2008年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数 学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第1至第2页，第Ⅱ卷第3至第4页．全卷满分150分，考试时间120分钟．

考生注意事项：

1．答题前，务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的座位号、姓名，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中“座位号、姓名、科类”与本人座位号、姓名、科类是否一致．
2．答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．
3．答第Ⅱ卷时，必须用0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写．在试题卷上作答无效．
4．考试结束，监考员将试题卷和答题卡一并收回．

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么　　　　球的表面积公式　$S=4\pi R^2$

$P(A+B)=P(A)+P(B)$　　　　其中R表示球的半径

如果事件A，B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$　　　　球的体积公式　$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

如果随机变量$\xi\sim B(n,p)$，那么　　　　其中R表示球的半径

$D\xi=np(1-p)$

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

（1）．复数　$i^3(1+i)^2=$（　　）

A．2　　B．-2　　C．$2i$　　D．$-2i$

（2）．集合$A=\{y\in R\mid y=\lg x,x>1\}$，$B=\{-2,-1,1,2\}$则下列结论正确的是（　　）

A．$A\cap B=\{-2,-1\}$　　　　B．$(C_RA)\cup B=(-\infty,0)$

C．$A\cup B=(0,+\infty)$　　　　D．$(C_RA)\cap B=\{-2,-1\}$

（3）．在平行四边形ABCD中，AC为一条对角线，若$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则$\overrightarrow{BD}=$（　　）

A．（－2，－4）　B．（－3，－5）　C．（3，5）　D．（2，4）

（4）．已知m,n是两条不同直线，α,β,γ是三个不同平面，下列命题中正确的是（　　）

A．若$m /\!/ \alpha, n /\!/ \alpha$,则$m /\!/ n$　　　　B．若$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$,则$\alpha /\!/ \beta$

C．若$m /\!/ \alpha, m /\!/ \beta$,则$\alpha /\!/ \beta$　　　　D．若$m \perp \alpha, n \perp \alpha$,则$m /\!/ n$

（5）．将函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象按向量α平移后所得的图象关于点$(-\frac{\pi}{12},0)$中心对称，则向量α的坐标可能为（　　）

A．$(-\frac{\pi}{12},0)$　　B．$(-\frac{\pi}{6},0)$　　C．$(\frac{\pi}{12},0)$　　D．$(\frac{\pi}{6},0)$

（6）．设$(1+x)^8=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8$,则$a_{0,}a_1,\cdots,a_8$中奇数的个数为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

（7）．$a<0$是方程$ax^2+2x+1=0$至少有一个负数根的（　　）

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

（8）．若过点$A(4,0)$的直线l与曲线$(x-2)^2+y^2=1$有公共点，则直线l的斜率的取值范围为

（　　）　A．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　C．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$

（9）．在同一平面直角坐标系中，函数$y=g(x)$的图象与$y=e^x$的图象关于直线$y=x$对称。而函数$y=f(x)$的图象与$y=g(x)$的图象关于y轴对称，若$f(m)=-1$，则m的值是（　　）

A．$-e$　　B．$-\frac{1}{e}$　　C．e　　D．$\frac{1}{e}$

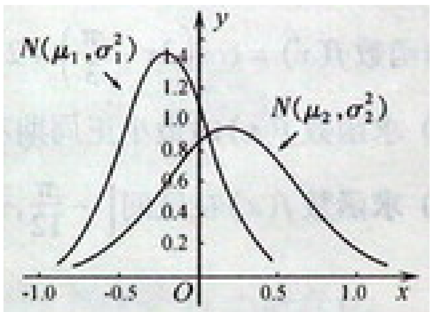
（10）．设两个正态分布$N(\mu_1,\ \sigma_1^2)(\sigma_1>0)$和$N(\mu_2,\ \sigma_2^2)(\sigma_2>0)$的密度函数图像如图所示。则有（　　）

A．$\mu_1<\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

B．$\mu_1<\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$

C．$\mu_1>\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$

D．$\mu_1>\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$



（11）．若函数$f(x),g(x)$分别是R上的奇函数、偶函数，且满足$f(x)-g(x)=e^x$，则有（　　）

A．$f(2)<f(3)<g(0)$　　B．$g(0)<f(3)<f(2)$

C．$f(2)<g(0)<f(3)$　　D．$g(0)<f(2)<f(3)$

（12）12 名同学合影，站成前排 4 人后排 8 人，现摄影师要从后排 8 人中抽 2 人调整到前排，若其他人的相对顺序不变，则不同调整方法的总数是(　　　)

A．$C_8^2A_3^2$　　　B．$C_8^2A_6^6$　　　C．$C_8^2A_6^2$　　　D．$C_8^2A_5^2$

2008 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数 学（理科）

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

考生注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上书写作答无效．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在答题卡的相应位置．

（**13**）．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为_________．

（**14**）在数列 $\{a_n\}$ 在中，$a_n=4n-\dfrac{5}{2}$，$a_1+a_2+\cdots a_n=an^2+bn$，$n\in N^*$,其中 a,b 为常数，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ 的值是_______

（**15**）若 A 为不等式组 $\begin{cases}x\le 0\\ y\ge 0\\ y-x\le 2\end{cases}$ 表示的平面区域，则当 a 从－2 连续变化到 1 时，动直线 $x+y=a$

扫过 A 中的那部分区域的面积为_____________

（**16**）已知 A,B,C,D 在同一个球面上，$AB\perp$ 平面BCD, $BC\perp CD$, 若 $AB=6,\ AC=2\sqrt{13}$,

$AD=8$,则 B,C 两点间的球面距离是_____________

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）．（**本小题满分 12 分**）

已知函数 $f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})+2\sin(x-\dfrac{\pi}{4})\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}]$ 上的值域

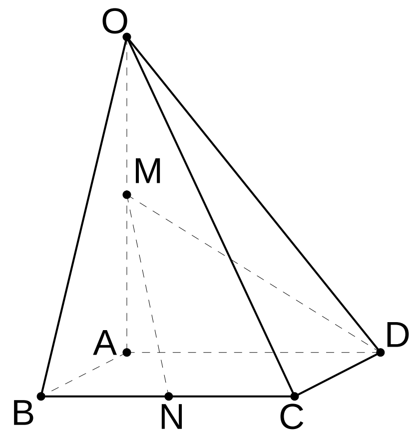
（18）.（**本小题满分 12 分**

如图，在四棱锥$O-ABCD$中，底面$ABCD$四边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$OA\perp$底面$ABCD$，$OA=2$，$M$ 为OA的中点，N 为BC的中点

（Ⅰ）证明：直线$MN\parallel$平面OCD ；

（Ⅱ）求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小；

（Ⅲ）求点 B 到平面 OCD 的距离。



(19).（**本小题满分 12 分**）

为防止风沙危害，某地决定建设防护绿化带，种植杨树、沙柳等植物。某人一次种植了 n 株沙柳，各株沙柳成活与否是相互独立的，成活率为 p，设ξ为成活沙柳的株数，数学期望$E\xi=3$，标准差$\sigma\xi$为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

（Ⅰ）求 n,p 的值并写出ξ的分布列；

（Ⅱ）若有 3 株或 3 株以上的沙柳未成活，则需要补种，求需要补种沙柳的概率

（20）.（**本小题满分 12 分**）

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}(x>0且x\neq 1)$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）已知$2^{\frac{1}{x}}>x^a$对任意 $x\in(0,1)$成立，求实数a的取值范围。

（21）.（**本小题满分 13 分**）

设数列$\{a_n\}$满足$a_0=0, a_{n+1}=ca_n^3+1-c, c\in N^*$,其中$c$为实数

（Ⅰ）证明：$a_n\in[0,1]$对任意$n\in N^*$成立的充分必要条件是$c\in[0,1]$；

（Ⅱ）设$0<c<\dfrac{1}{3}$，证明：$a_n\geq 1-(3c)^{n-1}, n\in N^*$；

（Ⅲ）设$0<c<\dfrac{1}{3}$，证明：$a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2>n+1-\dfrac{2}{1-3c}, n\in N^*$

（22）.（**本小题满分 13 分**）

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$M(\sqrt{2},1)$，且着焦点为$F_1(-\sqrt{2},0)$

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）当过点$P(4,1)$的动直线l与椭圆C相交与两不同点A,B时，在线段AB上取点Q，满足

$\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QB}\right|=\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|$，证明：点$Q$总在某定直线上

2008年高考安徽理科数学试题参考答案

一. 选择题

1A　2D　3B　4D　5C　6A　7B　8C　9B　10A　11D　12C

二. **13:** $[3,+\infty)$　**14:** **1**　**15:** $\frac{7}{4}$　**16:** $\frac{4\pi}{3}$

三. 解答题

17 解：（1） $\because f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{4})\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos 2x$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$$

$\therefore$ 周期 $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

由 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$

$\therefore$ 函数图象的对称轴方程为　$x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$

（2） $\because x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}],\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$

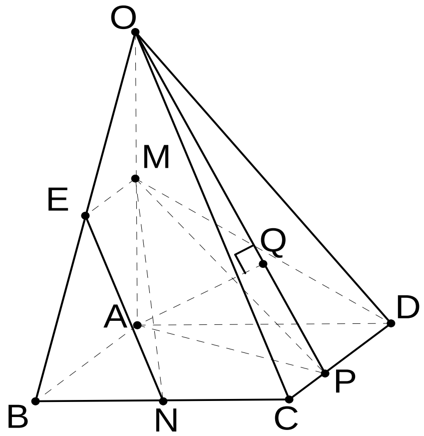
因为 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，在区间 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

所以　当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取最大值 1

又　$\because f(-\frac{\pi}{12})=-\frac{\sqrt{3}}{2}<f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$，当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以 函数　$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$

18 方法一（综合法）



（**1**）取 OB 中点 E，连接 ME，NE

$\because ME \parallel AB, AB \parallel CD, \therefore ME \parallel CD$

又$\because NE \parallel OC, \therefore$ 平面$MNE \parallel$ 平面OCD

$\therefore MN \parallel$ 平面OCD

（**2**）$\because CD \parallel AB,$

$\therefore \angle MDC$ 为异面直线 AB 与 MD 所成的角（或其补角）

作 $AP \perp CD$于P, 连接 MP

$\because$ OA ⊥ 平面ABCD，$\therefore$ CD ⊥ MP

$\because \angle ADP = \dfrac{\pi}{4}, \therefore \mathrm{DP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{2}$，$\therefore \cos \angle MDP = \dfrac{DP}{MD} = \dfrac{1}{2}, \angle MDC = \angle MDP = \dfrac{\pi}{3}$

所以 AB 与 MD 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{3}$

（**3**）$\because AB \parallel$ 平面OCD, $\therefore$点 A 和点 B 到平面 OCD 的距离相等，连接 OP,过点 A 作

$AQ \perp OP$ 于点 Q，$\because AP \perp CD, OA \perp CD, \therefore CD \perp$ 平面$OAP, \therefore AQ \perp CD$

又 $\because AQ \perp OP, \therefore AQ \perp$ 平面OCD,线段 AQ 的长就是点 A 到平面 OCD 的距离

$\because OP = \sqrt{OD^2 - DP^2} = \sqrt{OA^2 + AD^2 - DP^2} = \sqrt{4 + 1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$AP = DP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore AQ = \dfrac{OA \cdot AP}{OP} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{3}$，所以点 B 到平面 OCD 的距离为$\dfrac{2}{3}$

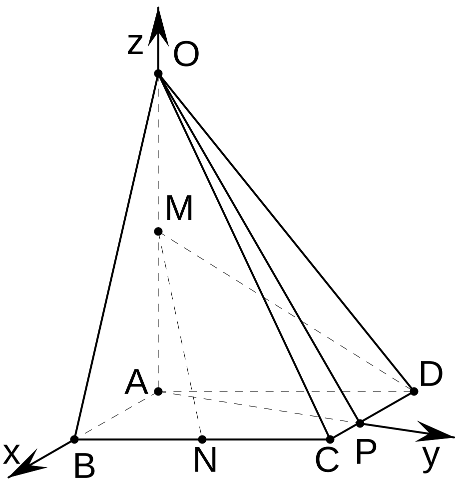
方法二(向量法)

作 $AP \perp CD$ 于点 P,如图,分别以 AB,AP,AO 所在直线为 x, y, z 轴建立坐标系

$A(0,0,0), B(1,0,0), P(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0), D(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0), O(0,0,2), M(0,0,1), N(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},0)$,

(1) $\overrightarrow{MN}=(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1),\overrightarrow{OP}=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-2),\overrightarrow{OD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$

设平面OCD的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $n\cdot\overrightarrow{OP}=0,n\cdot\overrightarrow{OD}=0$



即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\end{cases}$

取 $z=\sqrt{2}$,解得 $n=(0,4,\sqrt{2})$

$\because \overrightarrow{MN}\cdot n=(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1)\cdot(0,4,\sqrt{2})=0$

$\therefore MN$ // 平面OCD

(2)设 AB 与 MD 所成的角为 θ, $\because \overrightarrow{AB}=(1,0,0),\overrightarrow{MD}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\frac{1}{2},\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ ， AB 与 MD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

(3)设点 B 到平面 OCD 的距离为 d ,则 d 为 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $n=(0,4,\sqrt{2})$ 上的投影的绝对值,

由 $\overrightarrow{OB}=(1,0,-2)$, 得 $d=\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot n|}{|n|}=\frac{2}{3}$.所以点 B 到平面 OCD 的距离为 $\frac{2}{3}$

19 **(1)**由 $E\xi=np=3,(\sigma\xi)^2=np(1-p)=\frac{3}{2}$, 得 $1-p=\frac{1}{2}$,从而 $n=6,p=\frac{1}{2}$

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

(2)记”需要补种沙柳”为事件 A,　 则 $P(A)=P(\xi\le 3)$,　得

$P(A)=\frac{1+6+15+20}{64}=\frac{21}{32}$, 或 $P(A)=1-P(\xi>3)=1-\frac{15+6+1}{64}=\frac{21}{32}$

20 解 (1) $f^{'}(x)=-\frac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}$,若 $f^{'}(x)=0$, 则 $x=\frac{1}{e}$ 列表如下

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},1)$	$(1,+\infty)$
$f^{'}(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	单调增	极大值 $f(\frac{1}{e})$	单调减	单调减

