”和“•”是关于数的普通加法和乘法。

证明：(1) 对任意的 $m + n\sqrt{2}$， $p + q\sqrt{2} \in A$（其中 $m, n, p, q \in I$），有

$$(m + n\sqrt{2}) + (p + q\sqrt{2}) = (m + p) + (n + q)\sqrt{2} \in A$$

$$(m + n\sqrt{2}) \cdot (p + q\sqrt{2}) = (mp + 2nq) + (mq + np)\sqrt{2} \in A$$

所以运算“+”和“•”在 A 上是封闭的。

(2) 显然运算“+”和“•” 在 A 上满足交换性、结合性；运算“•”

对“+”满足分配性；运算“•” 满足消去律。

(3) 关于运算“+”的幺元 $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$。

(4) 关于运算“•”的幺元 $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in A$。

(5) 对任意的 $m + n\sqrt{2} \in A$（其中 $m, n \in I$），关于运算“+”的逆元为 $-m - n\sqrt{2} \in A$。

20．(10 分)用推理规则证明：$A \vee B \to C \wedge D$，$D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$。

证明：

(1)	A	P（附加前提）
(2)	$A \vee B$	T (1) I
(3)	$A \vee B \to C \wedge D$	P
(4)	$C \wedge D$	T (2) (3) I
(5)	D	T (4) I
(6)	$D \vee E$	T (5) I
(7)	$D \vee E \to F$	P
(8)	F	T (6) (7) I
(9)	$A \to F$	CP

21．(20 分) 设 $\langle B, \oplus, * \rangle$ 是含幺环, 且*满足等幂律, 在 B 上定义运算+, •, ¯ 如下:

$$a + b = a \oplus b \oplus (a * b),\quad a \cdot b = a * b,\quad \bar{a} = a \oplus 1$$

证明: $\langle B,+,\cdot,^{-},0,1\rangle$是一个布尔代数，其中 0 和 1 分别是关于运算$\oplus$ 和$*$的幺元。

证明：(1) 由题设条件可知，运算+和•在B上是封闭的。

(2) 对任意的$a,b\in B$，由书上习题结论，有

$$a\oplus a=0$$
$$a*b=b*a$$

从而有

$$a+b=b+a$$
$$a\cdot b=b\cdot a$$

即，运算+和•在B上是可交换的。

(3) 对任意的$a,b,c\in B$，有

$$a\cdot(b+c)=a*(b\oplus c\oplus b*c)=a*b\oplus a*c\oplus a*b*c$$

$$(a\cdot b)+(a\cdot c)=a*b\oplus a*c\oplus a*b*a*c=a*b\oplus a*c\oplus a*b*c$$

即

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

所以运算•对+是可分配的。

另外

$$a+(b\cdot c)=a\oplus b*c\oplus a*b*c$$

$$(a+b)\cdot(a+c)$$
$$=(a\oplus b\oplus a*b)*(a\oplus c\oplus a*c)$$
$$=a*a\oplus a*c\oplus a*a*c\oplus b*a\oplus b*c\oplus b*a*c\oplus a*b*a\oplus a*b*c\oplus a*b*a*c$$
$$=a\oplus a*c\oplus a*c\oplus a*b\oplus b*c\oplus a*b*c\oplus a*b\oplus a*b*c\oplus a*b*c$$
$$=a\oplus b*c\oplus a*b*c$$