(2) 在 $2^{\frac{1}{x}}>x^a$ 两边取对数, 得 $\frac{1}{x}\ln 2>a\ln x$,由于 $0<x<1$, 所以

$$\frac{a}{\ln 2}>\frac{1}{x\ln x} \qquad (1)$$

由(1)的结果可知,当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)\le f(\frac{1}{e})=-e$,

为使(1)式对所有 $x\in(0,1)$ 成立,当且仅当 $\frac{a}{\ln 2}>-e$,即 $a>-e\ln 2$

21 解 (1) 必要性 ： $\because a_1=0,\therefore a_2=1-c$ ，

又 $\because a_2\in[0,1],\therefore 0\le 1-c\le 1$ ，即 $c\in[0,1]$

充分性 ： 设 $c\in[0,1]$，对 $n\in N^*$ 用数学归纳法证明 $a_n\in[0,1]$

当 $n=1$ 时， $a_1=0\in[0,1]$.假设 $a_k\in[0,1](k\ge 1)$

则 $a_{k+1}=ca_k^3+1-c\le c+1-c=1$，且 $a_{k+1}=ca_k^3+1-c\ge 1-c=\ge 0$

$\therefore a_{k+1}\in[0,1]$，由数学归纳法知 $a_n\in[0,1]$ 对所有 $n\in N^*$ 成立

(2) 设 $0<c<\frac{1}{3}$，当 $n=1$ 时，$a_1=0$，结论成立

当 $n\ge 2$ 时，

$\because a_n=ca_{n-1}^3+1-c,\therefore 1-a_n=c(1-a_{n-1})(1+a_{n-1}+a_{n-1}^2)$

$\because 0<C<\frac{1}{3}$,由（1）知 $a_{n-1}\in[0,1]$，所以 $1+a_{n-1}+a_{n-1}^2\le 3$ 且 $1-a_{n-1}\ge 0$

$\therefore 1-a_n\le 3c(1-a_{n-1})$

$\therefore 1-a_n\le 3c(1-a_{n-1})\le(3c)^2(1-a_{n-2})\le\cdots\le(3c)^{n-1}(1-a_1)=(3c)^{n-1}$

$\therefore a_n\ge 1-(3c)^{n-1}(n\in N^*)$

(3) 设 $0<c<\frac{1}{3}$，当 $n=1$ 时，$a_1^2=0>2-\frac{2}{1-3c}$，结论成立

当 $n\geq 2$ 时，由（2）知 $a_n\geq 1-(3c)^{n-1}>0$

$\therefore a_n^2\geq(1-(3c)^{n-1})^2=1-2(3c)^{n-1}+(3c)^{2(n-1)}>1-2(3c)^{n-1}$

$\therefore a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_2^2+\cdots+a_n^2>n-1-2[3c+(3c)^2+\cdots+(3c)^{n-1}]$

$$=n+1-\frac{2(1-(3c)^n)}{1-3c}>n+1-\frac{2}{1-3c}$$

22 解 (1)由题意：

$\begin{cases}c^2=2\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$ ，解得 $a^2=4,b^2=2$，所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

(2)方法一

设点 Q、A、B 的坐标分别为 $(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$。

由题设知 $|\overrightarrow{AP}|,|\overrightarrow{PB}|,|\overrightarrow{AQ}|,|\overrightarrow{QB}|$ 均不为零，记 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1$

又 A，P，B，Q 四点共线，从而 $\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$

于是 $4=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$， $1=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$

$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$， $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

从而

$\frac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}=4x$，……（1） $\frac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=y$，……（2）

又点 A、B 在椭圆 C 上，即

$x_1^2+2y_1^2=4,\cdots\cdots(3)$ $x_2^2+2y_2^2=4,\cdots\cdots(4)$

（1）+（2）×2 并结合（3），（4）得 $4s+2y=4$

即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上

方法二

设点$Q(x,y),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题设，$|\overrightarrow{PA}|,|\overrightarrow{PB}|,|\overrightarrow{AQ}|,|\overrightarrow{QB}|$均不为零。

且 $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$

又 P,A,Q,B四点共线，可设$\overrightarrow{PA}=-\lambda\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ}(\lambda\neq 0,\pm 1)$,于是

$$x_1=\frac{4-\lambda x}{1-\lambda},y_1=\frac{1-\lambda y}{1-\lambda} \qquad (1)$$

$$x_2=\frac{4+\lambda x}{1+\lambda},y_2=\frac{1+\lambda y}{1+\lambda} \qquad (2)$$

由于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在椭圆 C 上，将（1)，（2）分别代入 C 的方程$x^2+2y^2=4,$整理得

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2-4(2x+y-2)\lambda+14=0 \qquad (3)$$

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2+4(2x+y-2)\lambda+14=0 \qquad (4)$$

(4)－(3)　　得　$8(2x+y-2)\lambda=0$

$\because \lambda\neq 0,\therefore 2x+y-2=0$

即点$Q(x,y)$总在定直线$2x+y-2=0$上

2009 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷第 1 至第 2 页，第 II 卷第 3 至第 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，务必在试卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在答题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束，务必将试卷和答题卡一并上交。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

P（A+B）= P（A）+ P（B）

如果事件 A、B 相互独立，那么

P（A•B）= P（A）•P（B）

S 表示底面积，h 表示底面上的高

棱柱体积　V=Sh

棱锥体积　$V=\frac{1}{3}Sh$

第 I 卷（选择题共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）i 是虚数单位，若 $\frac{1+7i}{2-i}=a+bi$（a、b∈R），则乘积 ab 的值是

（A）-15　　（B）-3　　（C）3　　（D）15

（2）若集合 A=｛x｜｜2x-1｜＜3｝，B=｛x｜$\frac{2x+1}{3-x}<0$｝，则 A∩B 是

（A）{x | $-1<x<-\frac{1}{2}$ 或 $2<x<3$}　　（B）{x | $2<x<3$}

（C）{x | $-\frac{1}{2}<x<2$}　　（D）{x | $-1<x<-\frac{1}{2}$ }

（3）下列曲线中离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的是

（A）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$

（C）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$　　（D）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1$

（4）下列选项中，p 是 q 的必要不充分条件的是

（A）$p: a+c>b+d$，　　$q: a>b$ 且 $c>d$

（B）$p: a>1, b>1$，　　q：$f(x)=a^x-b(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的图像不过第二象限

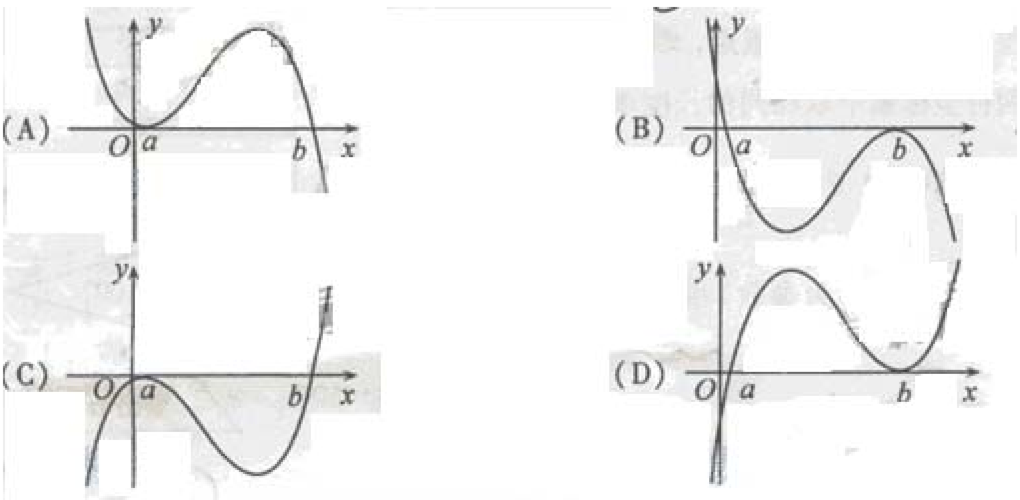
（C）$p: x=1$，　　$q: x^2=x$

（D）$p: a>1$，　　q：$f(x)=\log_a x(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数

（5）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$。以 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使得 S_n 达到最大值的 n 是

（A）21　　（B）20　　（C）19　　（D）18

（6）设 $a<b$，函数 $y=(x-a)^2(x-b)$ 的图像可能是



（7）若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 4 \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y=kx+\dfrac{4}{3}$ 分为面积相等的两部分，则 k 的值是

（A）$\dfrac{7}{3}$　　（B）$\dfrac{3}{7}$　　（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

（8）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$， $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=2$ 的两个相邻交点的距离等于 π，则 $f(x)$ 的单调递增区间是

（A）$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12}, k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\right], k\in Z$　　（B）$\left[k\pi+\dfrac{5\pi}{12}, k\pi+\dfrac{11\pi}{12}\right], k\in Z$

（C）$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3}, k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right], k\in Z$　　（D）$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6}, k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right], k\in Z$

（9）已知函数 $f(x)$ 在 R 上满足 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是

（A）$y=2x-1$　　（B）$y=x$　　（C）$y=3x-2$　　（D）$y=-2x+3$

（10）考察正方体 6 个面的中心，甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线，乙也从这 6 个点种任意选两个点连成直线，则所得的两条直线相互平行但不重合的概率等于

（A）$\dfrac{1}{75}$　　（B）$\dfrac{2}{75}$　　（C）$\dfrac{3}{75}$　　（D）$\dfrac{4}{75}$

（在此卷上答题无效）

2009 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数　学（理科）

第Ⅱ卷（非选择题 共 100 分）

考生注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

二. 填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡的相应位置.

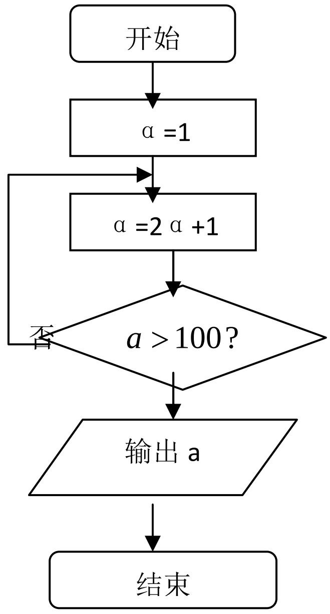
（11）若随机变量X~N（μ，σ²），则P（X≤μ）=______.

（12）以直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位，已知直线的

极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in R)$，它与曲线

$$\begin{cases} x=1+2\cos\alpha \\ y=2+2\sin\alpha \end{cases}$$（α 为参数）相交于两点 A 和 B，则

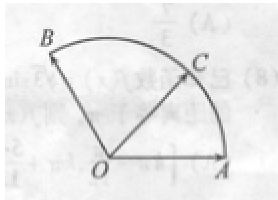
|AB|=______.



第（13）题图

（**13**）程序框图（即算法流程图）如图所示，其输出结果是______.

（**14**）给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 120°．如图所示，点 C 在以 O 为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动. 若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$，$y\in R$，则 x+y 的最大值是______.



第（14）题图

（**15**）对于四面体 ABCD，下列命题正确的是______（写出所有正确命题的编号）.

①相对棱 AB 与 CD 所在的直线异面；

②由顶点 A 作四面体的高，其垂足是△BCD 三条高线的交点；

③若分别作△ABC 和△ABD 的边 AB 上的高，则这两条高所在的直线异面；

④分别作三组相对棱中点的连线，所得的三条线段相交于一点；

⑤最长棱必有某个端点，由它引出的另两条棱的长度之和大于最长棱.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，解答写在答题卡上的指定区域内。

（16）（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，sin(C-A)=1,sinB=$\dfrac{1}{3}$.

(Ⅰ)求 sinA 的值；

(Ⅱ)设AC=$\sqrt{6}$，求△ABC的面积.

(17)(本小题满分 12 分)

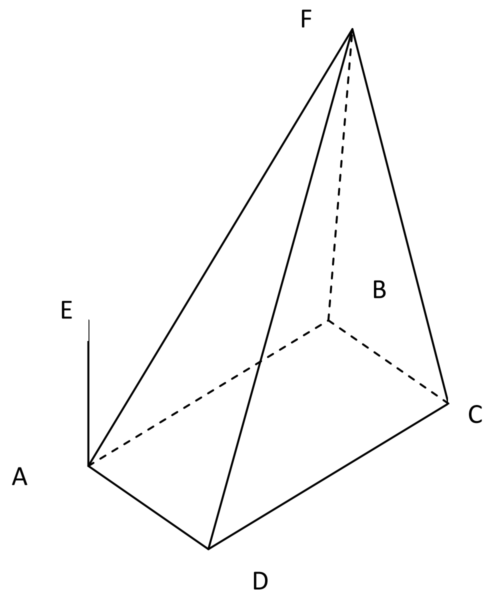
某地有 A、B、C、D 四人先后感染了甲型 H1N1 流感，其中只有 A 到过疫区，B 肯定是受 A 感染的。对于 C,因为难以判定他是受 A 还是受 B 感染的，于是假定他受 A 和受 B 感染的概率都是 1/2.同样也假设 D 受 A、B 和 C 感染的概率都是 1/3.在这种假定之下，B、C、D 中直接受 A 感染的人数 X 就是一个随机变量。写出 X 的分布列（不要求写出计算过程），并求 X 的均值（即数学期望）。

（18）（本小题满分 13 分）

如图，四棱椎F-ABCD的底面ABCD是菱形，其对角线AC=2,BD=$\sqrt{2}$ .AE、CF都与平面ABCD垂直，AE=1,CF=2.

（Ⅰ）求二面角 B-AF-D 的大小；

（Ⅱ）求四棱锥 E-ABCD 与四棱锥 F-ABCD 公共部分的体积。



第（18）题图

（19）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}+a(2-\ln x),a>0.$讨论$f(x)$的单调性.

(20)(本小题满分 13 分)

点P（x_0,y_0）在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0)上，$x_0=\alpha\cos\beta$，$y_0=b\sin\beta, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$. 直线$l_2$与直线$l_1$：$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$ 垂直，O为坐标原点，直线OP的倾斜角为α，直线l_2的倾斜角为γ.

（Ⅰ）证明：点 P 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线l_1的唯一交点；

（Ⅱ）证明：tanα ,tanβ ,tanγ构成等比数列。

（21）（本小题满分 13 分）

首项为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n{}^2+3), n\in N_*$.

(Ⅰ)证明：若a_1 为奇数，则对一切$n\geq 2$ ，a_n 都是奇数；

(Ⅱ)若对一切$n\in N_*$，都有$a_{n+1}>a_n$，求a_1的取值范围。

2009 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

一. 选择题

1-10.　BDBAB　CACAD

1、[解析] $\frac{1+7i}{2-i}=\frac{(1+7i)(2+i)}{5}=-1+3i$，$\therefore a=-1,b=3,ab=-3$，选 B。

2、[解析]集合 $A=\{x|-1<x<2\},B=\{x|x<-\frac{1}{2}或x>3\}$，$\therefore A\bigcap B=\{x|-1<x<-\frac{1}{2}\}$选 D

3、[解析]由 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{2},1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2},\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，选 B

4、[解析]：由 a＞b 且 c＞d$\Rightarrow$ $a+c$＞b+d，而由 $a+c$＞b+d　a＞b 且 c＞d，可举反例。选 A

5、[解析]：由 $a_1+a_3+a_5$=105 得 $3a_3=105,$ 即 $a_3=35$，由 $a_2+a_4+a_6$=99 得 $3a_4=99$ 即 $a_4=33$，$\therefore d=-2$，$a_n=a_4+(n-4)\times(-2)=41-2n$，由 $\begin{cases}a_n\ge 0\\ a_{n+1}<0\end{cases}$ 得 $n=20$，选 B

6、[解析]：$y'=(x-a)(3x-2a-b)$，由 $y'=0$ 得 $x=a,x=\frac{2a+b}{3}$，$\therefore$当 $x=a$ 时，y 取极大值 0，当 $x=\frac{2a+b}{3}$ 时 y 取极小值且极小值为负。故选 C。

或当 $x<b$ 时 $y<0$，当 $x>b$ 时，$y>0$ 选 C

7、[解析]：不等式表示的平面区域如图所示阴影部分△ABC

由 $\begin{cases}x+3y=4\\ 3x+y=4\end{cases}$ 得 A（1，1），又 B（0，4），C（0，$\frac{4}{3}$）

$\therefore S$ △ABC=$\frac{1}{2}(4-\frac{4}{3})\times 1=\frac{4}{3}$，设 $y=kx$ 与 $3x+y=4$ 的交点为 D，则由 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}S\Delta ABC=\frac{2}{3}$ 知 $x_D=\frac{1}{2}$，$\therefore y_D=\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{5}{2}=k\times\frac{1}{2}+\frac{4}{3},k=\frac{7}{3}$ 选 A。

8. [解析]：$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，由题设 $f(x)$ 的周期为 $T=\pi$，$\therefore \omega=2$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得，$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6},k\in z$，故选 C

9、[解析]：由 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$ 得 $f(2-x)=2f(x)-(2-x)^2+8(2-x)-8$，

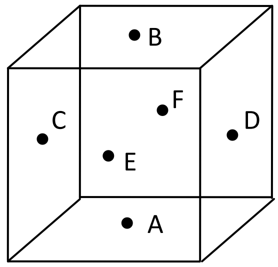
即 $2f(x)-f(2-x)=x^2+4x-4$，$\therefore f(x)=x^2$ $\therefore f'(x)=2x$，$\therefore$切线方程为

$y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$ 选 A

10、**[解析]** 如图，甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线，乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线，共有 $C_6^2 \bullet C_6^2 = 15 \times 15 = 225$ 种不同取法，其中所得的两条直线相互平行但不重合有

$AC // DB, AD // CB, AE // BF,\ AF // BE, CE // FD, CF // ED$

共 12 对，所以所求概率为 $p = \dfrac{12}{225} = \dfrac{4}{75}$，选 D



二. 填空题

11、[解析] $\dfrac{1}{2}$

12、[解析] 直线的普通方程为 $y = x$，曲线的普通方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

$$\therefore |AB| = 2\sqrt{2^2 - (\frac{|1-2|}{\sqrt{1+1}})^2} = \sqrt{14}$$

13、[解析] 由程序框图知，循环体被执行后 a 的值依次为 3、7、15、31、63、127，故输出的结果是 127。

14、[解析]设 $\angle AOC = \alpha$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB}, \end{cases}$$ ，即 $$\begin{cases} \cos\alpha = x - \frac{1}{2}y \\ \cos(120^0 - \alpha) = -\frac{1}{2}x + y \end{cases}$$

$$\therefore x + y = 2[\cos\alpha + \cos(120^0 - \alpha)] = \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) \le 2$$

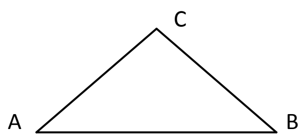
15、[解析]①④⑤

三．解答题

16 、 解 ：（ Ⅰ ） 由 $C-A=\dfrac{\pi}{2}$ ， 且 $C+A=\pi-B$ ， $\therefore$ $A=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{B}{2}$ ， $\therefore$

$$\sin A = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}),$$

$\therefore \sin^2 A = \dfrac{1}{2}(1 - \sin B) = \dfrac{1}{3}$，又 $\sin A > 0$，$\therefore \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



（Ⅱ）如图，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$

$$\therefore BC = \frac{AC\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} \bullet \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt{2}$$，又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\bullet BC\bullet\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}$$

17、解：随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

X 的均值为 $EX=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$

附：X 的分布列的一种求法

共有如下 6 种不同的可能情形，每种情形发生的概率都是$\frac{1}{6}$：

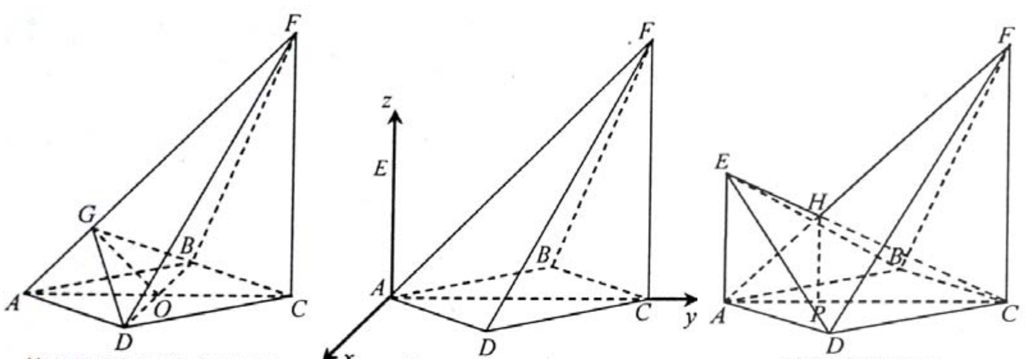
①	②	③	④	⑤	⑥
A—B—C—D	A—B—C └D	A—B—C └D	A—B—D └C	A—C—D └B	A—B ├C └D

在情形①和②之下，A 直接感染了一个人；在情形③、④、⑤之下，A 直接感染了两个人；在情形⑥之下，A 直接感染了三个人。

18、解：(I)（综合法）连接 AC、BD 交于菱形的中心 O，过 O 作 OG⊥AF，G 为垂足。连接 BG、DG。由 BD⊥AC，BD⊥CF 得 BD⊥平面 ACF，故 BD⊥AF。于是 AF⊥平面 BGD，所以 BG⊥AF，DG⊥AF，∠BGD 为二面角 B－AF－D 的平面角。

由 $FC\perp AC$， $FC=AC=2$，得 $FAC=\frac{\pi}{4}$，$OG=\frac{\sqrt{2}}{2}$

由 $OB\perp OG,OB=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\angle BGD=2\angle BGO=\frac{\pi}{2}$



第(18)题Ⅰ(综合法)图　第(18)题Ⅰ(向量法)图　第(18)题Ⅱ图

（向量法）以 A 为坐标原点，$\overline{BD}$、$\overline{AC}$、$\overline{AE}$ 方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系（如图）

设平面 ABF 的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y=0\\2y+2z=0\end{cases}$

令$z=1$，得$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=-1\end{cases}$，$\overrightarrow{n_1}=(-\sqrt{2},-1,1)$

同理，可求得平面 ADF 的法向量$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},-1,1)$。

由$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$知，平面 ABF 与平面 ADF 垂直，

二面角 B-AF-D 的大小等于$\dfrac{\pi}{2}$。

（II）连 EB、EC、ED，设直线 AF 与直线 CE 相交于点 H，则四棱锥 E-ABCD 与四棱锥 F-ABCD 的公共部分为四棱锥 H-ABCD。

过 H 作 HP⊥平面 ABCD，P 为垂足。

因为 EA⊥平面 ABCD，FC⊥平面 ABCD，，所以平面 ACFE⊥平面 ABCD，从而$P\in AC,HP\perp AC.$

由$\dfrac{HP}{CF}+\dfrac{HP}{AE}=\dfrac{AP}{AC}+\dfrac{PC}{AC}=1,$得$HP=\dfrac{2}{3}$。

又因为$S_{菱形ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\sqrt{2},$

故四棱锥 H-ABCD 的体积$V=\dfrac{1}{3}S_{菱形ABCD}\cdot HP=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}.$

19、解：$f(x)$的定义域是(0,+∞), $f'(x)=1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-ax+2}{x^2}.$

设$g(x)=x^2-ax+2$,二次方程$g(x)=0$的判别式$\Delta=a^2-8$.

① 当$\Delta=a^2-8<0$,即$0<a<2\sqrt{2}$时,对一切$x>0$都有$f'(x)>0$,此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数。

② 当$\Delta=a^2-8=0$,即$a=2\sqrt{2}$时,仅对$x=\sqrt{2}$有$f'(x)=0$,对其余的$x>0$都有$f'(x)>0$,此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上也是增函数。

③ 当$\Delta=a^2-8>0$，即$a>2\sqrt{2}$时，

方程$g(x)=0$有两个不同的实根$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$,$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$,$0<x_1<x_2$.

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$

$f'(x)$	+	0	_	0	+
$f(x)$	单调递增	极大	单调递减	极小	单调递增

此时 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 是上单调递减，在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

20、解：本小题主要考查直线和椭圆的标准方程和参数方程，直线和曲线的几何性质，等比数列等基础知识。考查综合运用知识分析问题、解决问题的能力。本小题满分 13 分。

解：(I)（方法一）由 $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y=1$ 得 $y=\dfrac{b^2}{a^2y_0}(a^2-x_0x)$, 代入椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

得 $(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b^2{x_0}^2}{a^4{y_0}^2})x^2-\dfrac{2b^2x_0}{a^2y_0}x+(\dfrac{b^2}{{y_0}^2}-1)=0$.

将 $\begin{cases}x_0=a\cos\beta\\ y_0=b\sin\beta\end{cases}$ 代入上式,得 $x^2-2a\cos\beta\cdot x+a^2\cos^2\beta=0$, 从而 $x=a\cos\beta$.

因此,方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y=1\end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\end{cases}$,即直线 l_1 与椭圆有唯一交点 P.

(方法二)显然 P 是椭圆与 l_1 的交点，若 Q$(a\cos\beta_1,b\sin\beta_1),0\le\beta_1<2\pi$ 是椭圆与 l_1 的交点，

代入 l_1 的方程 $\dfrac{\cos\beta}{a}x+\dfrac{\sin\beta}{b}y=1$，得 $\cos\beta\cos\beta_1+\sin\beta\sin\beta_1=1$,

即 $\cos(\beta-\beta_1)=1,\beta=\beta_1$, 故 P 与 Q 重合。

（方法三）在第一象限内，由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可得 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, y_0=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-{x_0}^2}$,

椭圆在点 P 处的切线斜率 $k=y'(x_0)=-\dfrac{bx_0}{a\sqrt{a^2-{x_0}^2}}=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$,

切线方程为 $y=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)+y_0$, 即 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$。

因此，l_1 就是椭圆在点 P 处的切线。

根据椭圆切线的性质，P 是椭圆与直线 l_1 的唯一交点。

（II） $\tan\alpha=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{b}{a}\tan\beta,\ l_1$ 的斜率为 $-\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2},\ l_2$ 的斜率为 $\tan\gamma=\dfrac{y_0a^2}{x_0b^2}=\dfrac{a}{b}\tan\beta,$

由此得 $\tan\alpha\tan\gamma=\tan^2\beta\neq 0,\ \tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma$ 构成等比数列。

21、解：（I）已知 a_1 是奇数，假设 $a_k=2m-1$ 是奇数，其中 m 为正整数，

则由递推关系得 $a_{k+1}=\dfrac{{a_k}^2+3}{4}=m(m-1)+1$ 是奇数。

根据数学归纳法，对任何 $n\in N_+$， a_n 都是奇数。

（II）（方法一）由 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{4}(a_n-1)(a_n-3)$ 知， $a_{n+1}>a_n$ 当且仅当 $a_n<1$ 或 $a_n>3$。

另一方面，若 $0<a_k<1,$ 则 $0<a_{k+1}<\dfrac{1+3}{4}=1$；若 $a_k>3$，则 $a_{k+1}>\dfrac{3^2+3}{4}=3.$

根据数学归纳法， $0<a_1<1,\Leftrightarrow 0<a_n<1,\forall n\in N_+;a_1>3\Leftrightarrow a_n>3,\forall n\in N_+.$

综合所述，对一切 $n\in N_+$ 都有 $a_{n+1}>a_n$ 的充要条件是 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$。

（方法二）由 $a_2=\dfrac{{a_1}^2+3}{4}>a_1,$ 得 ${a_1}^2-4a_1+3>0,$ 于是 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$。

$$a_{n+1}-a_n=\frac{{a_n}^2+3}{4}-\frac{{a_{n-1}}^2+3}{4}=\frac{(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})}{4},$$

因为 $a_1>0,a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+3}{4},$ 所以所有的 a_n 均大于 0，因此 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 同号。

根据数学归纳法， $\forall n\in N_+$， $a_{n+1}-a_n$ 与 a_2-a_1 同号。

因此，对一切 $n\in N_+$ 都有 $a_{n+1}>a_n$ 的充要条件是 $0<a_1<1$ 或 $a_1>3$。

绝密★启用前

2010年普通高等学校招生全国统一考试(安徽卷)

数　学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第1至第2页，第Ⅱ卷第3至第4页。全卷满分150分钟，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1．答题前，务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位。

2．答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

3．答第Ⅱ卷时，必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后再用0.5毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。

4．考试结束，务必将试题卷和答题卡一并上交。

参考公式：

如果事件 A 与 B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A 与 B 相互独立，那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

如果 A 与 B 是两个任意事件，$P(A)\neq 0$，那么

$P(AB)=P(A)P(B|A)$

第Ⅰ卷（选择题，共50分）

一、选择题：本大题共10个小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、i 是虚数单位，$\dfrac{i}{\sqrt{3}+3i}=$

A、$\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}i$　　B、$\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}i$　　C、$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$　　D、$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$

1.B

【解析】$\frac{i}{\sqrt{3}+3i}=\frac{i(\sqrt{3}-3i)}{3+9}=\frac{\sqrt{3}i+3}{12}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}i$，选 B.