即

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot a+c$$

所以运算+对•是可分配的。

(4) 对任意的$a\in B$，有

$$a\cdot 1=a*1=a$$

$$a+0=a\oplus 0\oplus a*0=a\oplus 0=a$$

(5) 对任意的$a\in B$，有

$$a+\overline{a}=a\oplus a\oplus 1\oplus\left(a*\left(a\oplus 1\right)\right)=0\oplus 1\oplus a*a\oplus a*1=1\oplus a\oplus a=1\oplus 0=1$$

$$a\cdot\overline{a}=a*\left(a\oplus 1\right)=a*a\oplus a*1=a\oplus a=0$$

综上，由亨廷顿公理，$\left\langle B,+,\cdot,\overline{\ },0,1\right\rangle$是布尔代数。

22. (15 分)证明：在$K_n\left(n\succ 5\right)$中任意删去$n-3$条边后所得到的图是哈密尔顿图。

证明：设G是在K_n中任意删去$n-3$条边后所得到的图，u,v是G中任意两个不相邻的顶点，则u,v在K_n中都关联着$n-1$条边，现由于删去$n-3$条边，设其中有k条u所关联的边，l条v所关联的边，于是

$$d_G\left(u\right)=n-1-k\text{，}\ d_G\left(v\right)=n-1-l$$

则

$$d_G\left(u\right)+d_G\left(v\right)=2n-2-\left(k+l\right)$$

因为总共删去$n-3$条边，所以$k+l\le n-3+1=n-2$，则

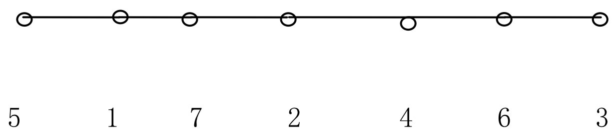
$$d_G\left(u\right)+d_G\left(v\right)\ge n$$

因此G是哈密尔顿图。

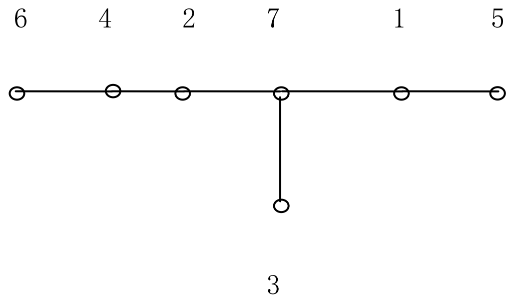
23. (5 分) Gladbrook 饲料公司有 7 个谷物箱，要通过谷物管道将它们连接起来，以使谷物能从任意一个箱子转移到其它箱子，为了使建造费用最少，希望建造尽可能少的管道，在两个箱子之间建造管道的费用(以 10 万美元计)由下表给出，其中“-”表示不能建造管道，应该怎样建造管道才能使费用最少。

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	4	-	6	2	-	3
2		-	5	2	-	3	1
3			-	7	-	2	2
4				-	4	1	-
5					-	1	-

6						-	2
7							-



或者



24. (15 分)给定群$\langle I_6, +_6 \rangle$，其中$I_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$，$+_6$是I_6上的模 6 加法运算，试求：

(1) I_6的所有生成元；

(2) I_6的所有子群；

(3) 每个子群的所有右陪集。

解：(1) $I_6=\{0,1,2,3,4,5\}=\{1^0,1,1^2,1^3,1^4,1^5\}$，所以 I_6 的所有生成元为 $1,1^5$，即 1，5。

(2) $H_1=\{0\}$，$H_2=(1^3)=(3)=\{0,3\}$，$H_3=(1^2)=(2)=\{0,2,4\}$

$H_4=I_6=\{0,1,2,3,4,5\}$

(3) $0H_1=\{0\}$，$1H_1=\{1\}$，$2H_1=\{2\}$，$3H_1=\{3\}$，$4H_1=\{4\}$，$5H_1=\{5\}$

$0H_2=3H_2=\{0,3\}$，$1H_2=4H_2=\{1,4\}$，$2H_2=5H_2=\{2,5\}$

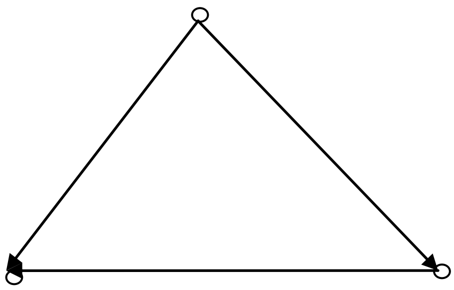
$0H_3=2H_3=4H_3=\{0,2,4\}$，$1H_3=3H_3=5H_3=\{1,3,5\}$