【规律总结】$\frac{i}{\sqrt{3}+3i}$为分式形式的复数问题，化简时通常分子与分母同时乘以分母的共轭复数$\sqrt{-3i}$，然后利用复数的代数运算，结合$i^2=-1$得结论.

2、若集合$A=\left\{x\left|\log_{\frac{1}{2}}x\geq\frac{1}{2}\right.\right\}$，则$ð_{\mathbf{R}}A=$

A、$(-\infty,0]\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　B、$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　C、$(-\infty,0]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$　D、$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

2.A

【解析】$\log_{\frac{1}{2}}x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow 0<x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$ð_{\mathbf{R}}A=(-\infty,0]\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

【思维总结】根据后面求$ð_{\mathbf{R}}A$，所以必须先求集合 A，利用对数函数的单调性求集合 A，然后得结论.这里要注意对数中真数的范围，否则容易出错.

3、设向量$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则下列结论中正确的是

A、$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　B、$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$垂直　　D、$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

3.C

【解析】$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$(a-b)\Box b=0$，所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$垂直.

【方法小结】利用向量的坐标运算，直接验证很容易先排除掉选项 A、B、D，然后验证 C 即可得出结论.

4、若$f(x)$是$\mathbf{R}$上周期为 5 的奇函数，且满足$f(1)=1,f(2)=2$，则$f(3)-f(4)=$

A、-1　　B、1　　C、-2　　D、2

4.A

【解析】$f(3)-f(4)=f(-2)-f(-1)=-f(2)+f(1)=-2+1=-1$，所以选 A.

【方法技巧】根据$f(3),f(4)$分别与$f(2),f(1)$有关，利用$f(x)$是$\mathbf{R}$上周期为 5 的奇函数的周期性和奇偶性进行转换即可

5、双曲线方程为$x^2-2y^2=1$，则它的右焦点坐标为

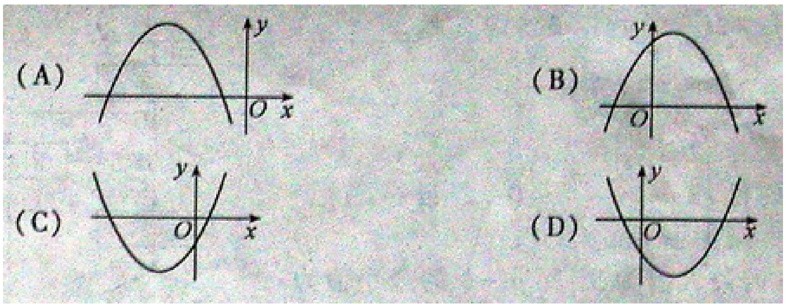
A、$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$　　B、$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$　　C、$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$　　D、$\left(\sqrt{3},0\right)$

5.C

【解析】双曲线的$a^2=1,b^2=\frac{1}{2}$，$c^2=\frac{3}{2}$，$c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以右焦点为$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$.

【误区警示】本题考查双曲线的交点，把双曲线方程先转化为标准方程，然后利用$c^2=a^2+b^2$求出 c 即可得出交点坐标.但因方程不是标准形式，很多学生会误认为$b^2=1$或$b^2=2$，从而得出错误结论.

6、设$abc>0$，二次函数$f\left(x\right)=ax^2+bx+c$的图象可能是



6.D

【解析】当$a>0$时，b、c同号，（C）（D）两图中$c<0$，故$b<0,-\frac{b}{2a}>0$，选项（D）符合.

【方法技巧】根据二次函数图像开口向上或向下，分$a>0$或$a<0$两种情况分类考虑.另外还要注意 c 值是抛物线与 y 轴交点的纵坐标，还要注意对称轴的位置或定点坐标的位置等.

7、设曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2+3\cos\theta\\y=-1+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），直线$l$的方程为$x-3y+2=0$，则曲线$C$上到直线$l$距离为$\frac{7\sqrt{10}}{10}$的点的个数为

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

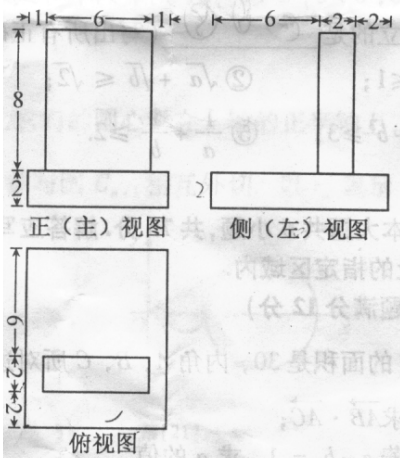
7.B

【解析】化曲线C的参数方程为普通方程：$(x-2)^2+(y+1)^2=9$，圆心$(2,-1)$到直线$x-3y+2=0$的距离$d=\frac{|2-3\times(-1)+2|}{\sqrt{10}}=\frac{7}{10}\sqrt{10}<3$，直线和圆相交，过圆心和$l$平行的直线和圆的 2 个交点符合要求，

又$\frac{7\sqrt{10}}{10}>3-\frac{7\sqrt{10}}{10}$，在直线$l$的另外一侧没有圆上的点符合要求，所以选 B.

【方法总结】解决这类问题首先把曲线C的参数方程为普通方程，然后利用圆心到直线的距离判断直线与

圆的位置关系，这就是曲线C上到直线l距离为$\frac{7\sqrt{10}}{10}$，然后再判断知$\frac{7\sqrt{10}}{10}>3-\frac{7\sqrt{10}}{10}$，进而得出结论.



8、一个几何体的三视图如图，该几何体的表面积为

A、280　　B、292　　C、360　　D 、372

8.C

【解析】该几何体由两个长方体组合而成，其表面积等于下面长方体的全面积加上面长方体的 4 个侧面积之和。$S=2(10\times8+10\times2+8\times2)+2(6\times8+8\times2)=360$.

【方法技巧】把三视图转化为直观图是解决问题的关键.又三视图很容易知道是两个长方体的组合体，画出直观图，得出各个棱的长度.把几何体的表面积转化为下面长方体的全面积加上面长方体的 4 个侧面积之和。

9、动点$A\left(x,y\right)$在圆$x^2+y^2=1$上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转，12 秒旋转一周。已知时间$t=0$时，点A的坐标是$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则当$0\le t\le12$时，动点$A$的纵坐标$y$关于$t$（单位：秒）的函数的单调递增区间是

A、$\left[0,1\right]$　　B、$\left[1,7\right]$　　C、$\left[7,12\right]$　　D、$\left[0,1\right]$和$\left[7,12\right]$

9.D

【解析】画出图形，设动点 A 与x轴正方向夹角为α，则$t=0$时$\alpha=\frac{\pi}{3}$，每秒钟旋转$\frac{\pi}{6}$，在$t\in\left[0,1\right]$上$\alpha\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$，在$\left[7,12\right]$上$\alpha\in[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{3}]$，动点$A$的纵坐标$y$关于$t$都是单调递增的。

【方法技巧】由动点$A\left(x,y\right)$在圆$x^2+y^2=1$上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转，可知与三角函数的定义类似，由 12 秒旋转一周能求每秒钟所转的弧度，画出单位圆，很容易看出，当 t 在$[0,12]$变化时，点A的纵坐标y关于t（单位：秒）的函数的单调性的变化，从而得单调递增区间.

10、设$\left\{a_n\right\}$是任意等比数列，它的前n项和，前$2n$项和与前$3n$项和分别为X,Y,Z，则下列等式中恒成立的是

A、$X+Z=2Y$　　B、$Y\left(Y-X\right)=Z\left(Z-X\right)$

C、$Y^2=XZ$　　D、$Y\left(Y-X\right)=X\left(Z-X\right)$

10.D

【分析】取等比数列$1,2,4$，令$n=1$得$X=1,Y=3,Z=7$代入验算，只有选项D满足。

【方法技巧】对于含有较多字母的客观题，可以取满足条件的数字代替字母，代入验证，若能排除3个选项，剩下唯一正确的就一定正确；若不能完全排除，可以取其他数字验证继续排除.本题也可以首项、公比即项数n表示代入验证得结论.

第Ⅱ卷（非选择题，共90分）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，将答案填在答题卡中的相应位置。

11、命题"对任何$x\in\mathbf{R}$，$|x-2|+|x-4|>3$"的否定是_______。

11.存在$x\in R$，使得$|x-2|+|x-4|\le 3$

【解析】全称命题的否定式特称命题，全称量词"任何"改为存在量词"存在"，并把结论否定。

【误区警示】这类问题的常见错误是没有把全称量词改为存在量词，或者对于">"的否定用"<"了.这里就有注意量词的否定形式.如"都是"的否定是"不都是"，而不是"都不是".

12、$\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式中，$x^3$的系数等于_______。

12.15

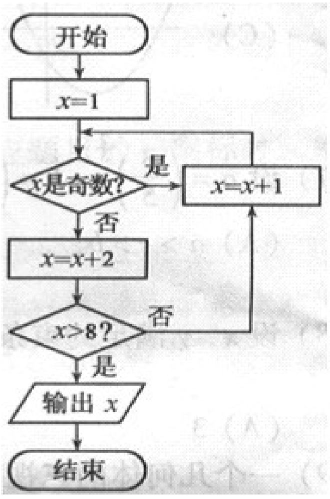
【解析】$C_6^4(\frac{x}{\sqrt{y}})^4(\frac{y}{\sqrt{x}})^2=15x^3$，所以$x^3$的系数等于15.

【思路小结】根据题意要出现x^3必须第一项4次，第二项2次，这可以直观得出，不要用通项去分析.

13、设x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y+2\ge 0\\8x-y-4\le 0\\x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$，若目标函数

$z=abx+y\,(a>0,b>0)$的最大值为8，

则$a+b$的最小值为_______。



13.4

【解析】不等式表示的区域是一个四边形，4个顶点是

$(0,0),(0,2),(\frac{1}{2},0),(1,4)$，易见目标函数在$(1,4)$取最大值8，

所以$8=ab+4\Rightarrow ab=4$，所以$a+b\ge 2\sqrt{ab}=4$，在$a=b=2$时是等号成立。所以$a+b$的最小值为4.

【规律总结】线性规划问题首先作出可行域，若为封闭区域（即几条直线围成的区域）则区域端点的值是目标函数取得最大或最小值，求出直线交点坐标代入得$ab=4$，要想求$a+b$的最小值，显然要利用基本不等式.

14、如图所示，程序框图（算法流程图）的输出值$x=$________。

14.12

【解析】程序运行如下: $x=1, x=2, x=4, x=5, x=6, x=8, x=9, x=10, x=12$,输出 12。

【规律总结】这类问题，通常由开始一步一步运行，根据判断条件，要么几步后就会输出结果，要么就会出现规律，如周期性，等差或等比数列型.

15、甲罐中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙罐中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球。先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件，则下列结论中正确的是________（写出所有正确结论的编号）。

① $P\left(B\right)=\frac{2}{5}$；　② $P\left(B \mid A_1\right)=\frac{5}{11}$；　③事件 B 与事件 A_1 相互独立；

④ A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件；

⑤ $P\left(B\right)$ 的值不能确定，因为它与 A_1, A_2, A_3 中哪一个发生有关

15.②④

【解析】易见 A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件，而

$P(B)=P\left(B \mid A_1\right)+P\left(B \mid A_2\right)+P\left(B \mid A_3\right)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{2}{10}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$。

【方法总结】本题是概率的综合问题，掌握基本概念，及条件概率的基本运算是解决问题的关键.本题在 A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件，把事件 B 的概率进行转化 $P(B)=P\left(B \mid A_1\right)+P\left(B \mid A_2\right)+P\left(B \mid A_3\right)$，可知事件 B 的概率是确定的.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。解答写在答题卡上的指定区域内。

16、（本小题满分 12 分）

设 ΔABC 是锐角三角形，a,b,c 分别是内角 A,B,C 所对边长，并且

$$\sin^2 A=\sin(\frac{\pi}{3}+B)\ \sin(\frac{\pi}{3}-B)\ +\ \sin^2 B。$$

(Ⅰ)求角 A 的值；

(Ⅱ)若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12, a=2\sqrt{7}$，求 b,c A（其中 $b<c$）。

(16)（本小题满分 12 分）本题考查两角和的正弦公式，同角三角函数的基本关系，特殊角的三角函数值，向量的数量积，利用余弦定理解三角形等有关知识，考查综合运算求解能力.

解：（Ⅰ）因为 $\sin^2 A=(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B)+\sin^2 B$

$=\frac{3}{4}\cos^2 B-\frac{1}{4}\sin^2 B+\sin^2 B=\frac{3}{4}$,

所以 $\sin A=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 A 为锐角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$ 可得

$$cb\cos A=12. \qquad ①$$

由（Ⅰ）知 $A=\frac{\pi}{3}$，所以

$$cb=24. \qquad ②$$

由余弦定理知 $a^2=c^2+b^2-2cb\cos A$，将 $a=2\sqrt{7}$ 及①代入，得

$$c^2+b^2=52, \qquad ③$$

③+②×2，得 $(c+b)^2=100$，所以

$$c+b=10.$$

因此，c，b 是一元二次方程 $t^2-10t+24=0$ 的两个根.

解此方程并由 $c>b$ 知 $c=6$，$b=4$.

17、（本小题满分 12 分）

设 a 为实数，函数 $f(x)=e^x-2x+2a,x\in\mathbf{R}$。

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(Ⅱ)求证：当 $a>\ln 2-1$ 且 $x>0$ 时，$e^x>x^2-2ax+1$。

(17)（本小题满分 12 分）本题考查导数的运算，利用导数研究函数的单调区间，求函数的极值和证明函数不等式，考查运算能力、综合分析和解决问题的能力.

（Ⅰ）解：由 $f(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$ 知 $f'(x)=e^x-2$，$x\in\mathbf{R}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$. 于是当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	单调递减 ↘	$2(1-\ln 2+a)$	单调递增 ↗

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\ln 2)$，单调递增区间是 $(\ln 2,+\infty)$，

$f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得极小值，极小值为 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2+a)$.

（Ⅱ）证：设 $g(x)=e^x-x^2+2ax-1$，$x\in\mathbf{R}$. 于是 $g'(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$.

由（Ⅰ）知当 $a>\ln 2-1$ 时，$g'(x)$ 最小值为 $g'(\ln 2)=2(1-\ln 2+a)>0$.

于是对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内单调递增.

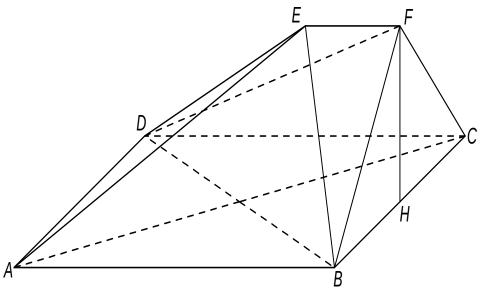
于是当 $a>\ln 2-1$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(x)>g(0)$.

而 $g(0)=0$，从而对任意 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$.

即 $e^x-x^2+2ax-1>0$，故 $e^x>x^2-2ax+1$.

18、（本小题满分 12 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形， $EF \parallel AB$ ， $EF \perp FB$ ， $AB = 2EF$ ， $\angle BFC = 90°$ ， $BF = FC$ ， H 为 BC 的中点。



(Ⅰ)求证： $FH \parallel$ 平面 EDB ；

(Ⅱ)求证： $AC \perp$ 平面 EDB ；

(III)求二面角 $B-DE-C$ 的大小。

（18）（本小题满分 13 分）本题考查空间线面平行、线面垂直、面面垂直的判断与证明，考查二面角的求法以及利用向量知识解决几何问题的能力，同时考查空间想象能力、推理论证能力和运算能力.

（综合法）（Ⅰ）证：设 AC 与 BD 交于点 G，则 G 为 AC 的中点. 连 EG，GH，

又 H 为 BC 的中点，$\therefore GH \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$. 又 $EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$，$\therefore EF \underline{\parallel} GH$.

$\therefore$ 四边形 $EFHG$ 为平行四边形.

$\therefore EG \parallel FH$. 而 $EG \subset$ 平面 EDB，$\therefore FH \parallel$ 平面 EDB.

（Ⅱ）证：由四边形 $ABCD$ 为正方形，有 $AB \perp BC$. 又 $EF \parallel AB$，

$\therefore EF \perp BC$.

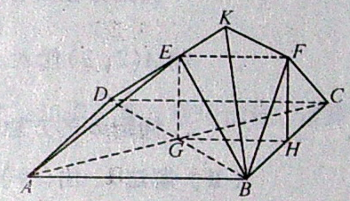
而 $EF \perp FB$，$\therefore EF \perp$ 平面 BFC. $\therefore EF \perp FH$，$\therefore AB \perp FH$.

又 $BF = FC$，H 为 BC 的中点，$\therefore FH \perp BC$.

$\therefore FH \perp$ 平面 $ABCD$. $\therefore FH \perp AC$.

又 $FH \parallel EG$，$\therefore AC \perp EG$.

又 $AC \perp BD$，$EG \cap BD = G$，$\therefore AC \perp$ 平面 EDB.



第(18)题综合法用图

（Ⅲ）解：$EF \perp FB$，$\angle BFC = 90°$，$\therefore BF \perp$ 平面 $CDEF$.

在平面 $CDEF$ 内过点 F 作 $FK \perp DE$ 交 DE 的延长线于 K，

则 $\angle FKB$ 为二面角 $B-DE-C$ 的一个平面角.

设 $EF = 1$，则 $AB = 2$，$FC = \sqrt{2}$，$DE = \sqrt{3}$.

又 $EF \parallel DC$，$\therefore \angle KEF = \angle EDC$. $\therefore \sin\angle EDC = \sin\angle KEF = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$\therefore FK = EF\sin\angle KEF = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\tan\angle FKB = \frac{BF}{FK} = \sqrt{3}$，$\therefore \angle FKB = 60°$.

$\therefore$ 二面角 $B-DE-C$ 为 $60°$.

（向量法）：

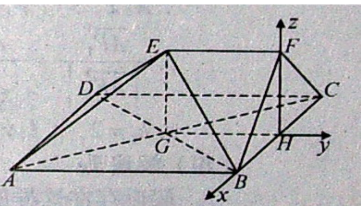
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB\perp BC$. 又 $EF/\!/AB$，$\therefore EF\perp BC$.

又 $EF\perp FB$，$\therefore EF\perp$ 平面 BFC.

$\therefore EF\perp FH$，$\therefore AB\perp FH$.

又 $BF=FC$，H 为 BC 的中点，$\therefore FH\perp BC$. $\therefore FH\perp$ 平面 ABC.

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HB}$ 为 x 轴正向，$\overrightarrow{HF}$ 为 z 轴正向，建立如图所示坐标系.



第（18）题向量法用图

设 $BH=1$，则 $A(1,\ -2,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(-1,\ 0,\ 0)$，$D(-1,\ -2,\ 0)$，$E(0,\ -1,\ 1)$，$F(0,0,1)$.

（Ⅰ）证：设 AC 与 BD 的交点为 G，连 GE，GH，

则 $G(0,\ -1,\ 0)$，$\therefore \overrightarrow{GE}=(0,\ 0,\ 1)$，又 $\overrightarrow{HF}=(0,\ 0,\ 1)$

$\therefore \overrightarrow{HF}/\!/\overrightarrow{GE}$.

$GE\subset$ 平面 EDB，HF 不在平面 EDB 内，$\therefore FH/\!/$ 平面 EBD.

（Ⅱ）证：$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{GE}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=0$，$\therefore AC\perp GE$.

又 $AC\perp BD$，$EG\cap BD=G$，$\therefore AC\perp$ 平面 EDB.

（Ⅲ）解：$\overrightarrow{BE}=(-1,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,\ -2,\ 0)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_1=-1-y_1+z_1=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}_1=-2-2y_1=0$，

$\therefore y_1=-1$，$z_1=0$，即 $\boldsymbol{n}_1=(1,\ -1,\ 0)$.

$\overrightarrow{CD}=(0,\ -2,\ 0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,\ -1,\ 1)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,\ y_2,\ z_2)$，则 $\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$y_2=0$，

$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$1-y_2+z_2=0$，$z_2=-1$，

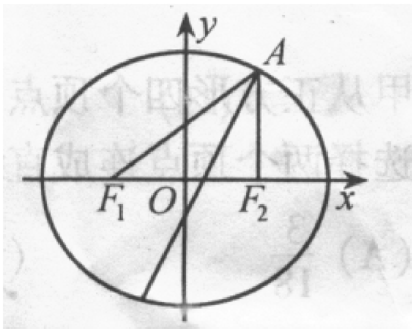
故 $\boldsymbol{n}_2=(1,\ 0,\ -1)$，

$$\cos<\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$\therefore <\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2>=60^\circ$，即二面角 $B-DE-C$ 为 60°.

19、（本小题满分 13 分）

已知椭圆 E 经过点 $A(2,3)$，对称轴为坐标轴，焦点 F_1,F_2 在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$。



(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ)求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程；

(Ⅲ)在椭圆 E 上是否存在关于直线 l 对称的相异两点？若存在，请找出；若不存在，说明理由。

(19)(本小题满分13分)本题考查椭圆的定义及标准方程，椭圆的简单几何性质，直线的点斜式方程与一般方程，点到直线的距离公式，点关于直线的对称等基础知识；考查解析几何的基本思想、综合运算能力、探究意识与创新意识.

解：(Ⅰ)设椭圆E的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

由$e=\frac{1}{2}$，即$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a=2c$，得$b^2=a^2-c^2=3c^2$.

$\therefore$椭圆方程具有形式$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

将$A(2,3)$代入上式，得$\frac{1}{c^2}+\frac{3}{c^2}=1$，解得$c=2$，

$\therefore$椭圆E的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(Ⅱ)解法1：由(Ⅰ)知$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，所以

直线AF_1的方程为：$y=\frac{3}{4}(x+2)$，即$3x-4y+6=0$. 直线AF_2的方程为：$x=2$.

由点A在椭圆E上的位置知，直线l的斜率为正数.

设$P(x,y)$为l上任一点，则

$$\frac{|3x-4y+6|}{5}=|x-2|.$$

若$3x-4y+6=5x-10$，得$x+2y-8=0$(因其斜率为负，舍去).

于是，由$3x-4y+6=-5x+10$得$2x-y-1=0$，

所以直线l的方程为：$2x-y-1=0$.

解法2：

$\because A(2,3)$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，$\therefore \overrightarrow{AF_1}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{AF_2}=(0,-3)$.

$\therefore \frac{\overrightarrow{AF_1}}{|\overrightarrow{AF_1}|}+\frac{\overrightarrow{AF_2}}{|\overrightarrow{AF_2}|}=\frac{1}{5}(-4,-3)+\frac{1}{3}(0,-3)=-\frac{4}{5}(1,2)$.

$\therefore k_l=2$，$\therefore l:y-3=2(x-1)$，即$2x-y-1=0$.

(Ⅲ)解法1：

假设存在这样的两个不同的点$B(x_1,y_1)$和$C(x_2,y_2)$，

$\because BC\perp l$，$\therefore k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$.

设BC的中点为$M(x_0,y_0)$，则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

由于M在l上，故　$2x_0-y_0-1=0$.　①

又B，C在椭圆上，所以有　$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1$与$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1$.

两式相减，得$\frac{x_2^2-x_1^2}{16}+\frac{y_2^2-y_1^2}{12}=0$，即$\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_2-y_1)}{12}=0$.

将该式写为$\frac{1}{8}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=0$，并将直线$BC$的斜率$k_{BC}$和线段$BC$的中点表示代入该表达式中，得$\frac{1}{8}x_0-\frac{1}{12}y_0=0$，即　$3x_0-2y_0=0$.　②

①×2－②得 $x_0=2$，$y_0=3$，即 BC 的中点为点 A，而这是不可能的.

∴不存在满足题设条件的点 B 和 C.

解法 2：

假设存在 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 两点关于直线 l 对称，则 $l\perp BC$，$\therefore k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$.

设直线 BC 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+m$，将其代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，

得一元二次方程 $3x^2+4\left(-\dfrac{1}{2}x+m\right)^2=48$，即 $x^2-mx+m^2-12=0$.

则 x_1 与 x_2 是该方程的两个根.

由韦达定理得 $x_1+x_2=m$，

于是 $y_1+y_2=-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+2m=\dfrac{3m}{2}$，

∴ B，C 的中点坐标为 $\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{3m}{4}\right)$.

又线段 BC 的中点在直线 $y=2x-1$ 上，$\therefore \dfrac{3m}{4}=m-1$，得 $m=4$.

即 B，C 的中点坐标为 $(2,3)$，与点 A 重合，矛盾.

∴不存在满足题设条件的相异两点.

20、（本小题满分 12 分）

设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中的每一项都不为 0。

证明：$\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是：对任何 $n\in\mathbf{N}$，都有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}。$$

(20)（本小题满分 12 分）本题考查等差数列、数学归纳法与充要条件等有关知识，考查推理论证、运算求解能力.

证：先证必要性.

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 若 $d=0$，则所述等式显然成立.

若 $d\neq0$，则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{d}\left(\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right)\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\,\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}\\&=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.\end{aligned}$$

再证充分性.

证法 1：（数学归纳法）设所述的等式对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 都成立．首先，在等式

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3} \qquad ①$$

两端同乘 $a_1a_2a_3$，即得 $a_1+a_3=2a_2$，所以 a_1，a_2，a_3 成等差数列，记公差为 d，则 $a_2=a_1+d$.

假设 $a_k=a_1+(k-1)d$，当 $n=k+1$ 时，观察如下二等式

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}, \qquad ②$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}}. \qquad ③$$

将②代入③，得

$$\frac{k-1}{a_1a_k}+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}},$$

在该式两端同乘 $a_1a_ka_{k+1}$，得 $(k-1)a_{k+1}+a_1=ka_k$.

将 $a_k=a_1+(k-1)d$ 代入其中，整理后，得 $a_{k+1}=a_1+kd$.

由数学归纳法原理知，对一切 $n \in \mathbf{N}_+$ 都有 $a_n=a_1+(n-1)d$. 所以 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列.

证法 2：（直接证法）依题意有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}. \qquad ②$$

②－①得

$$\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}-\frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

在上式两端同乘 $a_1a_{n+1}a_{n+2}$，得 $a_1=(n+1)a_{n+1}-na_{n+2}$. ③

同理可得 $a_1=na_n-(n-1)a_{n+1}$. ④

③－④得 $2na_{n+1}=n(a_{n+2}+a_n)$，

即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

21、（本小题满分 13 分）

品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试，一种通常采用的测试方法如下：拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝，要求其按品质优劣为它们排序；经过一段时间，等其记忆淡忘之后，再让其品尝这 n 瓶酒，并重新按品质优劣为它们排序，这称为一轮测试。根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评为。

现设 $n=4$，分别以 a_1,a_2,a_3,a_4 表示第一次排序时被排为 1,2,3,4 的四种酒在第二次排序时的序号，并令

$$X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|,$$

则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述。

(Ⅰ)写出 X 的可能值集合；

(Ⅱ)假设 a_1,a_2,a_3,a_4 等可能地为 1,2,3,4 的各种排列，求 X 的分布列；

(III)某品酒师在相继进行的三轮测试中，都有 $X \le 2$，

(i)试按(Ⅱ)中的结果，计算出现这种现象的概率（假定各轮测试相互独立）；

(ii)你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何？说明理由。

(21)（本小题满分13分）本题考查离散型随机变量及其分布列，考查在复杂场合下进行计数的能力．通过设置密切贴近生产、生活实际的问题情境，考查概率思想在现实生活中的应用，考查抽象概括能力、应用与创新意识．

解：(Ⅰ) X的可能值集合为$\{0, 2, 4, 6, 8\}$．

在1，2，3，4中奇数与偶数各有两个，所以a_2，a_4中的奇数个数等于a_1，a_3中的偶数个数，因此$|1-a_1|+|3-a_3|$与$|2-a_2|+|4-a_4|$的奇偶性相同，从而$X=(|1-a_1|+|3-a_3|)+(|2-a_2|+|4-a_4|)$必为偶数．

X的值非负，且易知其值不大于8．

容易举出使得X的值等于0，2，4，6，8各值的排列的例子．

(Ⅱ) 可用列表或树状图列出1，2，3，4的一共24种排列，计算每种排列下的X值，在等可能的假定下，得到

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{4}{24}$

(Ⅲ)(i) 首先$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，将三轮测试都有$X\leqslant 2$的概率记做$p$，由上述结果和独立性假设，得

$$p=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}.$$

(ii) 由于$p=\frac{1}{216}<\frac{5}{1000}$是一个很小的概率，这表明如果仅凭随机猜测得到三轮测试都有$X\leqslant 2$的结果的可能性很小，所以我们认为该品酒师确实有良好的味觉鉴别功能，不是靠随机猜测．

2011年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第 1 至第 2 页，第Ⅱ卷第 3 页至第 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，务必在试题卷、答题卡规定填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位。
2. 答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答第Ⅱ卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束后，务必将试题卷和答题卡一并上交。

参考公式：

如果事件 A 与 B 互斥，那么 $P\left(A+B\right)=P(A)+P(B)$

如果事件 A 与 B 相互独立，那么 $P\left(AB\right)=P(A)P(B)$

椎体体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为椎体的底面积，h 为椎体的高.