$0H_4=1H_4=2H_4=3H_4=4H_4=5H_4=\{0,1,2,3,4,5\}$

25. (5 分) 设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，试求 R 的关系图与关系矩阵 M_R。

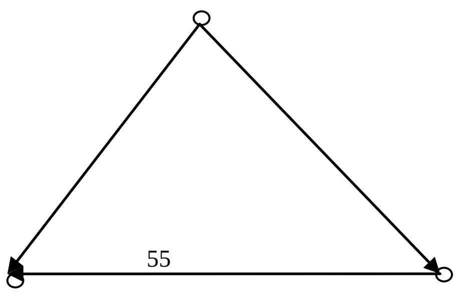
解：关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

关系图为：



26. (5 分) 设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，试求 R 的关系图与关系矩阵 M_R。

解：关系矩阵为 $M_R=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$



关系图为：

27. (15 分)给定群$\langle I_{15}, +_{15}\rangle$，其中$I_{15}=\{0,1,2,\cdots,14\}$，$+_{15}$是$I_{15}$上的模 15 加法运算，试求：

(1) I_{15}的所有生成元；

(2) I_{15}的所有子群；

(3) 每个子群的所有右陪集。

解：(1) $I_{15}=\{0,1,2,\cdots,14\}=\{1^0, 1, 1^2, \cdots, 1^{14}\}$，所以$I_{15}$的所有生成元为

$$1, 1^2, 1^4, 1^7, 1^8, 1^{11}, 1^{13}, 1^{14}$$

即$1,2,4,7,8,11,13,14$

(2) $H_1=\{0\}$，$H_2=(1^5)=(5)=\{0,5,10\}$，$H_3=(1^3)=(3)=\{0,3,6,9,12\}$

$H_4=I_{15}=\{0,1,2,\cdots,14\}$

(3) $0H_1=\{0\}$，$1H_1=\{1\}$，$2H_1=\{2\}$，⋯，$14H_1=\{14\}$

$0H_2=5H_2=10H_2=\{0,5,10\}$，$1H_2=6H_2=11H_2=\{1,6,11\}$

$2H_2=7H_2=12H_2=\{2,7,12\}$，$3H_2=8H_2=13H_2=\{3,8,13\}$

$4H_2=9H_2=14H_2=\{4,9,14\}$

$0H_3=3H_3=6H_3=9H_3=12H_3=\{0,3,6,9,12\}$ ，

$1H_3=4H_3=7H_3=10H_3=13H_3=\{1,4,7,10,13\}$

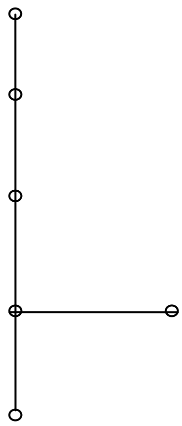
$2H_3=5H_3=8H_3=11H_3=14H_3=\{2,5,8,11,14\}$

$0H_4=1H_4=2H_4=\cdots=14H_4=I_{15}=\{0,1,2,\cdots,14\}$

28. (5 分)试用克鲁斯卡尔算法求下列表格所确定的权图的最小支撑树。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	/	479	1463	2007	695	283
v_2	479	/	966	1567	666	301
v_3	1463	966	/	837	998	1267
v_4	2007	1567	837	/	1213	1724
v_5	695	666	998	1213	/	412

v_6	283	301	1267	1724	412	/



29．（15 分）证明：如果G是一个具有奇数个顶点的偶图，则G不是哈密尔顿图。

证明： 因为$G=\langle V,E\rangle$是偶图，不妨设$V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\Phi$，且G中任意两个相邻的顶点，必是一个取自于V_1，另一个取自于V_2，由于$|V|$是奇数，而$|V|=|V_1|+|V_2|$所以$|V_1|\neq|V_2|$，不妨设$|V_1|\succ|V_2|$，现在G中删除V_2中所有的顶点，所得的子图恰好是V_1中所有的顶点，且都是孤立的顶点，所以$W(G-V_2)=|V_1|\succ|V_2|$，因此G不是哈密尔顿图。