第Ⅰ卷(选择题 共 50 分)

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数，则实数 a 为

（A）2　　(B) -2　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{2}$

（2） 双曲线 $2x^2-y^2=8$ 的实轴长是

（A）2　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) $4\sqrt{2}$

（3） 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(1)=$

（A）-3　　(B) -1　　（C）1　　（D）3

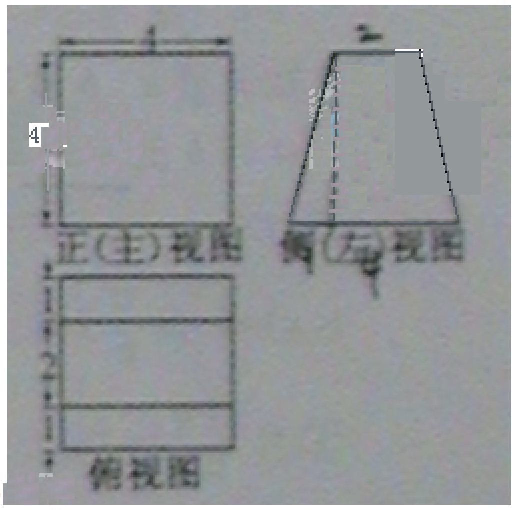
（4）设变量 x, y 满足 $|x|+|y|\le 1$, 则 $x+2y$ 的最大值和最小值分别为

（A）1，－1　　（B）2，－2　　（C）1，－2　　（D）2，－1

(5) 在极坐标系中，点 $(2,\frac{\pi}{3})$ 到圆 $\rho = 2\cos\ \theta$ 的圆心的距离为

（A）2　　(B) $\sqrt{4+\frac{\pi^2}{9}}$　　(C) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}$　　(D) $\sqrt{3}$

(6)一个空间几何体得三视图如图所示，则该几何体的表面积为



第（6）题图

（A） 48

(B) $32+8\sqrt{17}$　　(C) $48+8\sqrt{17}$　　(D) 80

(7)命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”的否定是

（A）所有不能被 2 整除的数都是偶数

（B）所有能被 2 整除的数都不是偶数

（C）存在一个不能被 2 整除的数都是偶数

（D）存在一个不能被 2 整除的数都不是偶数

（8）设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7\}$, 则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\phi$ 的集合 S 为

（A）57　　（B）56　　（C）49　　（D）8

（9）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中 φ 为实数，若 $f(x)\le\left|f(\frac{\pi}{6})\right|$ 对 $x\in R$ 恒成立，且 $f(\frac{\pi}{2})>f(\pi)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是

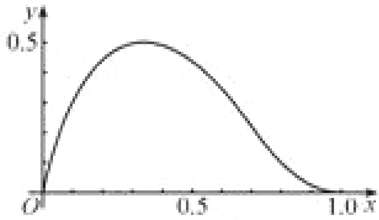
（A）$\left\{k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right\}(k\in Z)$　　　　（B）$\left\{k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}(k\in Z)$

（C）$\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right\}(k\in Z)$　　　　（D）$\left\{k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right\}(k\in Z)$

(10) 函数 $f(x)=ax^m(1-x)^n$ 在区间[0，1]上的图像如图所示，则 m，n 的值可能是

(A) $m=1$，$n=1$　　　　(B) $m=1$，$n=2$

(C) $m=2$，$n=1$　　　　(D) $m=3$，$n=1$



第(10)题图

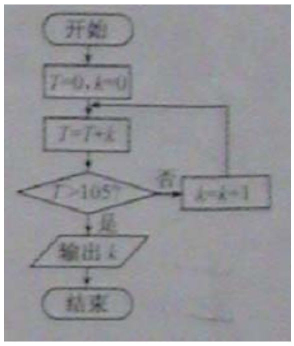
第 II 卷（非选择题 共 100 分）

考生注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

（11）如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是____________.



（12）设 $(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_{21}x^{21}$，则 $a_{10}+a_{11}=$_________.

（13）已知向量 a,b 满足 $(a+2b)\cdot(a-b)=-6$，且 $|a|=1$，$|b|=2$，则 a 与 b 的夹角为______.

（14）已知 ΔABC 的一个内角为 120°，并且三边长构成公差为 4 的等差数列，则 ΔABC 的面积为_______________

（15）在平面直角坐标系中，如果 x 与 y 都是整数，就称点 (x,y) 为整点，下列命题中正确的是______________（写出所有正确命题的编号）.

①存在这样的直线，既不与坐标轴平行又不经过任何整点

②如果 k 与 b 都是无理数，则直线 $y=kx+b$ 不经过任何整点

③直线 l 经过无穷多个整点，当且仅当 l 经过两个不同的整点

④直线 $y = kx + b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是：k 与 b 都是有理数

⑤存在恰经过一个整点的直线

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答写在答题卡的制定区域内.

（16）（本小题满分 12 分）

设 $f(x) = \dfrac{e^x}{1+ax}$ *，其中 a 为正实数

（Ⅰ）当 $a = \dfrac{4}{3}$ 时，求 $f(x)$ 的极值点；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 为 R 上的单调函数，求 a 的取值范围。

（17）（本小题满分 12 分）

如图，$ABCDEFG$ 为多面体，平面 $ABED$ 与平面 $AGFD$ 垂直，点 O 在线段 AD 上，

$OA = 1, OD = 2$, VOAB，△OAC，△ODE，△ODF 都是正三角形。

（Ⅰ）证明直线 BC // EF；

（18）（本小题满分 13 分）

在数 1 和 100 之间插入 n 个实数，使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列，将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n，再令 $a_n = \lg T_n,\ n \geqslant 1$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n = \tan a_n$□$\tan a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

（19）（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）设 $x \ge 1, y \ge 1$，证明

$$x + y + \frac{1}{xy} \le \frac{1}{x} + xy,$$

（Ⅱ）$1 \le a \le b \le c$，证明

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \le \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

（20）（本小题满分 13 分）

工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务，每次只派一个人进去，且每个

人只派一次，工作时间不超过 10 分钟，如果有一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出，再派下一个人。现在一共只有甲、乙、丙三个人可派，他们各自能完成任务的概率分别 p_1, p_2, p_3 p_1, p_2, p_3，假设 p_1, p_2, p_3 互不相等，且假定各人能否完成任务的事件相互独立.

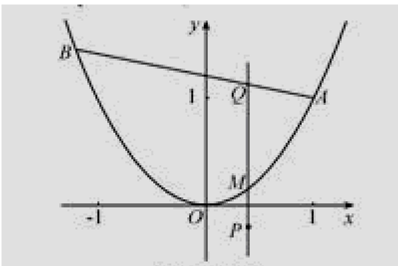
（Ⅰ）如果按甲在先，乙次之，丙最后的顺序派人，求任务能被完成的概率。若改变三个人被派出的先后顺序，任务能被完成的概率是否发生变化？

（Ⅱ）若按某指定顺序派人，这三个人各自能完成任务的概率依次为 q_1, q_2, q_3，其中 q_1, q_2, q_3 是 p_1, p_2, p_3 的一个排列，求所需派出人员数目 X 的分布列和均值（数字期望）EX；

（Ⅲ）假定 $1 > p_1 > p_2 > p_3$，试分析以怎样的先后顺序派出人员，可使所需派出的人员数目的均值（数字期望）达到最小。

（21）（本小题满分 13 分）

设 $\lambda > 0$，点 A 的坐标为（1, 1），点 B 在抛物线 $y = x^2$ 上运动，点 Q 满足 $\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{QA}$，经过 Q 点与 M x 轴垂直的直线交抛物线于点 M，点 P 满足 $\overrightarrow{QM} = \lambda\overrightarrow{MP}$, 求点 P 的轨迹方程。



第(21)题图

数学(理科)试题参考答案

一. 选择题:本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分,满分50分.

(1) A	(2) C	(3) A	(4) B	(5) D
(6) C	(7) D	(8) B	(9) C	(10) B

二. 填空题:本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分,满分25分.

(11) 15　　(12) 0　　(13) $\dfrac{\pi}{3}$　　(14) $15\sqrt{3}$　　(15) ①, ③, ⑤

三. 解答题:本大题共6小题,共75分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(16) (本小题满分12分) 本题考查导数的运算,极值点的判断,导数符号与函数单调性之间的关系,求解一元二次不等式等基本知识,考查运算求解能力,综合分析和解决问题的能力.

解:对$f(x)$求导得

$$f'(x)=e^x\frac{1+ax^2-2ax}{(1+ax^2)^2}. \qquad ①$$

(Ⅰ) 当$a=\frac{4}{3}$时,若$f'(x)=0$,则$4x^2-8x+3=0$,解得

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$

结合①,可知

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

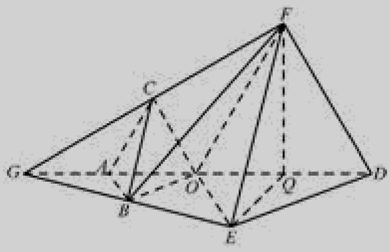
所以,$x_1=\frac{3}{2}$是极小值点,$x_2=\frac{1}{2}$是极大值点.

(Ⅱ) 若$f(x)$为$\mathbf{R}$上的单调函数,则$f'(x)$在$\mathbf{R}$上不变号,结合①与条件$a>0$,知

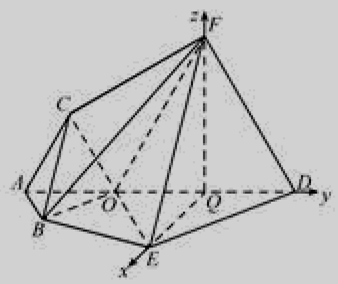
$$ax^2-2ax+1\geq 0$$

在$\mathbf{R}$上恒成立,因此$\Delta=4a^2-4a=4a(a-1)\leq 0$,由此并结合$a>0$,知$0<a\leq 1$.

(17) (本小题满分12分) 本题考查空间直线与直线,直线与平面、平面与平面的位置关系,空间直线平行的证明,多面体体积的计算等基本知识,考查空间想象能力,推理论证能力和运算求解能力.



第(17)题综合法解答用图



第(17)题向量法解答用图

（Ⅰ）（综合法）

证明：设 G 是线段 DA 与线段 EB 延长线的交点．由于△OAB 与△ODE 都是正三角形，所以

$$OB \mathop{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DE,\ OG=OD=2.$$

同理，设 G' 是线段 DA 与线段 FC 延长线的交点，有 $OG'=OD=2$．又由于 G 和 G' 都在线段 DA 的延长线上，所以 G 与 G' 重合．

在△GED 和△GFD 中，由 $OB \mathop{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DE$ 和 $OC \mathop{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}DF$，可知 B，C 分别是 GE 和 GF 的中点，所以 BC 是△GEF 的中位线，故 $BC\parallel EF$．

（向量法）

过点 F 作 $FQ\perp AD$，交 AD 于点 Q，连 QE，由平面 $ABED\perp$ 平面 $ADFC$，知 $FQ\perp$ 平面 $ABED$，以 Q 为坐标原点，$\overrightarrow{QE}$ 为 x 轴正向，$\overrightarrow{QD}$ 为 y 轴正向，$\overrightarrow{QF}$ 为 z 轴正向，建立如图所示空间直角坐标系．

由条件知 $E(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,0,\sqrt{3})$，$B(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$，$C(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$．

则有 $\overrightarrow{BC}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{BC}$，即得 $BC\parallel EF$．

（Ⅱ）**解**：由 $OB=1$，$OE=2$，$\angle EOB=60°$，知 $S_{EOB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．而△$OED$ 是边长为 2 的正三角形，故 $S_{OED}=\sqrt{3}$．所以

$$S_{OBED}=S_{EOB}+S_{OED}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

过点 F 作 $FQ\perp AD$，交 AD 于点 Q，由平面 $ABED\perp$ 平面 $ACFD$ 知，FQ 就是四棱锥 $F-OBED$ 的高，且 $FQ=\sqrt{3}$，所以

$$V_{F-OBED}=\frac{1}{3}FQ\cdot S_{OBED}=\frac{3}{2}.$$

（18）（**本小题满分 13 分**）本题考查等比和等差数列，对数和指数的运算，两角差的正切公式等基本知识，考查灵活运用基本知识解决问题的能力，运算求解能力和创新思维能力．

解：（Ⅰ）设 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+2}$ 构成等比数列，其中 $t_1=1$，$t_{n+2}=100$，则

$$T_n=t_1\cdot t_2\cdot\cdots\cdot t_{n+1}\cdot t_{n+2}, \qquad ①$$

$$T_n=t_{n+2}\cdot t_{n+1}\cdot\cdots\cdot t_2\cdot t_1, \qquad ②$$

①×②并利用 $t_it_{n+3-i}=t_1t_{n+2}=10^2(1\leqslant i\leqslant n+2)$，得

$$T_n^2=(t_1t_{n+2})\cdot(t_2t_{n+1})\cdot\cdots\cdot(t_{n+1}t_2)\cdot(t_{n+2}t_1)=10^{2(n+2)},$$

$$\therefore a_n=\lg T_n=n+2,\ n\geqslant 1.$$

（Ⅱ）由题意和（Ⅰ）中计算结果，知

$$b_n=\tan(n+2)\cdot\tan(n+3),\ n\geqslant 1.$$

另一方面，利用

$$\tan 1=\tan((k+1)-k)=\frac{\tan(k+1)-\tan k}{1+\tan(k+1)\cdot\tan k},$$

得

$$\tan(k+1)\cdot\tan k=\frac{\tan(k+1)-\tan k}{\tan 1}-1.$$

所以

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=3}^{n+2}\tan(k+1)\cdot\tan k\\&=\sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{\tan(k+1)-\tan k}{\tan 1}-1\right)\\&=\frac{\tan(n+3)-\tan 3}{\tan 1}-n.\end{aligned}$$

（19）（**本小题满分 12 分**）本题考查不等式的基本性质，对数函数的性质和对数换底公式等基本知识，考查代数式的恒等变形能力和推理论证能力．

证明：（Ⅰ）由于 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，所以

$$x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$$

$$\Leftrightarrow\quad xy(x+y)+1\leqslant y+x+(xy)^2.$$

将上式中的右式减左式，得

$$\begin{aligned}&(y+x+(xy)^2)-(xy(x+y)+1)\\&=((xy)^2-1)-(xy(x+y)-(x+y))\\&=(xy+1)(xy-1)-(x+y)(xy-1)\\&=(xy-1)(xy-x-y+1)\\&=(xy-1)(x-1)(y-1).\end{aligned}$$

既然 $x\geqslant1$，$y\geqslant1$，所以 $(xy-1)(x-1)(y-1)\geqslant0$，从而所要证明的不等式成立.

（Ⅱ）设 $\log_a b=x$，$\log_b c=y$，由对数的换底公式得

$$\log_c a=\frac{1}{xy},\ \log_b a=\frac{1}{x},\ \log_c b=\frac{1}{y},\ \log_a c=xy.$$

于是，所要证明的不等式即为

$$x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy,$$

其中 $x=\log_a b\geqslant1$，$y=\log_b c\geqslant1$.

故由（Ⅰ）立知所要证明的不等式成立.

（20）**（本小题满分 13 分）**本题考查相互独立事件的概率计算，考查离散型随机变量及其分布列、均值等基本知识，考查在复杂情境下处理问题的能力以及抽象概括能力、合情推理与演绎推理，分类讨论思想、应用意识与创新意识.

解：（Ⅰ）无论以怎样的顺序派出人员，任务不能被完成的概率都是 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$，所以任务能被完成的概率与三个人被派出的先后顺序无关，并等于

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_2p_3-p_3p_1+p_1p_2p_3.$$

（Ⅱ）当依次派出的三个人各自完成任务的概率分别为 q_1，q_2，q_3 时，随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	q_1	$(1-q_1)q_2$	$(1-q_1)(1-q_2)$

所需派出的人员数目的均值（数学期望）EX 是

$$\begin{aligned}EX&=q_1+2(1-q_1)q_2+3(1-q_1)(1-q_2)\\&=3-2q_1-q_2+q_1q_2.\end{aligned}$$

（Ⅲ）（方法一）由（Ⅱ）的结论知，当以甲最先、乙次之、丙最后的顺序派人时，

$$EX=3-2p_1-p_2+p_1p_2.$$

根据常理，优先派出完成任务概率大的人，可减少所需派出的人员数目的均值.

下面证明：对于 p_1，p_2，p_3 的任意排列 q_1，q_2，q_3，都有

$$3-2q_1-q_2+q_1q_2\geqslant3-2p_1-p_2+p_1p_2.\qquad\cdots\cdots(*)$$

事实上，

$$\begin{aligned}\Delta&=(3-2q_1-q_2+q_1q_2)-(3-2p_1-p_2+p_1p_2)\\&=2(p_1-q_1)+(p_2-q_2)-p_1p_2+q_1q_2\\&=2(p_1-q_1)+(p_2-q_2)-(p_1-q_1)p_2-q_1(p_2-q_2)\\&=(2-p_2)(p_1-q_1)+(1-q_1)(p_2-q_2)\\&\geqslant(1-q_1)[(p_1+p_2)-(q_1+q_2)]\\&\geqslant0.\end{aligned}$$

即（*）成立.

（方法二）（ⅰ）可将（Ⅱ）中所求的 EX 改写为 $3-(q_1+q_2)+q_1q_2-q_1$，若交换前两人的派出顺序，则变为 $3-(q_1+q_2)+q_1q_2-q_2$. 由此可见，当 $q_2>q_1$ 时，交换前两人的派出顺序可减小均值.

（ⅱ）也可将（Ⅱ）中所求的 EX 改写为 $3-2q_1-(1-q_1)q_2$，若交换后两人的派出顺序，则变为 $3-2q_1-(1-q_1)q_3$. 由此可见，若保持第一个派出的人选不变，当 $q_3>q_2$ 时，交换后两人的派出顺序也可减小均值.

综合（ⅰ）（ⅱ）可知，当 $(q_1,q_2,q_3)=(p_1,p_2,p_3)$ 时，EX 达到最小. 即完成任务概率大的人优先派出，可减小所需派出人员数目的均值，这一结论是合乎常理的.

（21）**（本小题满分 13 分）**本题考查直线和抛物线的方程，平面向量的概念，性质与运算，动点的轨迹方程等基本知识，考查灵活运用知识探究问题和解决问题的能力，全面考核综合数学素养.

解：由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$知 Q、M、P 三点在同一条垂直于 x 轴的直线上，故可设

$P(x, y)$，$Q(x, y_0)$，$M(x, x^2)$，则 $x^2-y_0=\lambda(y-x^2)$，即

$$y_0=(1+\lambda)x^2-\lambda y. \qquad ①$$

再设 $B(x_1, y_1)$，由$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，即$(x-x_1, y_0-y_1)=\lambda(1-x, 1-y_0)$，解得

$$\begin{cases} x_1=(1+\lambda)x-\lambda, \\ y_1=(1+\lambda)y_0-\lambda. \end{cases} \qquad ②$$

将①式代入②式，消去 y_0，得

$$\begin{cases} x_1=(1+\lambda)x-\lambda, \\ y_1=(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda. \end{cases} \qquad ③$$

又点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以 $y_1=x_1^2$，再将③式代入 $y_1=x_1^2$，得

$$(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda=((1+\lambda)x-\lambda)^2,$$

$$(1+\lambda)^2x^2-\lambda(1+\lambda)y-\lambda=(1+\lambda)^2x^2-2\lambda(1+\lambda)x+\lambda^2,$$

$$2\lambda(1+\lambda)x-\lambda(1+\lambda)y-\lambda(1+\lambda)=0.$$

因 $\lambda>0$，两边同除以 $\lambda(1+\lambda)$，得

$$2x-y-1=0.$$

故所求点 P 的轨迹方程为 $y=2x-1$.

2012年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第 1 至第 2 页，第Ⅱ卷第 3 页至第 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意事项：

答题前，务必在试题卷、答题卡规定填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位。

答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

答第Ⅱ卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。

考试结束后，务必将试题卷和答题卡一并上交。

参考公式：

如果事件 A 与 B 互斥；则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A 与 B 相互独立；则 $P(AB)=P(A)P(B)$

如果 A 与 B 是事件，且 $P(B)>0$；则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

第Ⅰ卷（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）复数 z 满足：$(z-i)(2-i)=5$；则 $z=$（　　）

$(A)\ -2-2i$　　$(B)\ -2+2i$　　$(C)\ 2-2i$　　$(D)\ 2+2i$

【解析】选 D

$$(z-i)(2-i)=5 \Leftrightarrow z-i=\frac{5}{2-i} \Leftrightarrow z=i+\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=2+2i$$

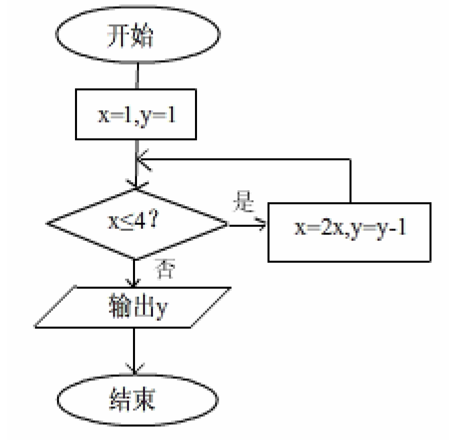
（2）下列函数中，不满足：$f(2x)=2f(x)$ 的是（　　）

$(A)\ f(x)=|x|$　　$(B)\ f(x)=x-|x|$　　$(C)\ f(x)=x+1$　　$(D)\ f(x)=-x$

【解析】选 C

$f(x)=kx$ 与 $f(x)=k|x|$ 均满足：$f(2x)=2f(x)$ 得：A,B,D 满足条件

（3）如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是（　　）



(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 8

【解析】选 B

x	1	2	4	8
y	1	2	3	4

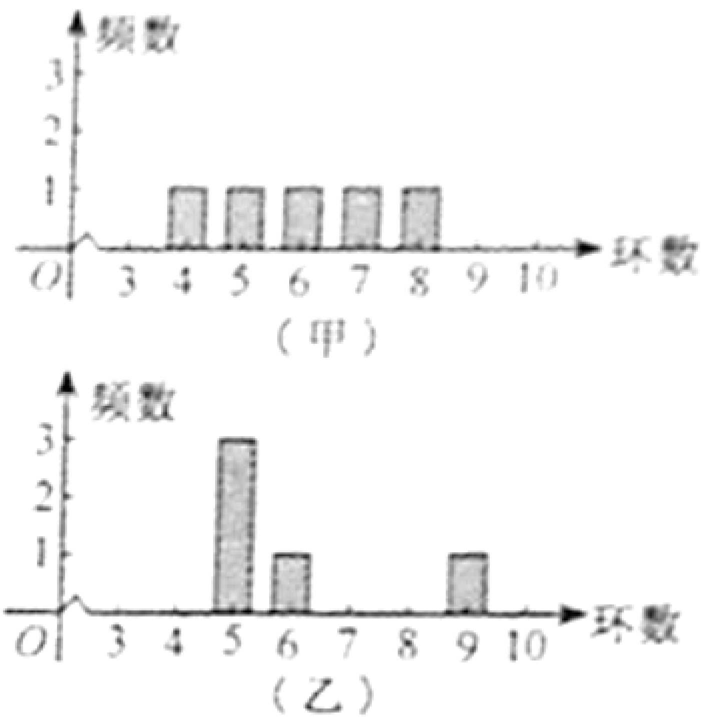
4.公比为 $\sqrt[3]{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且 $a_3a_{11}=16$，则（　　）

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

【解析】选 B

$a_3a_{11}=16 \Leftrightarrow a_7^2=16 \Leftrightarrow a_7=4 \Rightarrow a_{16}=a_7\times q^9=32 \Leftrightarrow \log_2 a_{16}=5$

5.甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次，两人成绩的条形统计图如图所示，则



第(5)题图

(A) 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数 (B) 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数

(C) 甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差　　(D) 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差

【解析】选 C　　$\overline{x_{甲}}=\frac{1}{5}(4+5+6+7+8)=6,\overline{x_{乙}}=\frac{1}{5}(5\times3+6+9)=6$

甲的成绩的方差为 $\frac{1}{5}(2^2\times2+1^2\times2)=2$，乙的成绩的方差为 $\frac{1}{5}(1^2\times3+3^2\times1)=2.4$

（6）设平面 α 与平面 β 相交于直线 m，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b\perp m$

则“$\alpha\perp\beta$”是“$a\perp b$”的（　　）

(A) 充分不必要条件　　　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　　　(D) 即不充分不必要条件

【解析】选 A

①$\alpha\perp\beta,b\perp m\Rightarrow b\perp\alpha\Rightarrow b\perp a$　　②如果 $a//m$；则 $a\perp b$ 与 $b\perp m$ 条件相同

（7）$(x^2+2)(\frac{1}{x^2}-1)^5$ 的展开式的常数项是（　　）

(A) -3　　(B) -2　　(C) 2　　(D) 3

【解析】选 D

第一个因式取 x^2，第二个因式取 $\frac{1}{x^2}$ 得：$1\times C_5^1(-1)^4=5$

第一个因式取 2，第二个因式取 $(-1)^5$ 得：$2\times(-1)^5=-2$　展开式的常数项是 $5+(-2)=3$

（8）在平面直角坐标系中，$O(0,0),P(6,8)$，将向量 $\overrightarrow{OP}$ 按逆时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后，得向量 $\overrightarrow{OQ}$

则点 Q 的坐标是（　　）

(A) $(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$　(B) $(-7\sqrt{2},\sqrt{2})$　　(C) $(-4\sqrt{6},-2)$　　(D) $(-4\sqrt{6},2)$

【解析】选 A

【方法一】设 $\overrightarrow{OP}=(10\cos\theta,10\sin\theta)\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{5},\sin\theta=\frac{4}{5}$

则 $\overrightarrow{OQ}=(10\cos(\theta+\frac{3\pi}{4}),10\sin(\theta+\frac{3\pi}{4}))=(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$

【方法二】将向量 $\overrightarrow{OP}=(6,8)$ 按逆时针旋转 $\frac{3\pi}{2}$ 后得 $\overrightarrow{OM}=(8,-6)$

则 $\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM})=(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$

（9）过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，点 O 是原点，若 $|AF|=3$；

则 ΔAOB 的面积为（　　）

$(A)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　$(B)\ \sqrt{2}$　　　　$(C)\ \frac{3\sqrt{2}}{2}$　　　　$(D)\ 2\sqrt{2}$

【解析】选 C

设 $\angle AFx=\theta(0<\theta<\pi)$ 及 $|BF|=m$；则点 A 到准线 $l:x=-1$ 的距离为 3

得：$3=2+3\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{1}{3}$　又 $m=2+m\cos(\pi-\theta) \Leftrightarrow m=\frac{2}{1+\cos\theta}=\frac{3}{2}$

ΔAOB 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times|OF|\times|AB|\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times(3+\frac{3}{2})\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（10）6 位同学在毕业聚会活动中进行纪念品的交换，任意两位同学之间最多交换一次，进行交换

的两位同学互赠一份纪念品，已知 6 位同学之间共进行了 13 次交换，则收到 4 份纪念品

的同学人数为（　　）

(A) 1或3　　(B) 1或4　　　(C) 2 或3　　(D) 2 或4

【解析】选 D

$C_6^2-13=15-13=2$

①设仅有甲与乙，丙没交换纪念品，则收到 4 份纪念品的同学人数为 2 人

②设仅有甲与乙，丙与丁没交换纪念品，则收到 4 份纪念品的同学人数为 4 人

第 II 卷（非选择题　共 100 分）

考生注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

二．填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡的相应位置.