30．（10 分）用推理规则证明：$\neg A\vee B$，$C\rightarrow\neg B\Rightarrow A\rightarrow\neg C$

证明：

(1)	A	P（附加前提）
(2)	$\neg A\vee B$	P
(3)	$A\rightarrow B$	T (2) E
(4)	B	T (1) (3) I
(5)	$C\rightarrow\neg B$	P
(6)	$B\rightarrow\neg C$	T (5) E
(7)	$\neg C$	T (4) (6) I
(8)	$A\rightarrow\neg C$	CP

31．（20 分）设$\langle B,+,\cdot,^-,0,1\rangle$是一个布尔代数，在$B$上定义运算∗，×如下：

$$a*b=a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b,\quad a\times b=a\cdot b$$

证明:$\langle B,*,\times\rangle$ 是含幺交换环。

证明： 因为$\langle B,+,\cdot,^-,0,1\rangle$是布尔代数，所以运算$+,\cdot$ 具有交换性、结合性以及分配性，1 是最大元，

0 是最小元，则

（1）由运算∗，×的定义，显然运算∗，×在 B 上是封闭的。

（2）由运算×的定义，显然运算×具有交换性和结合性。

（3）因为 1 是最大元，则对任意的 $a \in B$，有 $a \times 1 = a$，所以 1 是关于运算×的幺元。

（4）对任意的 $a, b \in B$，有

$$a * b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = b \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot a = b * a$$

所以运算∗具有交换性。

（5）对任意的 $a, b, c \in B$，有

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= \left(a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b\right) * c = \left(a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b\right) \cdot \overline{c} + \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b} \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \left(\overline{a \cdot \overline{b}} \ \cdot \ \overline{\overline{a} \cdot b}\right) \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \left(\overline{a} + b\right) \cdot \left(a + \overline{b}\right) \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \left(\overline{a} \cdot a + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + b \cdot \overline{b}\right) \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \left(0 + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + 0\right) \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \left(\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b\right) \cdot c \\ &= a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c\end{aligned}$$

同理可证，

$$a * (b * c) = a \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot b \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

所以 $a * (b * c) = (a * b) * c$，因此运算∗具有结合性。

（6）因为 0 是最小元，则对任意的 $a \in B$，有

$$a * 0 = a \cdot \overline{0} + \overline{a} \cdot 0 = a \cdot 1 + 0 = a + 0 = a$$

所以 0 是关于运算∗的幺元。

（7）对任意的 $a \in B$，存在 $a \in B$，有

$$a * a = a \cdot \overline{a} + \overline{a} \cdot a = 0 + 0 = 0$$

所以对于每个元素 a，关于运算∗存在逆元 a。

（8）对任意的 $a, b, c \in B$，有

$$a \times (b * c) = a \cdot \left(b \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot c\right) = a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c$$

$$\begin{aligned}(a \times b) * (a \times c) &= (a \cdot b) * (a \cdot c) \\ &= a \cdot b \cdot \overline{a \cdot c} + \overline{a \cdot b} \cdot a \cdot c \\ &= a \cdot b \cdot \left(\overline{a} + \overline{c}\right) + \left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot a \cdot c \\ &= a \cdot b \cdot \overline{a} + a \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot a \cdot c + \overline{b} \cdot a \cdot c\end{aligned}$$

$$= 0 + a \cdot b \cdot \overline{c} + 0 + a \cdot \overline{b} \cdot c$$

$$= a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot \overline{b} \cdot c$$

所以 $a \times (b * c) = (a \times b) * (a \times c)$，即运算×对*满足分配律。

综上，$\langle B, *, \times \rangle$ 是含幺交换环。