（11）若 x,y 满足约束条件：$\begin{cases} x\ge 0 \\ x+2y\ge 3 \\ 2x+y\le 3 \end{cases}$；则 $x-y$ 的取值范围为______

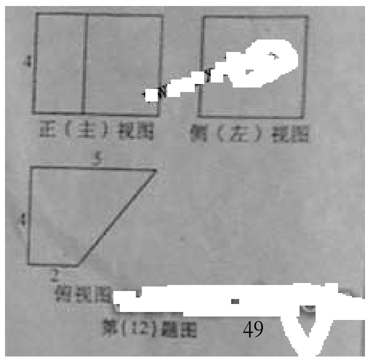
【解析】$x-y$ 的取值范围为______ $[-3,0]$

约束条件对应 ΔABC 边际及内的区域：$A(0,3),B(0,\frac{3}{2}),C(1,1)$

则 $t=x-y\in[-3,0]$

（12）某几何体的三视图如图所示，该几何体的表面积是______

【解析】表面积是______ 92



该几何体是底面是直角梯形，高为4的直四棱柱

几何体的表面积是 $S=2\times\frac{1}{2}\times(2+5)\times4+(2+5+4+\sqrt{4^2+(5-2)^2})\times4=92$

（13）在极坐标系中，圆 $\rho=4\sin\theta$ 的圆心到直线 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in R)$ 的距离是______

【解析】距离是______ $\sqrt{3}$

圆 $\rho=4\sin\theta\leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心 $C(0,2)$

直线 $l:\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in R)\leftrightarrow x-\sqrt{3}y=0$；点 C 到直线 l 的距离是 $\frac{|0-2\sqrt{3}|}{2}=\sqrt{3}$

（14）若平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足：$|2\vec{a}-\vec{b}|\le3$；则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值是______

【解析】$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值是______ $-\frac{9}{8}$

$|2\vec{a}-\vec{b}|\le3\Leftrightarrow4\vec{a}^2+\vec{b}^2\le9+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$4\vec{a}^2+\vec{b}^2\ge4|\vec{a}||\vec{b}|\ge-4\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow9+4\vec{a}\cdot\vec{b}\ge-4\vec{a}\cdot\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}\ge-\frac{9}{8}$

（15）设 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边为 a,b,c；则下列命题正确的是______

①若 $ab>c^2$；则 $C<\frac{\pi}{3}$　　②若 $a+b>2c$；则 $C<\frac{\pi}{3}$

③若 $a^3+b^3=c^3$；则 $C<\frac{\pi}{2}$　　④若 $(a+b)c<2ab$；则 $C>\frac{\pi}{2}$

⑤若 $(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$；则 $C>\frac{\pi}{3}$

【解析】正确的是______ ①②③

① $ab>c^2\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{2ab-ab}{2ab}=\frac{1}{2}\Rightarrow C<\frac{\pi}{3}$

② $a+b>2c\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\frac{4(a^2+b^2)-(a+b)^2}{8ab}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow C<\frac{\pi}{3}$

③当 $C\ge\frac{\pi}{2}$ 时，$c^2\ge a^2+b^2\Rightarrow c^3\ge a^2c+b^2c>a^3+b^3$ 与 $a^3+b^3=c^3$ 矛盾

④取 $a=b=2,c=1$ 满足 $(a+b)c<2ab$ 得：$C<\frac{\pi}{2}$

⑤取 $a=b=2,c=1$ 满足 $(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$ 得：$C<\frac{\pi}{3}$

三、解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.解答

写在答题卡的制定区域内.

（16）(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})+\sin^2 x$

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）设函数 $g(x)$ 对任意 $x\in R$，有 $g(x+\dfrac{\pi}{2})=g(x)$，且当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{2}-f(x)$；

求函数 $g(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上的解析式。

【解析】

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})+\sin^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x$$

（I）函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

（2）当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$g(x)=\dfrac{1}{2}-f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

当 $x\in[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 时，$(x+\dfrac{\pi}{2})\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

$$g(x)=g(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\sin 2(x+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}\sin 2x$$

当 $x\in[-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$ 时，$(x+\pi)\in[0,\dfrac{\pi}{2})$

$$g(x)=g(x+\pi)=\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

得：函数 $g(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上的解析式为 $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\sin 2x(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0)\\ \dfrac{1}{2}\sin 2x(-\pi\le x<\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$

（17）（本小题满分 12 分）

某单位招聘面试，每次从试题库随机调用一道试题，若调用的是 A 类型试题，则使用后该试题回库，并增补一道 A 类试题和一道 B 类型试题入库，此次调题工作结束；若调用的是 B 类型试题，则使用后该试题回库，此次调题工作结束。试题库中现共有 $n+m$ 道试题，其中有 n 道 A 类型试题和 m 道 B 类型试题，以 X 表示两次调题工作完成后，试题库中 A 类试题的数量。

（Ⅰ）求 $X=n+2$ 的概率；

（Ⅱ）设 $m=n$，求 X 的分布列和均值（数学期望）。

【解析】(Ⅰ) $X=n+2$ 表示两次调题均为 A 类型试题，概率为 $\frac{n}{m+n}\times\frac{n+1}{m+n+2}$

（Ⅱ）$m=n$ 时，每次调用的是 A 类型试题的概率为 $p=\frac{1}{2}$

随机变量 X 可取 $n,n+1,n+2$

$P(X=n)=(1-p)^2=\frac{1}{4}$，$P(X=n+1)=2p(1-p)=\frac{1}{2}$，$P(X=n+2)=p^2=\frac{1}{4}$

X	n	$n+1$	$n+2$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$EX=n\times\frac{1}{4}+(n+1)\times\frac{1}{2}+(n+2)\times\frac{1}{4}=n+1$

答：（Ⅰ）$X=n+2$ 的概率为 $\frac{n}{m+n}\times\frac{n+1}{m+n+2}$

（Ⅱ）求 X 的均值为 $n+1$

（18）（本小题满分 12 分）

平面图形 $ABB_1A_1C_1C$ 如图 4 所示，其中 BB_1C_1C 是矩形，$BC=2,BB_1=4$，

$AB=AC=\sqrt{2}$，

$A_1B_1=A_1C_1=\sqrt{5}$。现将该平面图形分别沿 BC 和 B_1C_1 折叠，使 ΔABC 与 $\Delta A_1B_1C_1$ 所在平

面都

与平面 BB_1C_1C 垂直，再分别连接 AA_1,BA_1,CA_1，得到如图 2 所示的空间图形，对此空间图

形解答

下列问题。

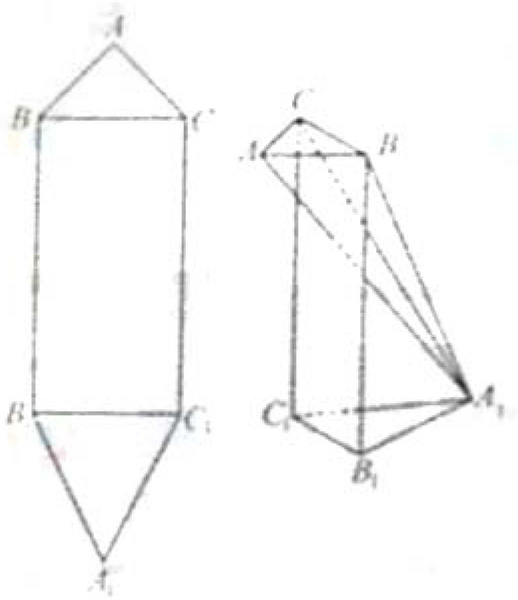


图1　　　　　　图2

第(15)题图

。

（Ⅰ）证明：$AA_1 \perp BC$；　　　　（Ⅱ）求 AA_1 的长；

（Ⅲ）求二面角 $A-BC-A_1$ 的余弦值。

【解析】(Ⅰ) 取 BC, B_1C_1 的中点为点 O, O_1，连接 AO, OO_1, A_1O, A_1O_1

则 $AB = AC \Rightarrow AO \perp BC$，面 $ABC \perp$ 面 $BB_1C_1C \Rightarrow AO \perp$ 面 BB_1C_1C

同理：$A_1O_1 \perp$ 面 BB_1C_1C　得：$AO // A_1O_1 \Rightarrow A, O, A_1, O_1$ 共面

又 $OO_1 \perp BC, OO_1 \cap AO = O \Rightarrow BC \perp$ 面 $AOO_1A_1 \Rightarrow AA_1 \perp BC$

（Ⅱ）延长 A_1O_1 到 D，使 $O_1D = OA$　　得：$O_1D \underline{\underline{//}} OA \Rightarrow AD \underline{\underline{//}} OO_1$

$OO_1 \perp BC$，面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 $BB_1C_1C \Rightarrow OO_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1 \Rightarrow AD \perp$ 面 $A_1B_1C_1$

$$AA_1 = \sqrt{AD^2 + DA^2} = \sqrt{4^2 + (2+1)^2} = 5$$

（Ⅲ）$AO \perp BC, A_1O \perp BC \Rightarrow \angle AOA_1$ 是二面角 $A-BC-A_1$ 的平面角

在 $Rt\Delta OO_1A_1$ 中，$A_1O = \sqrt{OO_1^2 + A_1O_1^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

在 $Rt\Delta OAA_1$ 中，$\cos\angle AOA_1 = \dfrac{AO^2 + A_1O^2 - AA_1^2}{2AO \times A_1O} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

得：二面角 $A-BC-A_1$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$。

（19）（本小题满分 13 分）

设 $f(x)=ae^x+\frac{1}{ae^x}+b(a>0)$

（I）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值；

（II）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 的切线方程为 $y=\frac{3}{2}x$；求 a,b 的值。

【解析】（I）设 $t=e^x(t\ge 1)$；则 $y=at+\frac{1}{at}+b\Rightarrow y'=a-\frac{1}{at^2}=\frac{a^2t^2-1}{at^2}$

①当 $a\ge 1$ 时，$y'>0\Rightarrow y=at+\frac{1}{at}+b$ 在 $t\ge 1$ 上是增函数

得：当 $t=1(x=0)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $a+\frac{1}{a}+b$

②当 $0<a<1$ 时，$y=at+\frac{1}{at}+b\ge 2+b$

当且仅当 $at=1(t=e^x=\frac{1}{a},x=-\ln a)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $b+2$

（II）$f(x)=ae^x+\frac{1}{ae^x}+b\Rightarrow f'(x)=ae^x-\frac{1}{ae^x}$

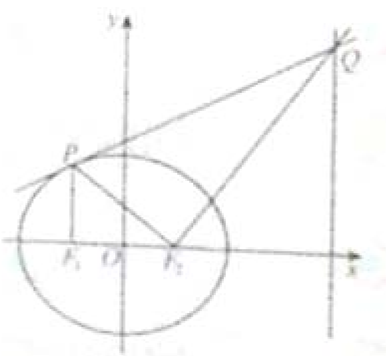
由题意得：$\begin{cases} f(2)=3 \\ f'(2)=\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ae^2+\frac{1}{ae^2}+b=3 \\ ae^2-\frac{1}{ae^2}=\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{2}{e^2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

（20）（本小题满分 13 分）

如图，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$ 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

的左，右焦点，过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于点 P，

过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线交直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 于点 Q；



第(20)题图

（I）若点 Q 的坐标为 $(4,4)$；求椭圆 C 的方程；

（II）证明：直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点。

【解析】（I）点 $P(-c,y_1)(y_1>0)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：$y_1=\frac{b^2}{a}$

$$PF_1 \perp QF_2 \Leftrightarrow \frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-c}\times\frac{4-0}{4-c}=-1 \quad ①$$

又 $\frac{a^2}{c}=4$ ② $c^2=a^2-b^2(a,b,c>0)$ ③

由①②③得：$a=2,c=1,b=\sqrt{3}$ 既椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（II）设 $Q(\frac{a^2}{c},y_2)$；则 $PF_1 \perp QF_2 \Leftrightarrow \frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-c}\times\frac{y_2-0}{\frac{a^2}{c}-c}=-1 \Leftrightarrow y_2=2a$

得：$k_{PQ}=\frac{2a-\frac{b^2}{a}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{c}{a}$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} \Rightarrow y'=\frac{-\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}$

过点 P 与椭圆 C 相切的直线斜率 $k=y'|_{x=-c}=\frac{c}{a}=k_{PQ}$

得：直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点。

（21）（本小题满分 13 分）

数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=0,x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c(n\in N^*)$

（I）证明：数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列的充分必要条件是 $c<0$

（II）求 c 的取值范围，使数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列。

【解析】（I）必要条件

当 $c<0$ 时，$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c<x_n \Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列

充分条件

数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列 $\Rightarrow x_1>x_2=-x_1^2+x_1+c \Leftrightarrow c<x_1^2=0$

得：数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列的充分必要条件是 $c<0$

（II）由（I）得：$C\geq 0$

①当 $c=0$ 时，$a_n=a_1=0$，不合题意

②当 $c>0$ 时，$x_2=c>x_1,x_3=-c^2+2c>x_2=c \Leftrightarrow 0<c<1$

$$x_{n+1}-x_n=c-x_n^2>0 \Leftrightarrow x_n^2<c<1 \Leftrightarrow 0=x_1\leq x_n<\sqrt{c}$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-(x_{n+1}^2-x_n^2)+(x_{n+1}-x_n)=-(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n-1)$$

当$c\le\dfrac{1}{4}$时，$x_n<\sqrt{c}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_n+x_{n+1}-1<0\Leftrightarrow x_{n+2}-x_{n+1}$与$x_{n+1}-x_n$同号，

由$x_2-x_1=c>0\Rightarrow x_{n+2}-x_n>0\Leftrightarrow x_{n+1}>x_n$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(-x_n^2+x_n+c)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$$

当$c>\dfrac{1}{4}$时，存在N，使$x_N>\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_N+x_{N+1}>1\Rightarrow x_{N+2}-x_{N+1}$与$x_{N+1}-x_N$异号

与数列$\{x_n\}$是单调递减数列矛盾

得：当$0<c\le\dfrac{1}{4}$时，数列$\{x_n\}$是单调递增数列